REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

Plana. III. 54

768.

ACCADEMIA
R. DELLE SCIENZE
DI TORINO

# SUITE
DE
# L'ARITHMETIQUE
DES
# GÉOMÉTRES.
*CONTENANT*
# LA SCIENCE
DES GÉOMÉTRES.

ACCADEMIA
R. DELLE SCIENZE
DI TORINO

# DES GÉOMÈTRES
# ET DE LA SCIENCE
# CONTEMPORAINE

## DES GÉOMÈTRES
## ET DE LA SCIENCE
## CONTEMPORAINE

PAR

M. J. BERTRAND

DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE

PARIS

IMPRIMERIE DE L. MARETHEUX

1868

# LA SCIENCE DES GÉOMÉTRES,

OU

## LA THÉORIE ET LA PRATIQUE DE LA GÉOMÉTRIE.

CONTENANT non seulement ce qui est compris dans les Elemens d'Euclides, mais encore la Trigonometrie, la Longimetrie, l'Altimetrie, le Nivellement, la Planimetrie, la Géodésie, la Méthode des Indivisibles, les Sections Coniques, la Stereometrie, le Jaugeage, la mesure des Onglets, des Corps Annulaires, des Solides à arêtes courbes, concaves & convexes, & des Voutes de toutes especes, & enfin tout ce qui peut concerner la mesure des Corps & de leurs surfaces.

Ouvrage travaillé dans un goût nouveau & sans aucun calcul, à l'usage de ceux qui ne sont point versés dans l'Algebre, enrichi de quarante-sept Planches en Taille-douce.

*Par M. l'Abbé* DEIDIER.

A PARIS,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, ruë Saint Jacques, vis-à-vis la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXXIX.

*AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.*

# PREFACE.

LA Pratique de la Geometrie eſt tellement dépendante de la Theorie, qu'il n'eſt pas poſſible de faire des progrez dans celle-là ſi on ignore celle-ci. Qu'on liſe & qu'on reliſe tant qu'on voudra tous les Livres de Geometrie-Pratique ; qu'on paſſe ſa vie ſur eux, la regle & le compas à la main, on viendra bien à bout à la vérité d'executer ſervilement ce qu'ils enſeignent ; mais à la moindre difficulté qui ſe préſentera, au plus leger changement dans les angles, dans la poſition des lignes, ou ſeulement dans l'énoncé d'une propoſition, on ſe trouvera dans un embarras qui fera bientôt voir le peu de fruit qu'on doit attendre d'un ſi inutile travail. C'eſt ce que les anciens Geometres ont toujours reconnu. De tant d'Ouvrages qui nous reſtent d'eux, on n'en voit point où ils ſe ſoient aviſés de ſéparer les Theoremes des Problemes qui en dépendent ; & ſi quelques Modernes ont entrepris de le faire, ce n'a été que pour condeſcendre à la vaine curioſité de certains eſprits, qui s'imaginent pouvoir cueillir le fruit Science ſans toucher aux épines qui en défendent l'abord. Mais quel ſuccès ont eu ces Ouvrages ? On les a lû avec avidité ; les uns ont paru ſecs & décharnés, on y auroit ſouhaité des démonſtration ; les autres ont été trouvés obſcurs & inintelligibles, on auroit voulu que leurs démonſtrations euſſent eu plus d'étendue & de clarté ; & de-là on a conclu qu'il n'y avoit point encore de bons Livres de Geometrie,

comme s'il pouvoit jamais y en avoir pour des esprits superficiels qui fuyent avec horreur tout ce qui a la moindre apparence d'une médiocre application. Il faut se désabuser ; les vérités Geometriques, de même que leurs démonstrations, ont entr'elles un ordre & un enchaînement auquel on doit s'attacher si on veut les saisir. Une proposition dépend souvent de plusieurs autres, qui en sont les principes ; & si on n'entend rien à sa démonstration, ce n'est point la faute de l'Auteur qui doit nécessairement supposer que les principes sont déja connus ; mais celle du Lecteur paresseux, qui ne fait pas les démarches nécessaires pour entendre ce qu'il souhaite de sçavoir.

Je conviens que la Geometre speculative, surtout de la maniere dont on a coutume de l'enseigner, a quelque chose de sec & de rebutant ; ce sont des Theoremes & des Corollaires entassés les uns sur les autres, dont il n'est pas facile de voir l'utilité. Il faut leur prêter une attention continuelle & ne dire jamais mot. En voilà bien assez pour rebuter une infinité de Commençans, qui d'ailleurs auroient toutes les dispositions nécessaires pour devenir excellens Geometres ? Mais ce défaut est-il si inséparable de la Geometrie qu'on veut bien se le persuader ? Non sans doute ; & j'ose même dire qu'il ne faut pas se tourmenter beaucoup pour l'en garantir tout-à-fait. En général l'Esprit humain se trouve extrêmement fatigué d'une instruction un peu longue, dont il est simplement auditeur ; mais qu'après l'avoir préparé par des principes courts, simples, & dont il reconnoît l'évidence, on vienne à l'interroger, dès-lors sa présomption naturelle le porte à chercher la solution de ce qu'on lui demande, il se tourne de tous les côtez sans vouloir même qu'on le

conduiſe, & ſi à la fin il ne découvre rien, il ſe délivre de ſa peine & de l'embaras où il ſe trouveroit une autre fois en recourant aux lumieres qu'on lui offroit, & dont il avoit d'abord cru être en état de ſe paſſer. Profitons de cette diſpoſition, & la Geometrie n'aura plus cet air heriſſé qui cauſe à tant de perſonnes de ſi vaines frayeurs. Les axiomes de cette Science ſont clairs & évidens, nul eſprit raſſis ne ſçauroit les contredire, les définitions qu'on donne ſont faciles à entendre, il ne s'agit donc que de propoſer les vérités qu'on en déduit ſous une forme qui pique la curioſité de l'eſprit, loin de le rebuter. Or pour cela il faut 1°. énoncer toutes les propoſitions de quelque nature qu'elles ſoient, de la même façon qu'on énonce un Probleme, afin que le Lecteur ſe trouve toujours interrogé. 2°. Mettre un tel ordre entre ces propoſitions qu'il n'y en aye jamais qui dépendent de quelques autres qui ne les ayent point précedées, & que les premieres ſoient ſi ſimples qu'on puiſſe les réſoudre par la ſeule connoiſſance des axiomes & des définitions. Par ce moyen non ſeulement on rendra facile aux Commençans l'étude de la Geometrie, mais on aura encore la ſatisfaction de voir qu'une ſeule propoſition énoncée, comme il vient d'être dit, ſera la ſource de pluſieurs autres qu'on pourra mettre en Corollaires, & démontrer avec beaucoup de brieveté. C'eſt ce que j'ai tâché de faire dans tout le cours de cet Ouvrage, comme on pourra voir par la ſeule lecture du plan que je vais en donner.

J'ai diviſé ce Traité en quatre parties. Dans la premiere, je conſidere les proprietés des lignes droites & circulaires; dans la ſeconde, les proprietés des ſurfaces terminées par des lignes droites & par la circulaire; dans la troi-

ſiéme, les proprietés des lignes courbes differentes de la circulaire, & des ſurfacee terminées par ces lignes; & dans la cinquiéme, les proprietés des ſolides ou corps.

Les lignes peuvent être conſiderées ou ſelon leur poſition, ou ſelon les angles qu'elles forment, ou ſelon les differens rappprts de grandeurs qu'elles peuvent avoir. 1°. Les lignes droites conſiderées ſelon leur poſition, ſont ou perpendiculaires entr'elles, ou paralleles, ou obliques; de même les lignes circulaires peuvent ou ſe toucher, ou ſe couper, ou être concentriques, ou excentriques. De plus on peut leur tirer des lignes droites dudedans au-dehors, du-dehors au-dedans, ou d'un de leurs points à un autre point. Et c'eſt ce que j'examine dans les Sections 2. 3. 4. de la premiere Partie, dont la premiere Section ne contient que les axiomes & les définitions néceſſaires pour l'intelligence des autres. 2°. Les lignes conſiderées ſelon les angles qu'elles forment en ſe rencontrant, peuvent avoir differentes inclinaiſons qu'il eſt bon de ſçavoir meſurer, & ces inclinaiſons ou angles joints aux lignes, peuvent former differentes figures, comme des triangles, des quarrez, des rectangles, des parallelogrames, des polygones reguliers ou irreguliers; & c'eſt l'oblet desSections 5. 6. & 7. de cette même partie. 3°. Les lignes étant des grandeurs ſuſceptibles de plus & de moins, peuvent être ajoûtées les unes aux autres, ou retranchées les unes des autres, ou multipliées & diviſées les unes par les autres, ou élevées à leurs puiſſances, & par conſéquent avoir entr'elles differens rapports, & c'eſt ce que je conſidere dans les Sections 8. 9. 10. Enfin la maniere d'inſcrire & de circonſcrire une figure autour d'un cercle, la Trigonome-

trie, ou la façon de mesurer les côtez & les angles d'un triangle par la connoissance de quelques-unes de ces choses, la Longimetrie & l'altimetrie, qui sont la maniere d'appliquer la Trigonometrie sur le terrein, & le nivellement, ou la façon de trouver si deux ou plusieurs points pris sur la terre, sont également ou inégalement éloignés de son centre, n'ayant besoin d'autres principes que de ceux qui ont été expliqués dans les Sections précedentes, se trouvent traitées dans les Sections 11. 12. 13. & 14. qui terminent cette premiere Partie. Venons à la seconde.

Les surfaces peuvent être considerées ou selon leur grandeur absoluë, ou selon les rapports de grandeurs qu'elles ont entr'elles, ou selon le rapport de leur contour, ou enfin selon les divisions qu'on en peut faire. Les surfaces considerées selon leur grandeur absoluës, exigent qu'on sçache les mesurer, & c'est ce que j'enseigne dans la premiere Section, où je donne les premiers principes de cette mesure, appellée ordinairement *Planimetrie*. Mais comme il y a beaucoup de surfaces qu'on ne peut mesurer commodément que par la connoissance des rapports qu'elles ont avec d'autres figures, j'interromps cette matiere dans la seconde Section, où je traite de ces rapports, & de-là prenant occasion de parler dans la troisiéme de leurs changemens, & de leur reduction de grand en petit, & de petit en grand, je reviens, & j'acheve dans le quatriéme ce qui regarde la Planimetrie par rapport aux figures terminées par des lignes droites ou par des circulaires, qui sont l'unique sujet de cette partie. Quant aux figures considérées selon le rapport de leur contour, je ne me suis attaché dans la cinquiéme Section qu'à celles dont les contours sont

égaux, parce que ce ſont les ſeules qui puiſſent être de quelque utilité, & j'enſeigne quelles ſont les plus grandes & les moindres, & de quelle maniere on peut en conſtruire qui ſoient égales en grandeur; c'eſt ce qu'on appelle ordinairement *Iſoperimetrie*. De-là je paſſe dans la ſixiéme Section à la maniere de diviſer les figures, à qui on a donné le nom de Geodeſie. Comme cette matiere eſt extrêmement utile pour la diviſion des champs & les partages des terres, je m'y ſuis auſſi attaché avec beaucoup de ſoin, & j'en ai rendu tous les Problemes généraux, enſorte qu'il n'eſt point de figure qu'on ne diviſe aiſément en telles parties qu'on voudra, égales ou inégales, lorſque les conditions demandées ne ſeront pas impoſſibles, ce qu'aucun Auteur juſqu'ici n'a point encore enſeigné. Enfin dans la ſixiéme & derniere Section de cette ſeconde partie, je traite de la méthode des indiviſibles & de l'Arithmetique des infinis; mais je n'en donne que les principes ſuffiſans pour l'intelligence des deux autres parties, me réſervant de traiter à fond ce ſujet dans un autre Ouvrage que je donnerai bien-tôt au Public, & où l'on verra avec plaiſir quelle en eſt l'étenduë & l'utilité dans la Geometrie.

La troiſiéme partie étant deſtinée à la conſideration des ſurfaces planes, terminées par des lignes courbes differentes de la circulaire, je m'y ſuis arrêté principalement aux Sections coniques, ainſi appellées, à cauſe qu'elles ſe forment par les differentes façons dont on peut couper un cone. On en compte cinq, le triangle, le cercle, la parabole, l'ellipſe, & l'hyperbole; mais comme j'ai parlé aſſez amplement du triangle & du cercle dans les parties précedentes, je n'examine ici que les trois autres. Je les conſidere d'abord dans le cone où

elles se forment, & après en avoir tiré la principale proprieté, je les examine ensuite chacune à part. Cette matiere est un peu plus abstraite que celles dont j'ai parlé auparavant ; mais n'étant pas possible sans son secours de faire de grands progrez dans la connoissance des solides & de leurs surfaces qui sont l'objet de la quatriéme partie, j'ai cru devoir la faire préceder, d'autant plus que de la maniere dont je la traite, on pourra la comprendre aisément avec un peu d'attention. De-là je viens aux proprietez de la spirale, & de la cycloïde, & si je passe sous silence une infinité d'autres courbes, c'est qu'elles sont de peu d'usage dans la pratique, qui est le but principal de ce Volume, & que d'ailleurs j'en parlerai amplement dans les autres Ouvrages que je dois bientôt mettre au jour.

Dans la quatriéme partie je considere les proprietés & les rapports des solides & de leurs surfaces, de même que dans les deux précedentes j'ai consideré les proprietés & les rapports des surfaces planes. On y trouvera non seulement la mesure des parallelepipedes, des prismes, des pyramides, des cylindres, des cones & des spheres, dont il est parlé dans la plûpart des Livres de Geometrie, mais encore la mesure des conoïdes, des corps annulaires, ou solides formés par la circonvolution d'une surface plane autour d'un axe, des corps à arétes courbes, concaves & convexes, des onglets ou des differentes parties qu'on peut retrancher de differens solides, des voutes de toutes les especes, & enfin des surfaces de tous ces solides, & des differentes parties de ces surfaces ; de sorte qu'on peut regarder le corps de cet Ouvrage comme un Traité de Geometrie Theorique & Pratique, beaucoup plus complet & plus utile

que tous ceux qui ont paru jusqu'ici.

On sera peut-être surpris de ce que je n'ai point usé de l'Algebre dans la plûpart de mes démonstrations, surtout dans un tems où cette façon de traiter la Geometrie est si fort en usage ; la raison en est facile à donner. Je conviens que j'aurois pû me conformer au goût présent, & être même plus court ; mais il faut avoüer que je me serois fait entendre de moins de personnes, au lieu que mon dessein est d'être entendu, s'il se peut, de ceux même qui ne sçavent encore rien, sans les jetter dans un travail trop fatiguant. La double attention que l'on doit faire & aux figures & aux discours, donne beaucoup de peine aux Commençans, il leur faut du tems pour se faire à cette sorte d'étude ; tout le monde le sçait ; que si à cela on joint encore l'Algebre, l'abstraction de ce calcul, & les nouvelles dénominations qu'il donne à des grandeurs qui en ont déja, partagera de nouveau leur attention, & les jettera dans une contention d'esprit que tout le monde n'est pas capable de supporter du premier abord. C'est toujours une mauvaise méthode de débuter par une étude seche & abstraite, qui impose à l'imagination un silence éternel. Cette faculté de nous-même est si accoutumée dès notre enfance à prendre part à toutes nos operations, qu'il seroit dangereux de vouloir lui faire subir le joug avec trop de dureté. Les figures Geometriques sont de son ressort, donnons-lui le tems de se familiariser avec elles, & de les tourner de toutes les façons, elle acquerra par ce moyen la facilité de nous fournir les idées dont nous avons besoin ; & le fond de connoissance que nous en tirerons, nous servira dans la suite à nous élever à des sujets plus sublimes sans avoir rien à craindre

du trouble qu'elle pourroit nous causer.

Ce que je viens de dire est tout-à-fait conforme à la façon dont on applique l'Algebre à la Geometrie. On suppose que la figure dont il s'agit est décrite, & que l'on connoisse quelques-unes de ses principales proprietés; après quoi s'il en est d'autres qu'on ne puisse déduire de sa formation que par de longs circuits, on a recours au calcul qui en soulageant la mémoire, donne à l'esprit plus de facilité pour résoudre ce qui lui est proposé. Or de-là que s'ensuit-il? sinon que pour faire un bon usage de l'Algebre, il faut sçavoir auparavant construire les figures, connoître leurs proprietés essentielles, & sçavoir démêler parmi les autres quelles sont celles que la seule formation peut faire découvrir, & celles qui demandent qu'on ait recours au calcul. Ce n'est donc ni par affectation, ni par éloignement pour l'algebre que j'ai pris une route differente de celles que l'on suit aujourd'hui; on doit avoir vû dans mon *Arithmetique des Geometres* qui vient de paroître, quel est le cas que je fais de cette Science, & l'on verra dans les deux autres Ouvrages que je donnerai bientôt au Public, & dont j'ai parlé dans mon *Prospectus*, quel est l'usage que j'en fais; mais toutes choses ont leur tems, & l'on doit être persuadé que si toutes les démarches que l'on fait en étudiant, ne produisent pas le fruit qu'on avoit crû pouvoir en attendre, c'est qu'elles ne sont pas toujours placées selon l'ordre qui leur convient.

Quant à la façon d'étudier cet Ouvrage, elle doit être à peu près la même que celle dont j'ai parlé dans la Préface de mon *Arithmetique des Geometres*. Il faut d'abord s'attacher à bien concevoir chaque proposition & sa démonstration; après quoi fermant le Livre,

on ſe tracera une figure ſemblable à celle qui convient au ſujet, & changeant les lettres qui en marquent les grandeurs, & la poſition des lignes & des angles, ſelon que le permettra l'état de la queſtion, on tâchera de le démontrer ſoi-même, comme ſi on avoit à le démontrer à quelqu'autre. Si on ſe donne la peine d'en agir de cette façon, j'oſe promettre d'avance qu'à peine ſera-t-on parvenu à la moitié de l'Ouvrage, qu'on entendra aiſément tout le reſte ſans employer même ce ſecours. Tout dépend des commencemens, & il importe beaucoup de n'y rien négliger.

Quelque ſoin que j'aye pris pour corriger les épreuves, il s'eſt cependant gliſſé des fautes d'impreſſion, dont la plûpart ſont ſi legeres, qu'on peut les appercevoir par la ſimple lecture. Cependant comme je ſuis bien aiſe que perſonne ne s'y trouve embarraſſé, on trouvera un Errata à la fin de cette Préface, & je prie le Lecteur de vouloir bien y jetter les yeux, & de corriger chaque faute en ſon lieu. Les deux dernieres Parties ſont tout-à-fait correctes, & il ne s'agit que de quelques endroits des deux premieres, que mes occupations m'ont empéché de voir avec le même ſoin.

# ERRATA.

PAge 31. *ligne* 26. les deux lignes AF, FG, *lisez* AF, FO.

Page 36. *ligne* 32. l'angle A, *lisez* l'angle B. Idem *ligne* 34. l'angle DBC (Fig. 35.) *lisez* (Fig. 41.).

Page 39. *ligne* 8. l'angle HBE, *lisez* l'arc HBE.

Page 48. *ligne* 1. l'arc BA, *lisez* l'arc CA.

Page 49. *ligne* 29. le segment DPH, *lisez* le segment DEH. Idem *ligne* 31. l'arc DFH, *lisez* l'arc DEH.

Page 50. *ligne* 19. DEH, *lisez* DPH.

Page 51. *ligne* 18. d'un point Q, *lisez* d'un point O. Idem *ligne* 21. par le centre C, *lisez* par le centre O.

Page 58. *ligne* 21. le côté AB, *lisez* le côté AC. Idem *ligne* 23. des centres A, C, *lisez* des centres A, B. Idem *ligne* 27. les points *b*, *d*, *lisez* les points *c*, *d*. Idem *ligne* 28. les points B, D, *lisez* les points C, D.

Page 99. *ligne* 13. PM, IN, &c. *lisez* FM, EN, &c. Idem *ligne* 33. RT, *rt*, *lisez* RF, *rf*.

Page 104. *ligne* 34. figure 122. *lisez* figure 127.

Page 116. *ligne* 31. IONC, *lisez* OLDN.

Page 120. *ligne* 36. A, B, de la base AB, *lisez* A, C, de la base AC.

Page 125. *ligne* 25. par les extrêmités B, A, *lisez* par l'extrêmité B.

Page 126. *ligne* OC. CR. *lisez* OC. OR.

Page 140. *ligne* 6. sont entr'eux, *lisez* leurs côtez sont entr'eux.

Page 162. valeur cherchée de DR, *lisez* valeur cherchée de DV.

Page 199. *ligne* 6. ou AB par AC, *lisez* ou AB par BC.

Page 217. *ligne* 9. du grand & du petit diametre, *lisez* du grand & du petit rayon.

Page 218. *ligne* 5. par l'apotheme OH, *lisez* par la moitié de l'apotheme OH.

Ibidem *ligne* 15. le triangle BDC, *lisez* le triangle BDO.

Page 243. *ligne* 11. la ligne AF, *lisez* la ligne GE.

Ibidem *ligne* 13. la diagonale DA, *lisez* la diagonale DG.

Ibidem *ligne* 14. la ligne AE, *lisez* la ligne HD.

Ibidem *ligne* 15. le triangle ADH, au lieu du triangle ADE; *lisez* le triangle GAD, au lieu du triangle GED.

Page 252. *ligne* 31. les angles DAO, DOH, *lisez* DAH, DOH.

Page 253. *ligne* 19. entre les deux excez, *lisez* entre le rectangle des deux excez.

Page 259. *ligne* 8. au triangle ASB, *lisez* ASD.

Ibid. *ligne* 9. ASC eſt au triangle ASC, *lisez* SDC eſt au triangle SDC.

Page 265. *ligne* 4. intervalle EH, *lisez* intervalle CH.

Ibidem *ligne* 5 l'arc AD, *lisez* l'arc ED.

Page 280. *ligne* 19. la partie commune EDI, *lisez* la partie commune EBI.

Page 288. *ligne* 17. points D, F, *lisez* points D, E.

Page 296. *ligne* 27. MK, & par conſéquent MK, *lisez* NK, & par conſéquent NK.

---

## *AVIS AU RELIEUR.*

QUoique l'on ait cotté les quarante-ſept Planches de cet Ouvrage pour être miſes aux pages auſquelles elles ont rapport; cependant on conſeille pour le mieux, de mettre à la fin de chaque partie celles qui les regardent, dans l'ordre qui ſuit, en obſervant de ſuivre les chiffres qui ſont en bas de chaque Planche; ſçavoir.

Les Planches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, & 11, à la fin de la premiere Partie, *page* - - - - 196

Les Planches 12, 13, 14, 15, 16, & 17, à la fin de la ſeconde Partie, *page* - - - - - - 340

Les Planches 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, & 33, à la fin de la troiſiéme Partie, *page* - - 500

Enfin les Planches 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, & 47, à la fin du Livre, *page* - - - 654

# LA THEORIE ET LA PRATIQUE DU GEOMETRE.

## PREMIERE PARTIE.

*Des proprietez des lignes.*

### SECTION I.

#### DEFINITIONS.

1. LA Géometrie eſt la Science qui apprend à connoître les proprietés des corps ſelon leur trois dimenſions *longueur*, *largeur*, & *profondeur*.

2. Euclide & les anciens Géometres après lui, ont défini le point, *ce qui n'a point de parties*; mais comme il n'eſt pas néceſſaire pour les démonſtrations

Mathematiques, que les points soient indivisibles, & qu'il faut au contraire en admettre de plus grands, & de moindres dans certaines occasions, ainsi que nous le démontrerons ailleurs. Nous dirons avec les Modernes que le point *est une portion de matiere si petite, soit en elle-même, soit par rapport à d'autres grandeurs à qui on la compare, qu'elle peut être regardée comme n'ayant ni longueur, ni largeur, ni profondeur.*

J'ai dit *soit en elle-même, soit par rapport à d'autres grandeurs à qui on la compare*, parce qu'il y a deux sortes de points, dont l'un peut s'appeller *point absolu*, & l'autre *point relatif.*

Le point *absolu* est une portion de matiere moindre qu'aucune grandeur assignable, quelque petite qu'elle soit.

Le point *relatif* est une portion de matiere qui a une grandeur assignable ; mais qui étant comparée à d'autres grandeurs, peut être regardée comme n'ayant aucune étenduë. C'est ainsi que les Astronomes disent que la Terre n'est qu'un point à l'égard de l'étenduë immense des Cieux. De même dans la Gnomonique on regarde la distance de la surface de la Terre à son centre, comme n'étant rien à l'égard de la distance du Soleil au centre de la Terre.

En Géometrie, quand on parle du point, on entend toujours le point *absolu*, à moins qu'on ne s'explique de façon à faire entendre que c'est du point *relatif* qu'on veut parler.

3. La *ligne* est une étenduë en longueur, dont la largeur & la profondeur sont si petites, qu'on peut les regarder comme n'étant rien.

On conçoit la ligne comme formée par une suite de points rangés les uns à côté des autres, ou par le mouvement d'un point qui seroit transporté d'un lieu A à un autre lieu B. *Figure* 1.

4. La surface est une étenduë en longueur & largeur, dont la profondeur est considerée comme n'étant rien à cause de son extrême petitesse. *Figure* 4.

On peut concevoir la surface comme formée par une suite de lignes mises les unes à côté des autres, & qui se touchent dans toute leur longueur. *Figure* 4. 5. 6.

5. Le corps ou solide est une étenduë en longueur, largeur & profondeur. *Figure* 7.

Une suite de surfaces mises les unes sur les autres, comme les feüillets d'un Livre forment un corps.

6. Les *Elemens* d'une grandeur sont les moindres parties dont on conçoit que cette grandeur est composée ; ainsi les Elemens d'une ligne sont des points ; ceux d'une surface sont des lignes ; & ceux des corps sont des surfaces.

7. Les *termes* ou les *extrêmitez* d'une grandeur sont les derniers Elemens qui la terminent ; les extrêmitez de la ligne AB sont les points A & B, *Fig.* 1. les extrêmitez de la surface ABCD sont les lignes AB, CD, AC, BD *Fig.* 4. enfin les extrêmitez du corps ABCDEFG sont les surfaces qui le terminent comme la surface ABCD, &c. *Fig.* 7.

8. Il y a trois sortes de lignes, la *droite*, la *courbe* & la *mixte*.

9. La ligne *droite* est celle qui prend le plus court chemin entre ses extrêmitez sans s'écarter ni à droite ni à gauche, telle est la ligne AB. *Fig.* 1.

10. La ligne *courbe* est celle qui ne prend pas le plus court chemin entre ses extrêmitez, comme la ligne AB. *Fig.* 2.

11. Enfin la ligne *mixte* est celle qui est en partie droite, & en partie courbe, comme la ligne ABC. *Fig.* 3.

12. Les *surfaces* sont ou *rectilignes*, ou *curvilignes*, ou *mixtes*.

13. La surface *rectiligne* est celle dont les extrêmitez sont des lignes droites. *Fig.* 4.

14. La surface *curviligne* est celle dont les extrêmitez sont des lignes courbes. *Fig.* 5.

15. La surface *mixte* est celle dont les extrêmitez sont des lignes mixtes. *Fig.* 6.

16. Il y a aussi des surfaces planes & des surfaces courbes, que l'on ne doit pas confondre avec celles dont nous venons de parler.

17. La surface plane a toutes ses parties tellement disposées entr'elles que l'une ne baisse ni ne hausse pas plus que l'autre, comme la surface d'un miroir ordinaire.

18. La surface courbe a ses parties arrangées de façon que les unes baissent ou haussent plus que les autres, comme la surface d'une colonne, d'un pain de sucre, &c.

19. Selon que les corps sont terminez par des surfaces rectilignes, curvilignes, mixtes, planes ou courbes, on les appelle en général, *solides terminez par des surfaces rectilignes, curvilignes, mixtes*, &c. & en particulier on leur donne des noms selon la qualité de ces surfaces, comme on verra dans la suite.

20. La *distance* d'un point à un autre, & en général d'une

grandeur à un autre, eſt le plus court chemin qu'on puiſſe prendre entre les deux points, ou entre les deux grandeurs.

21. On appelle *infiniment petit* toute grandeur qui eſt ou ſi petite en elle-même, qu'elle eſt moindre que toute autre grandeur qu'on puiſſe aſſigner quelque petite qu'elle ſoit, ou qui ayant une étenduë aſſignable, eſt cependant ſi petite par rapport à quelqu'autre grandeur à qui on la compare, qu'on peut la regarder comme n'étant rien.

De-là naiſſent deux ſortes d'*infiniment petits*, l'un qu'on peut appeller *abſolu*, & l'autre *relatif*.

22. L'*infiniment petit abſolu* eſt celui qui eſt moindre que tout ce qu'on peut aſſigner; ainſi le point eſt infiniment petit ſoit en lui-même, ſoit par rapport à la ligne; la ligne eſt infiniment petite en largeur, & en profondeur, ſoit en elle-même, ſoit par rapport à la ſurface; & la ſurface eſt infiniment petite en profondeur, ſoit en elle-même, ſoit par rapport au corps.

23. L'*infiniment petit relatif* eſt toute grandeur qui ayant en elle-même une étenduë ſenſible, ou aſſignable, peut cependant paſſer pour rien à l'égard d'autres grandeurs infiniment plus grandes qu'elle. Une ligne, par exemple, d'un pied de longueur, eſt infiniment petite à l'égard d'une autre qui contiendroit une infinité de pieds.

Ordinairement quand on parle de l'infiniment petit, on entend l'infiniment petit abſolu, à moins qu'on ne s'explique autrement.

Il y a grand nombre d'autres définitions que nous omettons pour ne pas ſurcharger la mémoire des Commençans, & qu'on trouvera chacune en ſon lieu.

## AXIOMES.

24. Le tout eſt plus grand que ſa partie. La ligne AC eſt plus grande que ſa partie AB, ou ſa partie BC. *Fig.* 8.

25. Le tout eſt égal à ſes parties priſes enſemble. La ligne AC eſt égale à ſes deux parties AB, BC.

26. Si à des grandeurs égales on ajoûte des quantitez égales, les ſommes ſeront égales. Cet Axiome n'a pas beſoin d'exemple, non plus que les ſuivans.

27. Si à des grandeurs égales on retranche des quantitez égales, les reſtes ſeront égaux.

28. Si l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe des grandeurs égales par

des quantitez égales, les produits, ou les quotiens seront égaux. Ceci est évident pour ceux qui sçavent l'Arithmetique ; ceux qui ne l'entendent pas, pourront consulter notre *Arithmetique des Géometres*.

29. Si à des grandeurs inégales on ajoûte, ou l'on retranche des choses égales, les sommes ou les restes seront inégaux ; & si l'on multiplie ou l'on divise des grandeurs inégales par des quantitez égales, les produits ou les quotiens seront inégaux.

30. Si la moitié, ou le tiers, ou le quart d'un tout est égal, ou double, ou triple, & de la moitié ou du tiers, ou du quart d'un autre tout, le premier tout sera ou égal, ou double, ou triple du second tout.

31. Si deux ou plusieurs grandeurs ne différent entr'elles que d'une quantité moindre que tout ce qu'on peut assigner, ces grandeurs sont parfaitement égales entr'elles, puisqu'il n'est pas possible d'en marquer la différence.

32. Si deux grandeurs sont chacune égales à une troisiéme, elles sont égales entr'elles.

## SECTION II.

### *Des proprietez de la ligne droite & des lignes perpendiculaires.*

### PROBLEME I.

33. *D'un point donné A à un autre point donné B, tirer une ligne droite, & la prolonger de part & d'autre tant qu'on voudra.* Fig. 9.

Prenez une *regle*, c'est-à-dire un instrument de bois ou de cuivre EFGH, dont les extrêmitez EF, GH soient en ligne droite ; couchez-la sur le papier, de sorte que les deux points A & B touchent l'une des extrêmitez comme EF ; ensuite faites glisser la plume ou le crayon de A en B le long de EF, & la ligne AB sera la ligne droite demandée.

Si on veut prolonger la ligne AB de part & d'autre, on continuëra à faire glisser la plume ou le crayon le long de EF au-delà des points A & B.

Et si la regle n'étoit pas assez longue pour pouvoir prolonger la ligne autant qu'il seroit nécessaire, comme par exemple au-delà de F, on la transportera de ce côté ; en sorte cependant qu'une partie EF de l'une de ses extrêmitez tombe le long d'une partie BD de la ligne déja décrite ABD, après quoi on continuëra de faire glisser le crayon ou la plume le long de la regle

de D en H, ce qu'on feroit toujours de même, s'il falloit prolonger la ligne encore plus loin.

Tout ceci eſt évident; car puiſque l'extrêmité EF de la regle eſt une ligne droite, la ligne ABD qui la ſuit ſans s'en écarter, ſera auſſi une ligne droite & dans le cas où il faut tranſporter la régle, puiſque ſa partie EF eſt dans la même direction qu'elle avoit auparavant, il eſt viſible que toute la regle ſera dans la même direction, & par conſéquent toute la ligne ABDH ſera droite.

Si les points A & B ſont ſur le terrain, plantez un jallon à la place de chacun d'eux; puis attachant le bout d'une corde au jallon A, tirez l'autre bout au jallon B, en ſorte qu'elle ſoit bien tenduë; cela fait, tracez la ligne AB ſur la terre avec une pioche ou un autre inſtrument en ſuivant toujours la corde.

S'il faut prolonger la ligne au-delà par exemple de B, *fig.* 10. éloignez-vous dans la campagne, & cherchez un endroit C par où regardant les deux jallons, vous trouviez que le jallon B vous empêche de voir le jallon A; plantez un jallon en C, puis tendant une corde de B en C, tracez la ligne BC de même que ci-deſſus.

La raiſon de ceci ſe manifeſte d'elle-même; car la ligne AB, *fig.* 9. ſera droite, puiſqu'une corde bien tenduë entre deux points, prent le plus court chemin; & la ligne ABC, *fig.* 10. le ſera auſſi, attendu que le jallon B empêchant de voir le jallon A, ſe trouve néceſſairement ſur le droit chemin de A en C.

L'uſage de la corde eſt bon ſur le terrain, & ſur tous les endroits où la corde ſe trouve ſoutenuë dans toute ſa longueur: mais s'il s'agiſſoit de tirer une ligne droite contre un mur, il faudroit ſe donner de garde d'employer ce moyen, parce qu'alors la corde n'étant pas ſoutenuë dans toute ſa longueur, quelque effort que l'on faſſe pour la tendre, ſon propre poids lui fait toujours décrire une ligne qui devient d'autant plus courbe, que les deux points entre leſquels elle eſt tenduë, ſe trouvent éloignez.

### COROLLAIRE I.

34. Il ſuit delà que deux points A & B d'une ligne droite étant donnez, on peut aiſément trouver ſa direction, quand même il faudroit la prolonger à l'infini.

### COROLLAIRE II.

35. *Toutes les parties AB, BD, DH d'une ligne droite AH (fig. 9.) ſont auſſi des lignes droites.* Si quelqu'une de ces parties s'écartoit à droite ou à gauche, la ligne entiere AH ne ſuivroit pas le plus court chemin entre ſes extrêmitez A, H, & ceſſeroit par conſéquent d'être droite.

### COROLLAIRE III.

36. *D'un point A à un autre point B,* (fig. 11.) *on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite AB*, toute autre ligne, comme ACB ou ABD qui ne tombera pas ſur la ligne AB, s'écartera néceſſairement ou à droite ou à gauche.

### COROLLAIRE IV.

37. *Quelque partie DH que l'on prenne d'une ligne droite AH;* (fig. 9.) *le reſte AD de cette ligne ſuivra la direction de la partie DH,* ſi DH avoit une direction différente de AD, la ligne entiere AH ne ſeroit pas droite.

### COROLLAIRE V.

38. *Si deux lignes droites AD, BH, ont deux points communs B & D, elles ſont dans la même direction, & forment une ligne droite AH.* C'eſt une ſuite des Corollaires précedens. La ligne BD qui joint les points B & D eſt droite, puiſqu'elle fait partie d'une ligne droite; & comme cette partie eſt commune aux deux droites AD, BH, les reſtes AB, DH de ces lignes, doivent neceſſairement ſuivre la direction de cette partie.

### COROLLAIRE VI.

39. *Deux lignes droites AB, CD* (fig. 12) *qui n'ont pas la même direction, ne ſe coupent qu'en un point E, lorſqu'elles viennent à ſe rencontrer.* Si elles ſe coupoient encore en un autre point comme en H, la ligne EH qui joint les points E, H, ſeroit droite, puiſqu'elle ſeroit partie de la droite AB; & comme EH ſeroit une partie commune aux deux droites AB, CD, ces deux lignes auroient la même direction, & ne ſe couperoient pas.

### *Définition 23.*

40. Une ligne droite AB (*fig.* 13.) eſt dite *perpendiculaire* ſur

une autre ligne droite CD, lorſqu'elle n'incline pas plus d'un côté que de l'autre ſur cette ligne.

## PROBLEME II.

41. *Connoître ſi une ligne droite AB eſt perpendiculaire ſur une autre ligne droite CD.* Fig. 13.

Prenez ſur CD deux points E, F, également éloignez du point B où les deux lignes ſe coupent, enſuite d'un point H pris à volonté ſur la ligne AB, & différent du point B, tirez les lignes HE, HF; ſi ces deux lignes ſe trouvent égales entr'elles, la ligne AB ſera perpendiculaire ſur la ligne CD.

### DEMONSTRATION.

Le point B eſt également éloigné des points E, F, par la conſtruction; & le point H eſt auſſi également éloigné des mêmes points, puiſque les lignes droites HE, HF qui meſurent leurs diſtances ſont égales. Donc la ligne AB a deux points également éloignez des points E, F. Or la ligne AB étant ſuppoſée droite, tous ſes points ſuivent la même direction ſans s'écarter ni à droite ni à gauche; donc tous les points de la ligne AB ſont également éloignez des points E, F; ainſi la ligne AB n'incline pas plus vers E que vers F, & par conſéquent elle eſt perpendiculaire à la ligne EF, ou CD, qui a la même direction que la ligne EF.

### COROLLAIRE I.

42. Il ſuit delà que ſi une ligne droite a deux points quelconques H, B, ou A, H également éloignez de deux points E, F d'une autre ligne droite CD, la ligne AB ſera perpendiculaire ſur CD.

### COROLLAIRE II.

43. *Si l'on prolonge la ligne AB au-delà de CD en O, ſa partie BO ſera perpendiculaire ſur CD.* Si elle inclinoit plus d'un côté que d'un autre, tous ſes points ne ſeroient pas également éloignez des points E, F, & la ligne entiere AO ceſſeroit d'être droite, puiſqu'elle ceſſeroit d'avoir tous ſes points dans la même direction.

## PROBLEME III.

44. *D'un point donné C ſur une ligne droite AB élever une droite perpendiculaire CO.* Fig. 14.

Prenez

Prenez sur AB deux points D, E également éloignez de part & d'autre du point donné C. Puis ouvrant le compas à discrétion, mais d'une ouverture plus grande que la distance DC ou CE des points D, E au point C, mettez l'une des pointes sur le point D, & de l'autre décrivez l'arc HL, transportez la même pointe sur le point E, & de l'autre décrivez l'arc FI; du point O où ces deux arcs se coupent, tirez au point C la ligne droite OC, qui sera la perpendiculaire demandée.

## DEMONSTRATION.

En premier lieu, l'ouverture du compas DH ou EF, étant plus grande que la distance DC, ou CE, il est évident que les deux arcs FI, HL ne se couperont point sur la ligne AB. 2°. Ces deux arcs doivent nécessairement s'entrecouper en quelque point hors de la ligne AB, puisque l'arc FI tournant autour du point E, va vers I, & l'arc HL tournant autour de D, va vers le côté opposé L. 3°. Le point d'intersection O, est également éloigné des points D, E; car l'ouverture du compas qui décrit les arcs étant toujours la même, les lignes droites DO, EI, qui mesurent cette ouverture, sont égales. Cela posé, la ligne droite OC a deux points O, C également éloignez des points D, E; donc par le Problême précedent elle n'incline pas plus vers D que vers E; & par conséquent elle est perpendiculaire sur la ligne DE, ou AB, qui a la même direction que la ligne DE.

Si la ligne AB est sur le terrain, on prendra deux points D, E également éloignez du point donné C; on y plantera deux clous, ou deux jallons, auſquels on attachera par un bout deux cordes d'égale longueur; puis tirant les cordes par l'autre bout, on les tendra jusqu'à ce qu'elles se touchent en O, & du point O on tirera la ligne OC. La démonstration de ceci est évidente par ce que nous venons de dire.

## COROLLAIRE I.

45. Si avec la même ouverture de compas DH, ou EF, on continuë les arcs FI, HL au-delà de la ligne AB, en sorte qu'ils se coupent en R, & qu'on tire les droites DR, DO, EO, ER, il est visible que ces quatre lignes seront égales, puisqu'elles sont chacune la mesure d'une même ouverture de compas; & par conséquent les points D, E de la ligne DE, ou AB, seront également éloignez des points O, R.

### COROLLAIRE II.

46. *Si l'on prolonge la perpendiculaire OC au-delà de la ligne AB ; son prolongement passera nécessairement par le point R*, le prolongement CR étant aussi perpendiculaire sur AB, tous ses points seront également distans des points E, D ; donc le point R, qui est aussi également distant des mêmes points, se trouvera sur ce prolongement ; car s'il se trouvoit ou en-deçà, ou en-delà, il se trouveroit plus près ou de E, ou de D.

### COROLLAIRE III.

47. Les points D, E de la ligne AB étant également éloignez des extrêmitez O, R, de la ligne OR, tous les points de la ligne AB sont par conséquent également distans des mêmes extrêmitez ; donc la ligne AB est perpendiculaire sur OR ; d'où il suit que *si une ligne OR est perpendiculaire sur une autre AB, réciproquement la ligne AB est perpendiculaire sur OR.*

### COROLLAIRE IV.

48. *La ligne OR est coupée en deux également en C*, tous les points de la ligne AB étant également distans des extrêmitez O, R, le point d'intersection C en est aussi également distant ; donc CO est égal à CR.

### COROLLAIRE V.

49. *D'un point donné C sur une ligne droite AB, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire OC* ; toute autre ligne qui ne tomberoit pas sur OC s'en écarteroit ou vers L ou vers I ; & par conséquent tous ses points ne seroient pas également distans des points D, E.

### PROBLEME IV.

50. *D'un point donné C hors d'une ligne AB, abbaisser une perpendiculaire sur cette ligne.* (Fig 15.)

Ouvrez le compas à discretion, enforte cependant que l'une des pointes étant mise au point C, l'autre décrive un arc EF qui coupe la ligne AB en deux points E, F ; des points E, F, avec une ouverture de compas plus grande ou moindre que la précedente, mais qui excede à vûë d'œil la moitié de la distance EF, des deux points E, F décrivez deux arcs qui se coupent en un point O, & du point O par le point C tirez la droite OCD, qui sera perpendiculaire sur AB.

DEMONSTRATION.

L'arc EF ayant été décrit avec une même ouverture du compas, les points E, F sont par conséquent également éloignez du point C, de même les arcs IL, NP ayant été décrits avec une même ouverture, les points E, F sont également éloignez du point O; donc la ligne droite OD a deux points O, C également éloignez des points E, F; donc aussi tous ses points en sont également éloignez, & OD est perpendiculaire sur AB.

Sur le terrain on plantera un clou ou un jallon au point C, auquel on attachera le bout d'une corde, & tirant l'autre bout on décrira l'arc EF; ensuite on plantera deux clous ou deux jallons aux points E, F, où l'on attachera par un des bouts deux cordes égales, & tirant les cordes par l'autre bout on les tendra jusqu'à ce qu'elles se touchent en O. Cela fait, on tirera du point O par le point C, la ligne OCD.

## COROLLAIRE I.

51. Puisque tous les points de la ligne OD sont également distans des points E, F, il est évident que le point D qui la termine, en est aussi également éloigné; & par conséquent la ligne ED est égale à la ligne FD. De même les points E, F étant également distans du point C, les lignes EC, FC, qui mesurent ces distances sont égales entr'elles; d'où il suit que *si d'un point C hors d'une ligne AB, on abbaisse une perpendiculaire CD, & deux obliques CE, CF, dont les extrémitez E, F, soient également éloignées de l'extrémité D de la perpendiculaire, ces deux obliques seront égales, & que si ces obliques sont égales, elles seront également éloignées de la perpendiculaire.*

## COROLLAIRE II.

52. Si après avoir abbaissé d'un point C la perpendiculaire CD sur la ligne AB, & tiré plusieurs obliques CE, CH, CP, CF de part & d'autre (*fig.* 16.), on prolonge la perpendiculaire CD de l'autre côté jusqu'à ce que le prolongement DR soit égal à CD, & qu'on tire ensuite au point R les obliques ER, HR, PR, FR, ces obliques seront égales chacune à chacune aux quatre obliques EC, HC, PC, FC: car la ligne AB étant perpendiculaire sur la ligne CR, & son point D étant également

éloigné des extrêmitez C, R, tous ses autres points, comme E, H, D, P, en seront aussi également éloignez; & par conséquent les lignes FC, FR seront égales entr'elles, de même que les lignes DC, DR, & CH, HR, & enfin CE, ER.

### COROLLAIRE III.

53. La perpendiculaire CR étant droite, est plus courte que les deux ensemble CF, FR, ou CP, PR, qui ne prennent pas le plus court chemin entre les points C, R; donc la moitié CD de la ligne CR, sera plus courte que la moitié CF, ou CP des lignes CFR, ou CPR. D'où il suit que *de toutes les lignes qu'on peut tirer d'un point C sur une ligne AB, la plus courte est la perpendiculaire CD.*

### COROLLAIRE IV.

54. Les lignes CF, FR prises ensemble, sont plus grandes que les lignes CP, PR prises ensemble, puisque celles-ci s'écartent moins de la perpendiculaire CR, qui prend le plus court chemin entre les points C, R. Donc la moitié CF des deux premieres, est plus grande que la moitié CP des deux dernieres; d'où il suit que *de toutes les obliques qu'on peut tirer sur une ligne, les plus grandes, sont celles qui s'éloignent davantage de la perpendiculaire, & les moindres sont celles qui s'en approchent le plus.*

### COROLLAIRE V.

55. *D'un point C hors d'une ligne droite AB, on peut tirer sur cette ligne tant d'obliques égales deux à deux que l'on voudra; mais on n'en tirera jamais trois qui soient égales entr'elles.* Les égales seront celles qui seront également éloignées de la perpendiculaire (*n.* 51.) ainsi EC, FC seront égales, de même que HC, PC, & nulle autre ne sera égale à celles-ci; car celles qui approcheront plus de la perpendiculaire, seront plus courtes, & celles qui s'en éloigneront davantage, seront plus longues. (*n.* 54.)

### COROLLAIRE VI.

56. *D'un point C hors d'une ligne droite AB, on ne peut abbaisser qu'une seule perpendiculaire CD sur cette ligne.* La perpendiculaire CD ayant tous ses points également éloignez des points E, F, toute autre ligne, comme CH ou CP, approchera plus de E que de F, ou de F que de E; & par conséquent tous ses points

n'étant pas également éloignez de ces deux points, elle ne sera pas perpendiculaire.

## COROLLAIRE VII.

57. La distance d'un point C à une ligne droite AB est la perpendiculaire CD abbaissée sur cette ligne, puisqu'elle prend le plus court chemin. (*n.* 20.)

## COROLLAIRE VIII.

58. *Si deux lignes CD, EF, sont perpendiculaires sur une troisiéme ligne AB, elles ne se rencontreront jamais.* (fig. 17.) si elles se rencontroient en un point O, on pourroit abbaisser de ce point deux perpendiculaires OD, OF sur AB, ce qui est impossible. (*n.* 56.)

## REMARQUE.

59. Ce dernier Corollaire n'empêche pas que les Géometres ne regardent deux lignes qui se rencontrent, comme perpendiculaires, lorsqu'elles ne se rencontrent qu'à une distance infinie, parce qu'alors ces deux lignes s'éloignent si peu de la perpendiculaire, qu'il n'est pas possible d'en assigner la différence.

## PROBLEME V.

60. *Couper une ligne donnée AB en deux parties égales, ou en un nombre de parties pairement pair; c'est-à-dire, toujours divisible par quatre, comme* 4, 8, 16, 32, *&c.* (Fig. 18.)

Ouvrez le compas à discrétion, mais d'une ouverture plus grande à vûë d'œil que la moitié de la ligne AB; puis mettant l'une des pointes sur l'extrêmité A, décrivez l'arc PQ; transportez la pointe sur l'autre extrêmité C, & avec la même ouverture décrivez l'arc LI; par les points V, S, où ces deux arcs se coupent, tirez la ligne droite VS, qui coupera la ligne AB en deux parties égales au point O.

## DEMONSTRATION.

Les arcs LI, PQ, ayant été décrits avec la même ouverture les points V, S, sont également éloignez des extrêmitez A, B de la ligne AB; donc tous les points de la ligne VS sont aussi également éloignez des mêmes extrêmitez; par conséquent le

point O d'interjection coupe la ligne AB en deux parties égales AO, OB.

Sur le terrain plantez deux clous ou deux jallons aux extrêmitez A, B, de la ligne donnée, attachez-y par le bout deux cordes d'égale grandeur, & dont chacune soit plus longue que la moitié de la ligne AB; tendez les cordes jusqu'à ce qu'elles se touchent au point V où vous planterez un jallon; ensuite tendez-les de l'autre côté de la ligne jusqu'à ce qu'elles se touchent au point S, où vous planterez un autre jallon; après quoi du point V au point S vous tirerez la ligne droite VS, qui coupera en deux parties égales la ligne AB au point O.

Si vous voulez couper la ligne AB en quatre parties égales, coupez-la d'abord en deux également au point O, comme on vient d'enseigner; puis coupez chaque partie AO, OB en deux également aux points R, T, & toute la ligne sera coupée en quatre parties égales, que l'on pourroit encore couper chacune en deux parties égales, si l'on vouloit diviser la ligne en 8 parties, & ainsi de suite pour un plus grand nombre de divisions en nombre pairement pair. Nous dirons dans la suite comment on peut couper une ligne en tel nombre de parties égales que l'on voudra. Voyez (*n.* 263.) & *partie* 2, *n.* 14.

## SECTION III.

### *Des proprietez des lignes paralleles.*

### DEFINITION XXIV.

61. Deux ou plusieurs lignes AB, CD, EF, qui sont toujours à égale distance entr'elles sans s'approcher, ni s'écarter jamais les unes des autres, s'appellent *paralleles*. (Fig. 19.)

### PROBLEME VI.

62. *D'un point donné C hors d'une ligne AB tirer une ligne CD parallele à cette ligne.* (Fig. 20.)

Du point C abbaissez une perpendiculaire CH sur la ligne AB; prenez sur AB un point R, duquel vous éleverez une perpendiculaire RS; faites RS égal à CH, & du point C par le point S tirez la ligne CD, qui sera la parallele demandée.

### DEMONSTRATION.

La perpendiculaire CH est la distance du point C à la ligne

AB; de même la perpendiculaire SR est la distance du point S à la même ligne AB. Or ces deux perpendiculaires sont égales; donc les points C, S sont également distans de la ligne AB; & par conséquent tous les points de la ligne droite CD en sont aussi également éloignez. Donc CD est parallele à AB.

Sur le terrain on fera avec des cordes & des jallons ce que nous venons d'enseigner avec la regle & le compas.

## COROLLAIRE I.

63. Il suit delà que *toutes les perpendiculaires qu'on peut tirer entre deux lignes paralleles sont égales entr'elles*, puisqu'elles sont la mesure de la distance de ces deux lignes.

## COROLLAIRE II.

64. *Si une ligne CH est perpendiculaire sur l'une des paralleles AB; elle sera aussi perpendiculaire sur l'autre parallele CD.* Prolongez la ligne CH en O, & faites CO égal à CP. Si HC n'est pas perpendiculaire sur CD, la ligne CD ne sera pas perpendiculaire sur CH; donc tous les points de CD ne seront pas également distans de O & de P; donc si CD incline vers P, elle s'approchera de AB du côté de B, & s'en éloignera du côté de A, & si elle incline vers O, elle s'éloignera de AB du côté de B, & s'en approchera du côté de A: donc dans l'un & dans l'autre cas elle ne sera pas parallele à AB, ce qui est contre la supposition. Donc CD est nécessairement perpendiculaire sur CH, & par conséquent CH l'est aussi sur CD.

## COROLLAIRE III.

65. *Toutes les perpendiculaires tirées entre deux paralleles, sont aussi paralleles entr'elles.* Elles sont toutes perpendiculaires sur une même ligne; donc elles ne se rencontreront jamais. (*n.* 58.)

## COROLLAIRE IV.

66. *Les parties CS, HR des paralleles, comprises entre les perpendiculaires CH, SR sont égales entr'elles;* puisqu'elles sont perpendiculaires sur les lignes CH, SR, qui sont paralleles par le Corollaire précédent.

## COROLLAIRE V.

67. *Deux lignes paralleles CD, EF étant données,* (Fig. 19.) *si l'on tire*

*une troisiéme ligne AB parallele à l'une des deux CD, elle sera aussi parallele à l'autre EF.* Si l'on tire la perpendiculaire PQ entre les deux paralleles AB, CD, & qu'on la prolonge jusqu'au point R de la ligne EF, le prolongement QR sera encore perpendiculaire sur CD (*n.* 43.) & comme CD, EF sont paralleles, le prolongement étant perpendiculaire sur CD, sera aussi perpendiculaire sur EF. (*n.* 64.) Donc la ligne entiere PR sera perpendiculaire sur AB, & sur EF; & par conséquent les deux lignes AB, EF étant perpendiculaires sur PR, ne s'approcheront jamais, & seront paralleles.

## COROLLAIRE VI.

68. *D'un point C hors d'une ligne AB*, (Fig. 20.) *on ne peut tirer qu'une seule parallele CD à la ligne AB.* Toute autre ligne prendra sa direction ou au-dessus de CD, ou en-dessous; & par conséquent elle s'éloignera ou s'approchera de AB, & ne lui sera pas parallele.

## PROBLEME VII.

69. *Une ligne oblique AB entre deux paralleles EF, GH, étant donnée* (Fig. 21.) *tirer d'un point C pris sur la ligne EF une autre oblique également inclinée entre ces deux paralleles.*

De l'extrêmité A où l'oblique AB coupe EF, abbaissez une perpendiculaire AP sur la parallele GH; & du point C abbaissez en un autre CQ, prenez avec le compas la distance BP de l'oblique AB à la perpendiculaire AP, & transportez-la de Q en D, où vous tirerez l'oblique CD, qui sera aussi inclinée que l'oblique AB.

## DEMONSTRATION.

Les perpendiculaires AP, CQ, étant entre deux paralleles, sont égales; les distances BP, DQ le sont aussi par la construction: donc si l'on conçoit que la figure CDQ soit transportée sur la figure ABP, la perpendiculaire CQ tombera sur la perpendiculaire AP, la distance DQ sur la distance BP, & par conséquent l'oblique DC tombera sur BA, puisque DC étant une ligne droite de même que BA, ces deux lignes doivent prendre le même chemin entre les points B, A. Donc DC, BA seront également inclinées.

COROL-

### COROLLAIRE I.

70. *Les également inclinées AB, CD entre deux paralleles, ſont égales*, la figure CDQ étant tranſportée ſur la figure ABP, l'oblique CD tombe totalement ſur AB, & ſe trouve renfermée entre les mêmes termes. Donc, &c.

### COROLLAIRE II.

71. *Les parties AC, BD des paralleles compriſes entre les également inclinées AB, CD, ſont égales entr'elles ;* les parties AC, PQ, compriſes entre les perpendiculaires AP, CQ, ſont égales, (*n.* 66.) & les diſtances BP, DQ, le ſont auſſi par la conſtruction. Donc ſi de PQ on retranche la partie DQ, & qu'on lui donne BP égale à DQ, la ligne BD ſera égale à la ligne PQ, & par conſéquent à la ligne AC, qui eſt égale à PQ.

### COROLLAIRE III.

72. *Les lignes AB, CD, également inclinées entre deux paralleles MN, OP, ſont paralleles entr'elles.* (Fig. 22.) Si elles ne l'étoient pas, elles ſe rencontreroient néceſſairement en quelque point, comme R, & de ce point abbaiſſant une perpendiculaire RS ſur la parallele OP, l'oblique RB ſe trouveroit plus éloignée de la perpendiculaire que l'oblique RD, donc elle ſeroit plus inclinée, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

## SECTION IV.

### *Des proprietez de la ligne circulaire.*

### DEFINITION XXV.

73. La ligne circulaire eſt une ligne courbe ABCD (*Fig.* 23.) qui renferme un eſpace au milieu duquel eſt un point O, également éloigné de tous les points de la ligne circulaire.

### DEFINITION XXVI.

74. L'eſpace renfermé par la ligne circulaire, s'appelle *cercle ;* le point O en eſt *le centre ;* les lignes OB, OD, OC, tirées du centre à la ligne circulaire, ſe nomment *rayons ;* & ces rayons ſont tous égaux entr'eux, parce qu'ils ſont la meſure de la diſtance du centre à la ligne circulaire. Toute ligne droite qui paſſant par le centre, va aboutir de part & d'autre à la ligne circulaire,

s'appelle *diametre*, & eſt double du rayon. La ligne circulaire ſe nomme *circonference* du cercle; toute ligne droite RS, qui ſans paſſer par le centre, coupe la circonférence en deux points R, S, s'appelle *corde*. Enfin la ligne droite qui touche le cercle ſans le couper, s'appelle *tangente*, & celle qui le coupe, ſe nomme *ſécante*.

## DEFINITION XXVII.

75. Les cercles ABCD, EFGH, qui ont un même centre O, (*Fig.* 24.) s'appellent *concentriques*, & les cercles ABCD, AFGH, qui ont des centres différens O & P, ſe nomment *excentriques*. (Fig. 25.)

On conſidere le cercle comme étant décrit par une ligne droite OC (*Figure* 23.) laquelle ayant ſon extrêmité O fixe au point O, tourneroit autour de ce point, juſqu'à ce que ſon autre extrêmité C, fût revenuë au point C, d'où elle ſeroit partie.

## PROBLEME VIII.

76. *D'un point O pris pour centre, & de l'intervalle OC décrire un cercle.* (Fig. 23.)

Mettez l'une des pointes du compas ſur le point O, & ouvrant l'autre de la grandeur de la ligne OC, faites-la tourner autour de O, juſqu'à ce qu'elle revienne au point C, d'où elle eſt partie, & la ligne CBAD, qu'elle décrira, ſera une circonference de cercle.

## DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit qu'entre les deux pointes du compas il y ait un fil tendu, ce fil tiendra lieu d'une ligne OC, qui demeurant immobile au point O par l'une de ſes extrêmitez, tourneroit autour de ce point; & comme cette ligne pendant ſon mouvement, ſeroit toujours d'égale grandeur, il eſt évident que tous les points de la ligne courbe CBAD qu'elle décriroit, ſeroient également diſtans du point O; donc cette ligne courbe ſeroit une circonference de cercle. Or qu'il y ait un fil tendu entre les deux pointes, ou qu'il n'y en ait pas, leur diſtance eſt toujours la même; donc la ligne décrite par la pointe C, eſt auſſi une circonference de cercle.

Sur le terrain on plantera un clou ou un jallon au centre O, on y attachera par un bout une corde de la longueur de OC, puis tenant toujours la corde tenduë par l'autre bout, on tournera au-

tour du point O, & la courbe que ce bout décrira, sera une circonference de cercle.

### COROLLAIRE I.

77. Il suit de-là que *deux circonferences concentriques ABCD ; EFGH* (Fig. 24.) *ne se coupent point, & sont toujours à égale distance entr'elles ;* la distance de la circonference ABCD au centre O, étant toujours égale au rayon OA, & celle de la circonference EFGH au même centre, étant toujours égale au rayon OE, la différence EA de ces deux rayons est toujours la distance des deux circonferences entr'elles.

### COROLLAIRE II.

78. *Deux circonferences excentriques ABCD, AFGH,* (Fig. 25.) *ne se touchent qu'en un seul point A ;* si elles se touchoient en un autre point, comme R, tirant de ce point les lignes RP, RO, aux centres P, O, la ligne RP seroit égale à la ligne PA, puisqu'elles seroient toutes deux rayons du même cercle AFGH, & ajoûtant à ces deux lignes égales la partie PO, la ligne OPA seroit égale à la ligne OPR. De même la ligne RO étant égale à la ligne OPA, parce qu'elles sont toutes deux rayons du même cercle ABCD, la ligne RO seroit égale à la ligne OPR, égale à la ligne OPA, ce qui est impossible, car la ligne RO étant droite entre ses extrêmitez R, O, la ligne OPR, qui ne prend pas le même chemin, doit être plus longue. Donc la ligne OPR doit être nécessairement plus grande que la ligne OPA ; mais ces deux lignes ont une partie commune OP ; donc RP est plus grand que PA ; Or PA est rayon du cercle AFGH : donc RP est plus grand que ce rayon, & par conséquent son extrêmité R doit être hors de la circonference AFGH ; d'où il suit que les deux circonferences excentriques ABCD, AFGH, qui se touchent au point A, ne sçauroient se toucher en un autre point R.

### COROLLAIRE. III.

79. *Si l'on fait passer une ligne droite OP par les centres O, P de deux circonferences excentriques ABCD, AFGH,* (Fig. 25.) *qui se touchent en un point A, cette ligne étant prolongée passera par le point A d'attouchement ;* si elle passoit par quelqu'autre point R, les lignes PA, PR, seroient égales, ce qui est impossible par le Corollaire précedent.

### COROLLAIRE IV.

80. *Si deux cercles ABCD, AEFG* (Fig. 27.) *se touchent en dehors en un point A sans se couper, la ligne droite OP, qui joint leurs centres, passe par le point d'attouchement A.* Si elle passoit par quelqu'autre point différent de A, comme le point S, les lignes OM, OA, étant rayons du même cercle, seroient égales entr'elles; par la même raison les lignes PA, PN, seroient égales; ainsi ajoûtant à la ligne OM la partie MS, & à la ligne PN la partie NS, les deux lignes OS, SP, prises ensemble, seroient plus grandes que les deux lignes OA, AP, prises ensemble, ce qui n'est pas possible, puisqu'on suppose que la ligne OSP est droite, & que la ligne droite doit être la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer entre ses extrêmitez.

### COROLLAIRE V.

81. Deux cercles qui se touchent en-dehors sans se couper; ne se touchent qu'en un seul point; s'ils se touchoient en deux points A, S, les deux lignes OP, OSP, qui passeroient par les centres, & par les points d'attouchement AS, seroient droites par le Corollaire précedent, donc d'un point O à un autre point P, on pourroit tirer deux lignes droites, ce qui est impossible. (*n.* 36.)

### PROBLEME IX.

82. *Une corde AB étant donnée dans un cercle ABC, couper cette corde en deux également par une ligne droite OD, tirée du centre O.* (Fig. 26.)

Du centre O abbaissez la perpendiculaire OD sur la corde AB, & le point D divisera la corde en deux parties égales AD, DB.

### DEMONSTRATION.

Du centre O tirez aux extrêmitez A, B, de la corde les lignes OA, OB, ces lignes seront égales, étant rayons d'un même cercle; donc le point O sera également distant des extrêmitez A, B; or la ligne OD est perpendiculaire sur AB par la construction; donc tous ses points sont aussi également éloignez des points A, B, & par conséquent le point D coupe AB en deux parties égales.

### COROLLAIRE I.

83. *Si une ligne DO perpendiculaire sur une corde AB, la coupe en deux parties égales, elle passe par le centre O*, elle passe par tous les points qui sont également éloignez des extrêmitez A, B, de la ligne AB; donc elle passe par le centre.

### COROLLAIRE II.

84. Si l'on prolonge la perpendiculaire CD jusqu'à la circonférence du cercle, le point F où elle rencontrera la circonférence sera encore également distant des extrêmitez A, B de la corde AB; & comme ces mêmes points A, B, terminent aussi l'arc AFB, soutenu par la corde, il s'ensuit que l'arc AFB est divisé de même en deux parties égales au point F par la perpendiculaire OF, & réciproquement si l'arc AFB est divisé en deux parties égales, la perpendiculaire OF divise la corde AB en deux parties égales au point D.

### COROLLAIRE III.

85. De toutes les obliques qu'on peut tirer sur la corde AB, les plus grandes sont les rayons AO, OB, puisqu'elles sont les plus éloignées de la perpendiculaire OD; donc toutes les autres obliques qu'on pourroit tirer entre les points D, B, & les points D, A, seroient plus courtes que le rayon; donc elles n'atteindroient pas la circonférence, & par conséquent une ligne droite AB, tirée d'un point A de la circonférence à un autre point B, est toute entiere en-dedans du cercle.

### PROBLEME X.

86. *Un cercle ABCD étant donné* (Fig. 28.) *en trouver le centre.* D'un point quelconque A de la circonférence à un autre point quelconque C de la même circonférence, tirez une ligne droite AC, coupez-la en deux parties égales par une perpendiculaire DB, que vous prolongerez de part & d'autre jusqu'à la circonférence, coupez la ligne DB en deux parties égales au point O, qui sera le centre du cercle.

### DEMONSTRATION.

La ligne DB coupant la corde AC en deux parties égales, & lui étant perpendiculaire, passe par conséquent par le centre

(*n.* 83.) donc elle eſt diametre du cercle. Or le diametre eſt double du rayon (*n.* 74.), partageant donc le diametre DB en deux parties égales les lignes OB, OD, ſeront des rayons du cercle, & le point O en ſera le centre.

### COROLLAIRE I.

87. Une portion de cercle ACR étant donnée, ſi l'on veut trouver la circonference entiere & ſon centre, on prendra trois points A,C,R, ſur cette portion; on les joindra par les lignes droites AC, CR, que l'on diviſera chacune en deux parties égales par les perpendiculaires BO, HO, & prenant le point d'interſection O de ces deux perpendiculaires pour le centre du cercle, on achevera aiſément de décrire le reſte de la circonference, en mettant l'une des pointes du compas ſur le point O, & portant l'autre ſur l'un des points A, C, R, la démonſtration de ceci eſt évidente par ce Problême & par le précedent. Car la perpendiculaire BO coupant la corde AC en deux parties égales, paſſera par le centre; par la même raiſon la perpendiculaire HO, paſſera auſſi par le centre, & par conſéquent le centre doit ſe trouver au point O, qui eſt l'unique point où ces deux perpendiculaires ſe coupent.

### COROLLAIRE II.

88. Trois points A, C, R, qui ne ſont point en ligne droite, étant donnez, ſi l'on veut faire paſſer une circonference de cercle par ces trois points, on les joindra par les lignes AC, CR, que l'on coupera chacune en deux parties égales par les perpendiculaires BO, HO, & le point d'interſection O, ſera le centre d'un cercle, dont la circonference paſſera par les trois points donnez; car tirant les lignes AO, OC du point O aux extrêmitez A, C, de la ligne AC, il eſt évident que ces deux lignes ſeront égales, puiſque la perpendiculaire BO, a tous ſes points également diſtans des points A, C; par la même raiſon ſi l'on tire la ligne OR, elle ſera égale à la ligne OC, & par conſéquent à la ligne AO, égale à la ligne AC; donc les trois lignes OA, OC, OR, ſeront égales, & pourront être priſes pour les rayons d'un même cercle, dont le centre eſt le point O.

### PROBLEME XI.

89. *Par un point B ſur une circonference ABCD* (Fig. 29) *tirer une tangente BE au cercle.*

Du centre O au point B, tirez le rayon OB, que vous prolongerez à volonté vers C; ensuite du point B élevez sur OBC la perpendiculaire BE, qui sera la tangente cherchée.

## DEMONSTRATION.

Ayant prolongé la ligne BE de l'autre côté de CO vers F, la ligne entiere EF sera perpendiculaire sur CO; & par conséquent CO, ou BO, sera perpendiculaire sur EF. Donc le rayon OB sera la plus courte ligne qu'on puisse tirer sur la ligne EF; ainsi toutes les lignes, comme OQ, OS, qu'on pourroit tirer sur EF, étant plus longues que le rayon OB, rencontreront la ligne EF hors de la circonference; & par conséquent cette ligne EF, touche le cercle au point B, & ne le coupe pas.

On peut se passer de prolonger le rayon OB vers C, & je ne l'ai dit ici que parce que je n'ai point encore enseigné comment on doit élever une perpendiculaire BE à l'extrêmité d'une ligne O, cette pratique dépendant d'autres principes, qui seront expliquez en leur lieu.

## COROLLAIAE I.

90. Il suit de-là que la tangente BE, ou FE, ne touche le cercle qu'en un seul point B.

## COROLLRIRE II.

91. *D'un point B pris sur une circonference, on ne peut mener qu'une seule tangente BE.* La droite BE étant perpendiculaire sur le rayon BO, toute autre ligne, comme BR, sera oblique, & par conséquent le rayon BO sera aussi oblique sur BR; donc du point O abbaissant une perpendiculaire OV sur BR, cette perpendiculaire sera plus courte que le rayon; ainsi elle atteindra la ligne BR, avant d'atteindre la circonference, & par conséquent BR, tombera dans le cercle, & ne sera pas tangente.

## COROLLAIRE III.

92. *Entre la circonference d'un cercle & la tangente BR, on ne peut faire passer aucune ligne droite.* La ligne qui y passeroit, seroit aussi tangente au même point, ce qui est impossible, comme on vient de voir.

### COROLLAIRE IV.

93. *On peut cependant faire passer entre la tangente & la circonference tant d'autres circonferences que l'on voudra.* (Fig. 30.) Si l'on marque sur le rayon AC, prolongé même du côté de C, en cas de besoin, autant de point R, S, &c. qu'on le jugera à propos, & qu'on prenne ces points pour autant de centres de cercles différens, dont les rayons seront les distances RE, SE, &c. ces cercles PQEO, VXE, &c. passeront entre la circonference & la tangente, qui les touchera tous au même point, étant toujours perpendiculaire sur leurs rayons.

### REMARQUE.

94. Ce que nous venons de voir dans les deux Corollaires précedent, a jetté quelques Géometres dans l'admiration. Comment se peut-il faire, ont-ils dit, qu'une ligne droite ne puisse passer par un espace où l'on peut faire passer une infinité de circonferences? En effet, cela paroit d'abord merveilleux; mais pour peu qu'on y regarde de près, on n'y voit rien que de très-simple & de très-naturel, comme nous le montrerons ailleurs.

### PROBLEME XII.

95. *Deux ou plusieurs lignes droites AB, CD non paralleles, étant tirées dans un cercle ABCD, tirer dans le même cercle, ou dans un cercle égal, autant d'autres lignes qui leur soient égales chacune à chacune, & qui soient paralleles entr'elles.* (Fig. 31.)

Du centre O tirez les perpendiculaires OP, OQ, sur les lignes AB, CD, prenez avec le compas la grandeur de la plus petite OQ, & transportez-la sur OP, depuis le centre O jusqu'en R, où vous éleverez sur OP la perpendiculaire ERF, & vous aurez les deux lignes AB, EF, qui seront égales aux deux AB, CD, & qui seront paralleles entr'elles.

### DEMONSTRATION.

Du centre O tirez les lignes OE, OC aux extrêmitez E, C, des lignes EF, CD. Les lignes OR, OQ, étant perpendiculaires sur les lignes ER, CQ, les rayons OE, OC, sont par conséquent obliques sur les mêmes lignes ER, CQ; & comme ces rayons

rayons sont égaux entr'eux, & que les perpendiculaires OR, OQ, sont aussi égales par la construction, il faut nécessairement que les obliques OE, OC tombent chacune à égale distance de leur perpendiculaire OR, OQ; autrement l'une seroit plus grande que l'autre. (*n.* 51.) Donc ER est égal à CQ. Or ER est la moitié de EF, à cause de la perpendiculaire OR, qui coupe EF en deux également; (*n.* 82.) & par la même raison CQ est la moitié de CD: donc EF, CD sont égales, & par conséquent les deux lignes AB, EF, sont égales aux deux AB, CD, ce qui est la premiere chose qu'il falloit démontrer.

Les lignes AB, EF, sont toutes deux perpendiculaires sur la même ligne par la construction; donc elles sont paralleles entr'elles, puisqu'elles ne se rencontreront jamais, (*n.* 58.) ce qui restoit à démontrer.

S'il faut operer sur un autre cercle *abfe*, (*Fig.* 32.) égal au cercle ABFE, (*Fig.* 31.) on tirera du centre *o* de ce second cercle un rayon *oz*, sur lequel on transportera les distances *op*, *or*, égales aux distances des lignes proposées AB, CD, & aux points *p*, *r*, on élevera les perpendiculaires *ab*, *ef*, qui seront égales aux proposées AB, CD, & qui seront paralleles entr'elles.

### DEMONSTRATION.

Si l'on transporte le cercle *abef* sur le cercle ABEF, en sorte que le rayon *oz* tombe sur le rayon OZ qui lui est égal, les deux circonferences tomberont totalement l'une sur l'autre, la distance *op* sur la distance OP, la distance *or* sur la distance OR, & par conséquent la perpendiculaire *ab* sur la perpendiculaire AB, & la perpendiculaire *ef* sur la perpendiculaire EF, de sorte que tout conviendra & sera parfaitement égal; or les lignes AB, EF, sont égales aux lignes AB, CD, par la démonstration précedente, donc les lignes *ab*, *ef*, égales aux lignes AB, EF, sont aussi égales aux lignes AB, CD.

### COROLLAIRE I.

96. Les perpendiculaires OR, OQ, étant égales, les cordes EF, CD, le sont aussi; or les perpendiculaires OR, OQ, sont la mesure de la distance des cordes EF, CD au centre; donc *les cordes également éloignées du centre, sont égales.*

## COROLLAIRE II.

97. *Les cordes égales EF, CD, sont également éloignées du centre.* Si elles ne l'étoient pas, mettant la figure ERO sur la figure COQ, l'une des lignes RO, OQ, qui marquent les distances des cordes au centre, seroit plus grande que l'autre; & par conséquent l'une des obliques EO, CO, s'éloigneroit plus de la perpendiculaire que l'autre, & seroit plus grande, ce qui est impossible, puisque ces obliques sont toutes deux rayons d'un même cercle.

## PROBLEME XIII.

98. *De toutes les lignes droites qu'on peut tirer dans un cercle, trouver qu'elles sont les plus grandes & les moindres, & quels sont les plus grands & les moindres arcs qu'elles soutiennent.* (Fig. 33.)

Quelque nombre de lignes qu'on puisse tirer dans un cercle, on peut toujours en tirer un même nombre d'autres qui leur soient égales, & qui soient paralleles entr'elles, comme on a vû au Problême précedent; ainsi ce qu'on dira des paralleles, peut s'appliquer à celles qui ne le sont pas.

Tirez donc le diametre AB, aux extrêmitez duquel vous menerez les tangentes AT, BX, lesquelles étant perpendiculaires au diametre (*n.* 89.) seront paralleles entr'elles (*n.* 58.); tirez ensuite entre ces deux tangentes d'autres lignes SV, TX, qui leur soient perpendiculaires, & qui coupent le cercle. Ces lignes seront paralleles & égales au diametre (*n.* 63, 65.) Cela posé.

Je dis en premier lieu, que *le diametre est la plus grande de toutes les lignes qu'on peut tirer dans le cercle;* les tangentes AT, BX, ne touchant le cercle qu'aux seuls points A, B, tous leurs autres points sont par conséquent hors du cercle; donc les extrêmitez S, V, de la ligne SV, sont aussi hors du cercle; mais la ligne SV, est égale au diametre: donc sa partie CD, qui est dans le cercle, est moindre que le diametre; on prouvera de même que la ligne EF, est moindre que le diametre.

En second lieu: *Les lignes les plus proches du diametre, sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées;* la circonference tournant autour du centre, s'éloigne de plus en plus de la tangente, laquelle suit toujours la même direction; donc le point F, qui est plus éloigné du point d'attouchement B, que le point

D est aussi plus éloigné de la tangente BX, que le même point D; & par la même raison le point E est plus éloigné de la tangente AT que le point C; or les lignes DV, FX, étant perpendiculaires à la tangente BX, marquent la distance des points D, F à cette tangente : & de même les lignes SC, TE, marquent la distance des points C, E à la tangente AT; donc la ligne FX est plus grande que la ligne DV, & la ligne TE, plus grande que SC. Si donc de la ligne TX, qui est égale à la ligne SV, on ôte les parties TE, FX, & qu'on ôte à la ligne SV, les parties SC, DV, le reste EF sera plus petit que le reste CD; ainsi la corde CD, moins éloignée du cercle, est plus grande que la corde EF, qui en est plus éloignée.

En troisiéme lieu, *les plus grandes cordes soutiennent les plus grands arcs;* si de l'arc CZD, que la corde CD soutient, on ôte les parties CE, FD, on aura l'arc EZF, que la corde EF soutient, lequel sera par conséquent plus petit que l'arc CZD.

On peut ajoûter à ceci qu'*on peut tirer dans le cercle tant de cordes paralleles & égales deux à deux qu'on voudra; mais qu'on n'en pourra jamais tirer trois qui soient égales, & que ces cordes égales soutiennent des arcs égaux.* Si des extrêmitez C, D, E, F, des cordes CD, EF, on tire les lignes EQ, FH, &c. paralleles aux tangentes, le diametre sera perpendiculaire sur ces lignes, puisqu'il l'est sur les tangentes (*n.* 64.) & il les coupera en deux parties égales, parce qu'il passe par le centre (*n.* 82). Mais LE, NF, étant perpendiculaires entre les paralleles AB, EF, sont égales, donc leurs doubles EQ, FH, sont aussi égales; & par conséquent joignant les extrêmitez Q, H, la droite QH sera parallele & égale à la corde EF, on prouvera de même que les lignes CP, DM, étant égales & paralleles, la corde PM est égale à la corde CD, & ainsi des autres; mais on ne pourra jamais tirer une troisiéme corde égale & parallele aux deux QH, EF, ou aux deux PM, CD, parce que toute autre qu'on voudra tirer, sera plus près ou plus loin du diametre, & sera par conséquent moindre ou plus grande.

Enfin, *les cordes égales soutiennent des arcs égaux;* car si l'on plioit le cercle, ensorte que la demi-circonference AZD tombât sur la demi-circonference AQHB, la ligne NF tomberoit sur son égale NH, & la ligne LE sur son égale LQ; donc l'arc EF tomberoit sur l'arc QH.

*Nota.* Que lorsque nous avons dit qu'on ne peut tirer dans un

cercle des cordes égales que deux à deux, cela ne doit s'entendre que des cordes paralleles; car on en peut tirer une infinité d'égales non paralleles, parce que de tous les points de la circonference on peut tirer des rayons au centre, & prenant sur chacun de ces rayons une distance égale du centre, on peut élever sur eux des perpendiculaires, qui feront autant de cordes égales, étant également éloignées du centre.

### COROLLAIRE I.

99. Comme tout ce que nous venons de dire, à l'exception de la Note précédente, peut s'entendre des cordes non paralleles comme des paralleles, il s'ensuit 1°. que le diametre est la plus grande de toutes les lignes qu'on peut tirer dans le cercle. 2°. Que les autres sont d'autant plus grandes qu'elles approchent plus du diametre ou du centre, & d'autant plus petites qu'elles s'en éloignent davantage, & qu'elles sont égales lorsqu'elles en sont également distantes. 3°. Que les plus grandes soutiennent les plus grands arcs, les moindres les moindres arcs, & les égales les arcs égaux, & réciproquement que les plus grands arcs sont soutenus par les plus grandes cordes, les moindres par les moindres, & les égaux par les égales.

### COROLLAIRE II.

100. *Les arcs CE, FD, compris entre deux cordes paralleles, sont égaux*; car du centre O, tirant la ligne OZ perpendiculaire sur les cordes CD, EF, les arcs CZD, EZF, seront coupez en deux parties égales en Z (*n.* 84.); ainsi l'arc CZ sera égal à l'arc ZD, & l'arc EZ à l'arc ZF; ôtant donc de l'arc CZ l'arc EZ, & de l'arc ZD l'arc ZF, le reste CE sera égal au reste FD.

### PROBLEME XIV.

101. *D'un point donné R hors d'un cercle ABC* (Fig. 34.) *mener une tangente RV au cercle.*

Du point R tirez une droite au centre O; du point O pris pour centre, & de l'intervalle OR, décrivez le cercle SRTVX. Du point H, où la ligne RO coupe le cercle ABC, élevez la perpendiculaire SHT sur RO, jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle SRTVX aux points S, T; prenez la distance des points R, T, & portez-la de T en V; enfin tirez la ligne RV, qui touchera le cercle ABC au point B.

DEMONSTRATION.

La ligne ST étant perpendiculaire sur l'extrêmité H du rayon OH, est par conséquent tangente du cercle ABC (*n.* 99); cette même ligne ST, étant droite, & coupant le cercle SRTVX en deux points, est toute dans ce cercle (*n.* 85.). Donc la ligne RO, qui lui est perpendiculaire, & qui passe par le centre O, la coupe en deux parties égales SH, HT (*n.* 82.); d'où il suit que l'arc SRT, est aussi coupé en deux parties égales SR, RT (*n.* 84.); mais l'arc TV ayant été fait égal à l'arc RT, l'arc entier RV, est égal à l'arc entier ST; donc les cordes ST, RV, qui soutiennent ces arcs, sont aussi égales (*n.* 99.), & sont également éloignées du centre O. Or l'arc RV, étant divisé en deux parties égales au point T, la ligne OT, qui passe par le centre; divise aussi la corde en deux parties égales au point B (*n.* 84.), & lui est perpendiculaire (*n.* 82.); ainsi la ligne OB est la distance du centre O à la corde RV, de même que la ligne OH est la distance du même centre O à la corde ST, & comme nous venons de voir que ces distances sont égales, il s'ensuit qu'elles sont toutes deux rayons du cercle ABC, & par conséquent la corde ABC, qui est perpendiculaire à l'extrêmité du rayon OB, touche le cercle ABC au point B.

Nous donnerons plus bas un moyen plus facile de résoudre ce Problême. Voyez (*n.* 156.)

COROLLAIRE I.

102. Si l'on fait l'arc SX égal à l'arc SR, & qu'on tire la corde RX, on prouvera de même que cette corde est égale à la corde ST, & par conséquent à la corde RV; qu'elle touche le cercle ABC au point A, & qu'elle est divisée en deux parties égales par le point A d'attouchement; d'où il suit que *d'un point R, hors d'un cercle ABC, on peut tirer deux tangentes égales RA RB à ce cercle.*

COROLLAIRE II.

103. Il est visible que toute autre ligne qu'on tirera du point R, tombera ou entre les deux tangentes RA, RB, & coupera par conséquent le cercle, ou en-delà de ces deux tangentes, & en ce cas elle ne le touchera point; donc *d'un point A hors du cercle, on ne peut mener que deux tangentes au cercle.*

### COROLLAIRE III.

104. *Si d'un point R hors d'un cercle ABC, on tire deux tangentes RA, RB, la ligne RO tirée du point R au centre O du cercle, coupera en deux parties égales l'arc AHB, compris entre les deux tangentes ;* le point R eſt également diſtant des extrêmitez A, B de l'arc, puiſque les tangentes RA, RB, ſont égales, & le centre O eſt eſt auſſi également diſtant des mêmes extrêmitez A, B ; donc la ligne RO ayant deux points également diſtans de A & B, a tous ſes autres points auſſi également diſtans, & par conſéquent le point H coupe l'arc AHB en deux parties égales.

### PROBLEME XV.

105. *Diviſer un arc de cercle ABC en deux parties égales, ou en un nombre de parties pairement pair, c'eſt-à-dire, toujours diviſible par 4, comme en 4, 8, 16, 32 parties, &c.* (Fig. 35.)

Tirez la corde AC, qui joint les extrêmitez de l'arc ABC ; du centre O abbaiſſez une perpendiculaire ſur cette corde, & prolongez-la juſqu'à ce qu'elle coupe l'arc au point B, & le point B diviſera cet arc en deux parties égales ; ce qui eſt évident (*par n.* 84.)

Que ſi vous voulez diviſer l'arc en quatre parties égales, diviſez-le d'abord en deux parties au point B, puis tirez les cordes AB, BC, que vous diviſerez de même en deux parties égales par les lignes OE, OF, qui couperont les arcs AB, BC en deux également aux points EF, & l'arc entier ABC ſera diviſé en quatre parties égales. On feroit la même choſe, ſi on vouloit le couper en 8, 16 parties, &c.

### REMARQUE.

106. On n'a pû trouver juſqu'ici de moyens de diviſer un arc en trois parties égales, ou en nombre impair, comme 5, 7, &c. par la ſeule regle & le compas. Il faut employer pour cela les Sections coniques, & une Géometrie plus élevée que la Géometrie ordinaire ; mais comme la pratique n'en eſt pas trop facile, le plus court eſt de faire ces ſortes de diviſions en ouvrant le compas de différentes façons, juſqu'à ce qu'on trouve une ouverture, qui étant portée trois fois ſur l'arc, le meſure exactement.

## PROBLEME XVI.

107. *Un point A étant donné hors d'un cercle ECD, trouver quelles sont les plus grandes, & les moindres lignes qu'on peut tirer sur la circonference convexe ou exterieure du cercle, & combien on en peut tirer d'égales entr'elles.* (Fig. 36.)

Du point A tirez d'abord au centre O la ligne droite AO, puis menez les deux tangentes AB, AC, l'arc BC sera diviſé en deux parties égales au point E (*n.* 105.); diviſez chacun des arcs égaux BE, EC en un certain nombre de parties égales, comme en trois aux points H, D, F, G, où vous tirerez les lignes droites AH, AD, AF, AG; enfin des points H, D, F, G, tirez au centre O les droites HO, DO, FO, GO.

Cela poſé, je dis en premier lieu que *la ligne AE, dont le prolongement paſſe par le centre, eſt la plus courte de toutes les lignes qu'on peut tirer du point A ſur la circonference convexe du cercle.* La ligne AO étant droite, eſt plus courte que les deux AF, FO priſes enſemble; or la ligne EO eſt égale à la ligne FO, l'une & l'autre étant rayons d'un même cercle. Donc ſi l'on ôte de la ligne AO la ligne EO, & des deux AF, FO, la ligne FO, le reſte AE ſera plus petit que le reſte AF; on prouvera de la même maniere que la ligne AE eſt plus petite que chacune des lignes AG, AC, AD, &c.

En ſecond lieu, *de toutes les lignes qu'on peut tirer du point A ſur la circonference convexe du cercle, les plus petites, après la ligne AE, ſont celles qui approchent le plus de la ligne AE, & les plus grandes celles qui en approchent le moins;* les deux lignes AF, FO, s'écartant moins de la ligne droite AO, que les lignes AG, GO, ſont auſſi néceſſairement plus courtes: or les lignes FO, GO ſont égales, étant rayons d'un même cercle; donc ſi on retranche des deux AF, FO, la ligne FO, & des deux AG, GO, la ligne GO, le reſte AF ſera plus petit que le reſte AG; on prouvera de même que la ligne AG eſt plus petite que la ligne AC, &c.

En troiſiéme lieu, *du point A on peut tirer ſur la circonference convexe du cercle tant de lignes égales deux à deux que l'on voudra; mais on n'en tirera jamais trois qui ſoient égales.* Les deux lignes AD, AF étant également éloignées de la droite AO, ſi on tire la corde DF, cette corde ſera coupée en deux également par la ligne AO, qui lui ſera perpendiculaire, parce qu'elle paſſe par le centre; donc l'oblique DA ſera égale à l'oblique AF. Par la même

raiſon la ligne AH, ſera égale à la ligne AG, la ligne AB à la ligne AC; & comme les deux arcs BE, EC, contiennent une infinité de points auſquels on peut tirer des lignes du point A, on pourra toujours en tirer tant d'égales deux à deux que l'on voudra; mais on n'en tirera jamais trois qui ſoient égales, parce que la troiſiéme qu'on voudroit tirer égale à l'une des deux AD, AF, tomberoit ou plus près de la ligne AE, & ſeroit plus courte, ou plus loin, & alors elle ſeroit plus longue.

### COROLLAIRE I.

108. *Les deux tangentes AB, AC, ſont les deux plus grandes lignes qu'on puiſſe tirer d'un point A hors du cercle ſur la circonference convexe de ce cercle.* Si on en vouloit tirer de plus grandes, il faudroit qu'elles tombaſſent plus loin du point E que les tangentes; & par conſéquent elles tomberoient hors de la circonference ſans la couper ni la toucher.

### COROLLAIRE II.

109. *Les cordes BC, HG, DF, qui joignent les extrêmitez des lignes égales tirées du point A ſur la circonference convexe du cercle, ſont paralleles entr'elles;* la ligne AO eſt perpendiculaire ſur chacune d'elles, & réciproquement elles ſont perpendiculaires ſur AO; donc elles ſont paralleles entr'elles.

### COROLLAIRE III.

110. *Deux cercles ABC, DBC* (Fig. 37.) *qui ſe coupent, ne peuvent ſe couper qu'en deux points B, C;* S'ils ſe coupoient encore en un troiſiéme E, les trois lignes OB, OC, OE, tirées du centre O aux points d'interſection B, C, E, ſeroient égales, puiſqu'elles ſeroient rayons du cercle ABC, & comme le centre O eſt exterieur au cercle DBC, il s'enſuivroit que d'un point O hors d'un cercle DBC, on pourroit tirer trois lignes égales ſur la circonference convexe de ce cercle; ce qui eſt impoſſible.

### COROLLAIRE IV.

111. *Si l'on joint par une ligne droite BC les points B, C, par où deux cercles ABC, DBC ſe coupent, la ligne droite OP, qui joint les deux centres, coupera la ligne BC en deux parties égales, & lui ſera perpendiculaire.* Le point O eſt également éloigné des extrêmitez B, C de la ligne BC, les lignes OB, OC étant rayons du même

cercle

cercle ABC, & le point P eſt auſſi également éloigné des mêmes extrêmitez, les lignes PB, PC étant rayons du même cercle DBC; donc la ligne OP ayant deux de ſes points également éloignez des points B, C, eſt par conſéquent perpendiculaire ſur BC; & la coupe en deux également, &c.

## PROBLEME XVII.

112. *Un point A étant donné hors d'un cercle BCHE, trouver quelles ſont les plus grandes & les moindres lignes qu'on peut tirer ſur la circonference concave ou interieure du cercle, & combien on en peut tirer d'égales.* (Fig. 38.)

Tirez d'abord du point A par le centre O, la ligne droite AO juſqu'à ce qu'elle coupe la circonference au point C. Enſuite prenez de part & d'autre du point C un certain nombre d'arcs égaux, comme par exemple trois CF, FS, SH, CR, RD, DB, & du point A tirez les droites AB, AD, AR, &c.

Cela poſé, je dis en premier lieu, que *la plus longue ligne qu'on puiſſe tirer du point A ſur la circonference concave eſt la ligne AC, qui paſſe par le centre;* du centre O tirant la ligne OF à l'extrêmité de la ligne AF, les lignes OC, OF ſeront égales, étant rayons d'un même cercle: ſi donc on ajoûte à chacune d'elles la ligne AO, les deux lignes AO, OC, ſeront égales aux deux AO, OF; mais les deux AO, OF priſes enſemble, ſont plus grandes que la ligne AF qui eſt droite entre les points A, F; donc les lignes AO, OC priſes enſemble ſont auſſi plus grandes que la ligne AF, & par conſéquent AC, qui eſt la ſomme des deux AO, OC, eſt plus grande que AF, on prouvera de même que la ligne AC, eſt plus grande que chacune des lignes AS, AH, &c.

En ſecond lieu *les plus grandes qu'on puiſſe tirer du point A, après la ligne AC, ſont celles qui approchent le plus de la ligne AC, & les plus petites celles qui en approchent le moins.* Tirant de l'extrêmité S, où la ligne AS coupe la circonference concave, la ligne SE au point E, où la ligne AF coupe la circonference convexe, la corde EF ſera plus grande que la corde ES, parce qu'elle eſt plus proche du centre; ſi donc on ajoûte à chacune d'elles la ligne AE on aura les deux AE, EF, c'eſt-à-dire AF plus grande que les deux AE, ES; or les deux AE, ES priſes enſemble, ſont plus grandes que la droite AS; donc la ligne AF eſt à plus forte raiſon plus grande que la ligne AS, & on prouvera de même que AS eſt plus grande que AH, &c.

En troisiéme lieu, *du point A on peut tirer tant de lignes égales deux à deux que l'on voudra; mais on n'en tirera jamais trois qui soient égales.* Les lignes AR, AF étant également éloignées de la ligne AC, si on tire la corde RF, cette corde sera coupée en deux parties égales par la ligne AC, qui lui sera perpendiculaire, parce qu'elle passe par le centre; donc le point A sera également éloigné des extrémitez R, F de la corde; & par conséquent la ligne RA sera égale à la ligne FA. Par la même raison la ligne DA sera égale à la ligne SA, la ligne BA à la ligne HA, & comme du point A on peut tirer une infinité de lignes sur la circonference concave du cercle, on en pourra toujours tirer d'égales deux à deux tant qu'on voudra; mais on n'en tirera jamais trois, parce que la troisiéme qu'on voudroit tirer égale, par exemple, à l'une des deux AR, AF, s'approcheroit ou s'éloigneroit de la ligne AC, & par conséquent deviendroit plus petite ou plus grande que la ligne AR, ou la ligne AF.

### COROLLAIRE.

113. Si après avoir tiré d'un point A hors du cercle plusieurs lignes égales deux à deux sur la circonference concave de ce cercle, on joint par les droites BH, DS, RF, les extrêmitez des lignes égales, ces lignes BH, DS, RF, seront paralleles entr'elles; car on prouvera toujours que la ligne AC est perpendiculaire sur chacune d'elles, & que par conséquent elles sont toutes perpendiculaires sur AC, & paralleles entr'elles.

### PROBLEME XVIII.

114. *Un point C étant donné dans un cercle ABCD, mais hors du centre O* (Fig. 39.) *trouver quelles sont les plus grandes & les moindres lignes qu'on puisse tirer de ce point à la circonference, & combien on en peut tirer d'égales.*

Tirez d'abord du point C par le centre O la ligne BD, qui coupe la circonference; ensuite prenant de part & d'autre du point D autant d'arcs égaux que vous voudrez, comme par exemple deux: tirez les lignes CA, CE, CF, CG, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elles rencontrent la circonference de l'autre coté aux points I, L, H, R.

Cela posé, je dis en premier lieu que *de toutes les lignes qu'on peut tirer du point C sur la circonference la plus grande, est la ligne CD, qui passe par le centre.* Si du centre O on tire la ligne OF, à l'extrêmité

de la ligne voisine CF, les lignes OF, OD, seront égales, étant rayons d'un même cercle; donc ajoûtant à chacune d'elles la ligne CO, les deux CO, OD, c'est-à-dire, la ligne CD sera égale aux deux CO, OF: or les deux CO, OF prises ensemble, sont plus grandes que la droite CF; donc la ligne CD sera aussi plus grande que la ligne CF: on prouvera de même que la ligne CD est plus grande que chacune des lignes CG, CR, &c.

En second lieu, *de toutes les lignes qu'on peut tirer du point A, la plus courte est la ligne CB, qui est le prolongement de la ligne CD, qui passe par le centre.* Du centre O tirant la ligne OH à l'extrêmité de la ligne voisine CH, les lignes OH, OB seront égales, étant rayons d'un même cercle; or les lignes OC, CH prises ensemble, sont plus grandes que la ligne OH; donc elles sont aussi plus grandes que la ligne OB. Si donc on ôte de part & d'autre la ligne commune OC, le reste CB sera plus petit que le reste CH, & on trouvera de la même façon que la ligne CB est plus petite que chacune des lignes CG, CE, &c.

En troisiéme lieu, *de toutes les lignes tirées du point C, les plus grandes, après la ligne CD, qui passe par le centre sont celles qui approchent le plus de la ligne CD, & les moindres celles qui en approchent le moins.* De l'extrêmité de la ligne CG, tirant la ligne GV, qui passe par le centre, cette ligne coupera la ligne voisine CF en un point S, qui sera hors du centre, & la plus grande qu'on pourra tirer de ce point à la circonference, sera la ligne SV, qui passe par le centre, de même que la moindre sera la ligne SG, qui est le prolongement de SV. Donc la ligne SF sera plus grande que la ligne SG, ajoûtant donc de part & d'autre la ligne CS, les deux lignes CS, SF, c'est-à-dire, la ligne CF, sera plus grande que les deux ensemble CS, SG; or les deux CS, SG, sont encore plus grandes que la droite CG: donc à plus forte raison la ligne CF est plus grande que la ligne CG. On prouvera de même que la ligne CG est plus grande que la ligne CR, &c.

En quatriéme lieu, *du point C, on peut tirer à la circonference tant de lignes égales deux à deux que l'on voudra; mais on n'en tirera jamais trois qui soient égales.* Les lignes CE, CF, étant également éloignées de la ligne CD qui passe par le centre; si l'on tire la corde EF, cette corde sera coupée en deux parties égales par la ligne CD, qui lui sera perpendiculaire, parce qu'elle passe par le centre; ainsi le point C sera également éloigné des extrêmitez E, F; & par conséquent les lignes EC, FC seront égales: par la

même raiſon la ligne AC ſera égale à la ligne GC, &c. & comme du point C on peut tirer une infinité de lignes à la circonference, on pourra en tirer d'égales deux à deux tant qu'on voudra, mais on n'en tirera jamais trois qui ſoient égales, parce que la troiſiéme qu'on voudroit tirer égale, par exemple, à l'une des deux EC, FC, s'approcheroit néceſſairement de la ligne CD, on s'en éloigneroit, ce qui la rendroit ou plus grande, ou moindre que la ligne CE ou la ligne CF.

### COROLLAIRE.

115. Si après avoir tiré d'un point hors du centre pluſieurs lignes égales deux à deux à la circonference, on joint par les cordes EF, AG, IR, &c. les extrêmitez des lignes égales, ces cordes ſeront paralleles entr'elles; car la ligne BD ſera perpendiculaire ſur chacune d'elles; d'où il ſuit qu'elles ſeront auſſi perpendiculaires ſur la ligne BD, & par conſéquent paralleles entr'elles.

## SECTION V.

### *Des angles & de leurs proprietez.*

### DEFINITION XXVIII.

116. L'*angle* eſt l'inclinaiſon de deux lignes AB, BC, qui ſe coupent en ſe rencontrant. Le point B de rencontre, s'appelle le *ſommet* de l'angle, & les lignes AB, BC, s'appellent *les jambes* ou *les côtez* de l'angle (*Fig.* 40.).

### DEFINITION XXIX.

117. L'angle conſideré par rapport à l'inclinaiſon des lignes qui le forment, s'appelle *angle droit*, lorſque ſes jambes ſont perpendiculaires l'une ſur l'autre, comme l'angle ABC (*Fig.* 41.); *aigu*, lorſque ſes jambes ſont plus inclinées l'une ſur l'autre que celle de l'angle droit, comme l'angle DBC, & *obtus*, lorſque ſes jambes ſont moins inclinées l'une ſur l'autre que celles de l'angle droit, comme l'angle EBC (*Fig.* 41.).

On exprime quelquefois un angle par la ſeule lettre de ſon ſommet, comme lorſqu'on dit l'angle B (*Fig.* 40.) & quelquefois par trois lettres, dont celle du milieu marque le ſommet, comme lorſqu'on dit l'angle DBC (*Fig.* 41.).

## DEFINITION XXX.

118. L'angle considéré par rapport aux lignes qui le forment, s'appelle *rectiligne* lorsque ses deux jambes sont des lignes droites, *curviligne*, lorsque ses deux jambes sont des lignes courbes, & enfin *mixtilignes*, lorsque l'une de ses jambes est une ligne courbe, & l'autre est une ligne droite. Nous ne parlerons ici que de l'angle rectiligne.

## DEFINITION XXXI.

119. Les jambes AB, BC, d'un angle ABC (*Fig.* 42.) étant prolongées, l'angle DBE fait par leur prolongement, s'appelle *angle opposé au sommet*, & l'angle DBA fait par l'une des jambes AB, & par le prolongement BD de l'autre, s'appelle *angle de suite*, de même que l'angle EBC fait par la jambe BC, & par le prolongement BE de la jambe AB.

## DEFINITION XXXII.

120. Une ligne droite IL qui coupe deux paralleles AB, CD, (*Fig.* 43.) forme avec ces lignes plusieurs angles, parmi lesquels l'angle interieur AEF pris d'un coté en haut, & l'angle interieur DFE pris de l'autre côté en bas, s'appellent *angles alternes*, de même que les deux angles BEF, CFE. Les angles interieurs DFE, BEF pris l'un en haut & l'autre en bas du même côté, s'appellent *angles internes* du même côté.

## DEFINITION XXXIII.

121. Un angle ABC, qui a son sommet au centre B d'un cercle, (*Fig.* 44.) s'appelle *angle au centre*, & l'angle CED, qui a son sommet E à la circonference, s'appelle *angle à la circonference*.

## DEFINITION XXXIV.

122. Une corde AB étant tirée dans un cercle ADBC, (*Fig.* 45.) le cercle se trouve divisé en deux parties, dont la petite ADB s'appelle *le petit segment*, & la grande ACB *le grand segment*; & si à l'une des extrémitez A de la corde, on tire une tangente IL au cercle, cette tangente formera avec la corde deux angles, dont le premier, c'est-à-dire, l'angle IAB, qui est tourné du côté du petit segment, s'appelle *l'angle du petit segment*, & le second, c'est-à-dire, l'angle LAB, qui est tourné du côté du

grand ſegment, s'appelle *l'angle du grand ſegment*. L'angle ADB, qui a ſon ſommet D à la circonference du petit ſegment, & dont les jambes s'appuyent ſur la corde AB, ſe nomme *l'angle dans le petit ſegment*, & l'angle ACB, qui a ſon ſommet C à la circonference du grand ſegment, & qui s'appuye ſur la même corde AB, ſe nomme *l'angle dans le grand ſegment*.

## DEFINITION XXXV.

123. Les Géometres diviſent la circonference du cercle en 360 parties égales, qu'ils appellent *degrez*; chaque degré ſe diviſe en 60 parties, qu'on nomme *minutes*; chaque minute en 60 parties, qu'on nomme *ſecondes*; chaque ſeconde en 60. parties, appellées *tierces*, & ainſi de ſuite en *quartes*, &c.

## REMARQUE.

124. Les nombres 360, & 60, ſont arbitraires, de façon qu'on pouvoit diviſer le cercle en un autre nombre de degrez, & les degrez en un autre nombte de minutes; mais on a choiſi ceux-ci, parce qu'ils ont un plus grand nombre de diviſeurs exacts; car 360 peut ſe diviſer exactement par 2, par 3, 4, 5, 6; 8, 9, 10, 12, 15, 18, &c. & 60 par 2, 3, 4, 5, 6, &c. ce qui ne ſe trouve pas de même dans les autres nombres.

La diviſion de la circonference du cercle en 360 degrez, & des degrez en 60 minutes, ſert pour meſurer les angles, comme on verra au Problême ſuivant.

## PROBLEME XIX.

125. *Un angle étant donné, connoître s'il eſt droit, aigu, ou obtus.* (Fig. 44.)

Ouvrez le compas à diſcretion, & mettant l'une des pointes ſur le ſommet B de l'angle donné, décrivez un cercle ACDEH, prolongeant les jambes de l'angle, s'il eſt néceſſaire, juſqu'à ce qu'elles coupent la circonference du cercle. Cela fait, ſi les jambes de l'angle embraſſent la quart de la circonference, comme celles de l'angle HBC, l'angle ſera droit, ſi elles embraſſent moins du quart de la circonference, comme celles de l'angle ABC, l'angle ſera aigu, & enfin ſi elles embraſſent plus du quart de la circonference, comme celles de l'angle ABE, l'angle ſera obtus.

DEMONSTRATION.

Prolongez l'une des jambes, comme BC, jusqu'à ce qu'elle coupe la circonference en un autre point, comme E, la ligne CE sera droite (*n.* 34.), & comme elle passe par le centre, elle sera un diametre du cercle, & coupera la circonference en deux parties égales; ainsi l'arc EHC vaudra la moitié de la circonference. Or par la supposition l'arc HC, que l'angle HBC embrasse, vaut le quart de la circonference; donc l'angle HBE vaut aussi le quart de circonference; donc le point H est également éloigné des points E, C: or le point B étant le centre du cercle, est aussi également éloigné des points E, C, donc la ligne HB est perpendiculaire sur EC; ainsi l'angle HBC est droit. (*n.* 117.)

En second lieu, puisque l'angle ABC embrasse moins du quart de la circonference, le point A tombe entre le point H & le point C; ainsi le point A est plus éloigné du point E que du point C, donc la ligne AB n'a pas tous ses points également éloignez des points E, C; & par conséquent elle est oblique sur BC, & l'angle ABC est aigu. (*n.* 117.)

Il est aisé de prouver que l'angle ABE est obtus, puisque son ouverture est plus grande que celle de l'angle HBE qui est droit, de même que l'angle HBC; l'un & l'autre embrassant le quart de la circonference.

REMARQUE I.

126. Si l'on veut sçavoir précisément de combien de degrez est un angle, il faut nécessairement ou diviser la circonference du cercle en ses 360 degrez, ou se servir d'un *rapporteur*, autrement dit *demi-cercle*, qui est un instrument de cuivre ou d'argent AIBPC; donc l'espace interieur DEFQ est vuide; la ligne IP est le diametre de la demi-circonference exterieure IBP, & la ligne DF est le diametre de la circonference interieure DEF. Entre la circonference exterieure & l'interieure sont deux autres circonferences RTS, HVZ, & toutes ces circonferences sont divisées en leurs 360 degrez, qui sont marquez de dix en dix, de gauche à droite, entre la seconde & troisiéme circonference, & de droite à gauche entre la troisiéme & la quatriéme. Outre cela, la premiere & seconde circonferences sont divisées entierement en 360 parties. Cela posé, si l'on veut mesurer un angle, on met le diametre interieur du rapporteur le long l'une des

jambes de l'angle ; enſorte que le centre Q tombe ſur le ſommet de l'angle, & ſi l'arc que les deux jambes embraſſent, eſt du côté droit du rapporteur, comme l'arc *a*F, on comptera le nombre de degrez qui ſont écrits entre la circonference interieure & celle qui vient après, lequel nombre eſt ici 40, & l'on dira que l'angle XQZ eſt de 40 degrez ; que ſi l'arc que les deux jambes embraſſent, eſt du côté gauche, comme l'arc *b*D, on comptera le nombre de degrez qui ſont écrits entre la ſeconde & la troiſiéme circonferences, lequel nombre eſt ici 60, & l'on dira que l'angle *d*QI eſt de 60 degrez ; enfin ſi l'arc que les jambes embraſſent, eſt entre quelqu'une des dizaines marquées, comme l'arc *r*D, qui tombe entre 30 & 40 degrez, on ajoûtera aux 30 degrez le nombre des degrez marquez ſur la premiere circonference depuis 30 juſqu'à la ja jambe *r*Q, comme par exemple 5, & l'on dira que l'angle *r*QD, vaut 35 degrez, & ainſi des autres.

## REMARQUE II.

127. La longueur ou la petiteſſe des jambes d'un angle n'augmentent ni ne diminuent rien de cet angle ; car les jambes étant des lignes droites, ſuivent toujours leur même direction, & par conſequent ſoit qu'elles ſoient longues, ſoit qu'elles ſoient courtes, l'inclinaiſon de l'une ſur l'autre, ſera toujours la même ; la grandeur ou la petiteſſe de la circonference dont on ſe ſert pour meſurer la grandeur d'un angle, ne changent rien non plus à ſa valeur : car ſi autour du ſommet B d'un angle ABC (*Fig* 47.), on décrit pluſieurs circonferences d'inégale grandeur ACO, DER, FIS, il eſt viſible que tandis que l'extrêmité du rayon BA décrira la circonference ACO, ſes points D, F, décriront dans le même tems les circonferences DER, FIS, & par conſéquent ſi l'arc AC ne vaut, par exemple, que la ſixiéme ou ſeptiéme partie de ſa circonference, les arcs DE, FI, ne vaudront non plus que la ſixiéme ou ſeptiéme partie de leur circonference.

## COROLLAIRE I.

128. Il ſuit de ce Problême que l'angle droit HBC, ou HBE ; (*Fig.* 44.) vaut 90 degrez, puiſque le quart de 360, qui eſt la valeur de la circonference eſt 90, que l'angle aigu étant moindre que l'angle droit, vaut auſſi moins de 90 degrez, & que l'angle obtus en vaut davantage, puiſqu'il eſt plus grand.

COROL-

### COROLLAIRE II.

129. Le côté BC d'un angle ABC, (*Fig.* 44.) étant prolongé jusqu'à la circonference en E, la ligne CE est un diametre du cercle, & l'arc EHC vaut la moitié de la circonference, donc l'angle ABC & l'angle de suite ABE pris ensemble, valent la demi-circonference, c'est-à-dire deux quarts de circonference ou deux angles droits; d'où il suit *qu'une ligne droite AB, qui tombe sur une autre droite EC, fait avec elle au point B deux angles qui valent ensemble deux angles droits, ou* 180 *degrez.*

### COROLLAIRE III.

130. Par la même raison plusieurs lignes AB, HB, &c. qui tombent sur une autre ligne EC à un même point B, forment avec elle à ce point plusieurs angles EBH, HBA, ABC, &c. qui pris ensemble, valent deux angles droits.

### COROLLAIRE IV.

131. Deux ou plusieurs lignes AB, CB, (*Fig.* 48.) qui tombent sur une ligne E en un même point B, étant prolongées de l'autre côté en R & S, forment avec la ligne EI plusieurs angles EBA, ABC, CBI, IBR, RBS, SBE, qui pris ensemble, embrassent la circonference entiere, & valent par conséquent quatre quarts de circonference, ou quatre angles droits.

### COROLLAIRE V.

132. *Les angles ABC, SBR, opposez au sommet,* (Fig. 48.) *sont égaux entr'eux.* La ligne CS étant droite & passant par le centre, est un diametre du cercle, & par conséquent l'arc SEAC vaut la demi-circonference; ainsi l'angle ABS, & son angle de suite ABC valent ensemble deux angles droits. De même la ligne AR étant droite, l'angle ABS & l'angle de suite SBR, valent ensemble la demi-circonference. Donc les angles ABS, ABC pris ensemble, sont égaux aux deux ensemble ABS, SBR; ôtant donc de part & d'autre l'angle ABS, il restera l'angle ABC égal à l'angle SBR, qui lui est opposé au sommet.

### COROLLAIRE VI.

133. Une ligne *ac* étant donnée, si l'on veut faire sur cette ligne un angle *bac* égal à un angle donné BAC (*Fig.* 49.) on dé-

crira autour du sommet A de l'angle donné un cercle BDC ; puis transportant le compas avec la même ouverture sur l'extrémité *a* de la ligne donnée *ac*, on décrira autour de *a* un cercle *bdc*, on prendra la grandeur de l'arc BC compris entre les jambes BA, CA de l'angle BAC, & on la portera sur le cercle *bdc* depuis le point C où ce cercle coupe la ligne *ac* jusqu'en *b*, par où, & par l'extrêmité *a* on tirera la ligne droite *ab*, qui fera l'angle *bac* égal à l'angle BAC. Car les cercles BDC, *bdc*, ayant leurs rayons égaux par la construction, sont par conséquent égaux entr'eux. Ainsi transportant le centre *a* sur le centre A, le rayon *ac* tombera sur le rayon AC, la circonference *bdc* sur la circonference BDC, & l'arc *bc* sur l'arc BC, puisque ces deux arcs sont égaux par la construction ; donc le rayon *ba* tombera sur le rayon BA, & l'angle *bac* sera égal à l'angle BAC. Dans la pratique il suffit de décrire autour du point A l'arc BC, qui coupe les deux jambes BA, AC de l'angle BAC, & de porter la grandeur BC sur l'arc indéterminé *cq* de *c* en *b*, &c.

## COROLLAIRE VII.

134. Deux ou plusieurs lignes paralleles entr'elles AB, CD, qui coupent une ligne droite, (*Fig.* 43.) font avec cette ligne les angles BEI, DFE, tournez du même côté, égaux entr'eux. C'est une suite des Définitions de l'angle & des lignes paralleles; car l'angle étant l'inclinaison d'une ligne sur une autre. Si, par exemple, DFE étoit plus ou moins grand que l'angle BEI, la ligne FD seroit plus ou moins inclinée sur IL que la ligne BE, ce qui ne pourroit être sans que FD n'approchât ou ne s'éloignât de BE, & ne cessât d'être parallele avec BE.

## COROLLAIRE VIII.

135. *Les angles alternes AEF, DFE faits par la ligne droite IL, qui coupe les paralleles AB, CD, sont egaux*, (Fig. 43.) l'angle AEF est égal à l'angle IEB, qui lui est opposé au sommet (*n.* 139.) & l'angle IEB est égal à l'angle EFD par le Corollaire précedent; donc l'angle AEF, égal à l'angle IEB, est aussi égal à l'angle EFD.

## COROLLAIRE IX.

136. *Les angles internes BEF, DFE, faits du même côté par la ligne IL, qui coupe les deux paralleles AB, CD, sont ensemble égaux à deux*

*angles droits.* L'angle IEB, plus l'angle de suite BEF valent deux droits (*n.* 129.): or l'angle IEB est égal à l'angle DFE (*n.* 134.); donc l'angle DFE, plus l'angle BEF, valent ensemble deux droits.

## COROLLAIRE X.

137. On tire du huitiéme Corollaire une autre maniere de mener d'un point donné E, une parallele à une ligne donnée CD (*Fig.* 43.), ce qui se fait ainsi : du point E on tire une ligne EF inclinée ou perpendiculaire sur CD, ensuite du point F où elle coupe la ligne CD, on décrit l'arc RG qui coupe la ligne CD en G, & la ligne IL en R, & avec la même ouverture on décrit du point E l'arc indéterminé SV, surlequel on porte la grandeur de l'arc RG depuis le point S où SV coupe la ligne EF jusqu'en T; enfin du point T par le point E, on tire la ligne AB, qui est parallele à CD; car l'angle AEF est égal à l'angle alterne EFG par la construction : donc les lignes AB, CD sont paralleles. (*n.* 135.)

## PROBLEME XX.

138. *L'angle ABC d'un petit segment étant donné, trouver sa valeur & celle de l'angle du grand segment.* (Fig. 50.)

Du centre O tirez le diametre RD parallele à la corde BC, tirez encore du même centre la perpendiculaire OH, qui divisera la corde BHC, & son arc BHC en deux parties égales, (*n* 82.) & menez le rayon OB au point d'attouchement B de la tangente IA; l'angle ABO sera droit, étant formé par le rayon au point B d'attouchement (*n.* 89.), & l'angle XOR sera droit aussi par la construction; ainsi les angles ABO, XOR, seront égaux; de plus, à cause des paralleles BC, RD, l'angle ROB sera égal à son alterne XBO (*n.* 134). Si donc on retranche de l'angle droit XOR l'angle ROB, & de l'angle droit ABO, l'angle XBO égal à l'angle ROB, l'angle restant BOH, sera égal à l'angle restant ABC : or l'angle BOH étant au centre, vaut l'arc BH qu'il embrasse; donc l'angle ABC vaut aussi cet arc : mais l'arc BHC du petit segment ayant été coupé en deux parties égales, l'arc BH est la moitié de l'arc BHC; donc l'angle ABC du petit segment, vaut la moitié de l'arc de ce segment, ce qui est la premiere chose qu'il falloit trouver.

L'angle ABC & l'angle de suite IBC, qui est l'angle du grand segment, valent ensemble deux angles droits, où la demi-circon-

ference ou (ce qui revient au même) la moitié de l'arc BHC, plus la moitié de l'arc BRC du grand segment ; or l'angle ABC vaut la moitié de l'arc BHC, donc l'angle IBC vaut la moitié de l'arc BRC ; d'où il suit que l'angle du grand segment vaut la moitié de l'arc du grand segment, de même que l'angle du petit segment, vaut la moitié de l'arc du petit segment.

## PROBLEME XXI.

139. *Un angle ABC* (Fig. 51.) *formé par une corde BC, & par le prolongement BA d'une autre corde DB étant donné, trouver la valeur de cet angle.*

Par le point B qui est le sommet de l'angle donné, tirez la tangente FE, l'angle ABC sera divisé en deux angles ABE, EBC ; or l'angle EBC étant l'angle du segment BC, vaudra la moitié de l'arc BC, & l'angle ABE étant égal à l'angle FBD, qui lui est opposé au sommet, vaudra la moitié de l'arc BD, puisque cet angle étant formé par une corde & une tangente, est l'angle du segment BD ; donc les angles EBC, EBA pris ensemble, c'est-à-dire l'angle ABC, vaudra la moitié de l'arc BC, plus la moitié de l'arc BD, d'où il suit que l'angle ABC formé par une corde BC, & par le prolongement BA d'une autre corde DB, vaut la moitié des deux arcs que les cordes soûtiennent.

## PROBLEME XII.

140. *Trouver la valeur d'un angle DBC* (Fig. 51.), *dont le sommet est à la circonference d'un cercle.*

Par le sommet B tirez la ligne FE tangente au cercle (*n.* 90.), les lignes DB, BC tombant sur le même point B de la droite FE, forment avec FE trois angles FBD, DBC, CBE, qui valent ensemble deux angles droits (*n.* 130.), ou la demi-circonference, ou enfin, la moitié des arcs AC, CD, DB, puisque ces trois arcs comprennent la circonference entiere. Or l'angle FBD étant l'angle du segment DB, vaut la moitié de l'arc DB (*n.* 138.), & par la même raison l'angle EBC vaut la moitié de l'arc BC, donc il ne reste pour l'angle DBC que la moitié de l'arc DC, sur lequel ses jambes s'appuyent. Donc tout angle qui a son sommet à la circonference, vaut la moitié de l'arc que ses jambes embrassent.

## COROLLAIRE.

141. Les angles DIC, DRC, & en général tous les angles qui

ont le sommet ou sur l'arc DB, ou sur l'arc BC, & qui embrassent l'arc DC sont égaux entr'eux, puisque la mesure de chacun d'eux est la moitié de l'arc DC, d'où il suit que *tous les angles qui ont leur sommet à la circonference, & qui embrassent le même arc, sont égaux.*

## LEMME POUR LE PROBLEME SUIVANT.

142. *Une ligne courbe ou droite CD étant divisée en deux parties égales ou inégales CF, FD, la moitié de toute la ligne moins la moitié de l'une des parties CF, est égale à la moitié de l'autre partie FD.* (Fig. 43.)

Toute la ligne CD est égale à ses parties CF, FD, prises ensemble (*n.* 25.), & si de la toute CD, on retranche la partie CF, le reste est la partie FD, donc prenant la moitié de part & d'autre, la moitié de la toute CD moins la moitié de CF, est égale à la moitié de FD.

## PROBLEME XXIII.

143. *Trouver la valeur d'un angle BAC* (Fig, 52.) *dont le sommet B est hors du cercle, & dont les jambes AB, BC, embrassent une partie de la circonference interieure ou concave du cercle.*

Du point D, où l'une des jambes AB coupe la circonference exterieure ou convexe du cercle, tirez la corde DE parallele à l'autre jambe AC, l'angle BDE sera égal à l'angle donné BAC à cause des paralleles DE, AC (*n.* 134.) & les arcs DS, EC, compris entre les mêmes paralleles, seront aussi égaux (*n.* 100.); or l'angle BDE ayant son sommet à la circonference, vaut la moitié de l'arc BE qu'il embrasse, donc l'angle donné BAC, vaut aussi la moitié de cet arc; mais par le Lemme précédent la moitié de l'arc BC, moins la moitié de sa partie EC, est égale à la moitié de l'autre partie BE; donc l'angle BAC, qui vaut la moitié de l'arc BE, vaut la moitié de l'arc BC moins la moitié de l'arc EC; & si au lieu de l'arc EC, on met l'arc DS son égal, l'angle BAC vaudra la moitié de l'arc BC moins la moitié de l'arc DS, d'où il suit que *tout angle DAC, qui a son sommet hors du cercle, & dont les jambes coupent le cercle, vaut la moitié de l'arc concave qu'il embrasse moins la moitié de l'arc convexe qu'il coupe.*

## REMARQUE I.

144. Si les jambes de l'angle s'arrêtoient sur la circonference

convexe du cercle, comme aux points D, S, on les prolongeroit jusqu'à la circonference concave en B & C, & l'on trouveroit la valeur de l'angle BAC de même que ci-dessus.

## REMARQUE II.

145. Si l'angle PAC (*Fig.* 53.), est formé par la rencontre de deux tangentes PA, AC, on trouvera encore que cet angle vaut la moitié de l'arc concave BEC, que ses jambes embrassent moins la moitié de l'arc convexe BOC, compris entre les points d'attouchement B, C, ce qui se démontre ainsi: De l'un des points d'attouchement B, tirez la corde BE parallele à l'autre jambe AC, ensuite du centre R par l'autre point d'attouchement AC, tirez le diametre CV; en premier lieu, à cause des paralleles BE, AC, l'angle PBE sera égal à l'angle donné PAC (*n.* 134.); en second lieu, le diametre VC tombant sur le point d'attouchement C, sera perpendiculaire à la tangente AC (*n.* 89.), & à cause des paralleles BE, AC, ce même diametre sera aussi perpendiculaire sur la corde BE (*n.* 64.), d'où il suit que ce diametre coupera la corde BE, & l'arc BCE en deux parties égales (*n.* 82. & 84.). Cela posé, l'angle PBE vaut la moitié de l'arc BVE, puisqu'il est l'angle du segment BVE; donc l'angle donné PAC égal à l'angle PBE, vaut aussi la moitié de l'arc BVE; mais par le Lemme précédent, la moitié de l'arc BVEC moins la moitié de sa partie EC, est égale à la moitié de son autre partie BVE: donc l'angle PAC est égal à la moitié de l'arc BVEC moins la moitié de l'arc EC. Mettant donc au lieu de l'arc EC l'arc BC qui lui est égal, parce que l'arc BCE est coupé en deux parties égales au point C, on aura l'angle PAC égal à la moitié de l'arc concave BVEC, moins la moitié de l'arc convexe BOC.

## COROLLAIRE.

146. Il suit de-là 1°. que si on tire dans un cercle une corde BE parallele à une tangente AC, l'arc BCE que cette corde soutient du côté de la tangente, est coupé en deux parties égales au point d'attouchement. 2°. Que la ligne VC, qui coupe la corde en deux parties égales, & qui passe par le centre, passe aussi par le point d'attouchement. 3°. Que l'autre arc BVC est coupé de même en deux parties égales par la ligne VC, qui passe par le point d'attouchement & par le centre.

## PROBLEME XXIV.

147. *Trouver la valeur d'un angle ABC* (Fig. 54, 55, 56.), *dont le sommet B est entre la circonference & le centre O d'un cercle.*

Du point A, où l'une des jambes AB coupe la circonference, tirez la ligne AL parallele à l'autre jambe BC, où cette ligne sera tangente du cercle, comme dans la Fig. 54, où elle le coupera entre les jambes de l'angle, comme dans la Fig. 55, ou enfin elle le coupera hors des jambes de l'angle, comme dans la Figure 56, & dans ces trois cas on trouvera toujours que l'angle ABC vaut la moitié de l'arc AC, que ses jambes embrassent plus la moitié de l'arc ST, que ses jambes prolongées au-delà du sommet, embrasseroient; ce qui se démontre ainsi.

Dans le premier cas, l'arc AS est égal à l'arc AC, à cause de la corde SC parallele à la tangente AL (*n.* 146.), l'angle LAT du petit segment AST vaut la moitié de l'arc AT de ce segment, & par conséquent il vaut la moitié de l'arc AS, plus la moitié de l'arc ST, & mettant au lieu de l'arc AS l'arc AC son égal, l'angle LAT vaut la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc ST; or à cause des paralleles LA, CS, l'angle LAT est égal à son alterne ABC; donc l'angle donné ABC vaut aussi la moitié de l'arc AC, que ses jambes embrassent plus la moitié de l'arc ST, que ses jambes embrasseroient, si elles étoient prolongées au-delà du sommet.

Dans le second cas, la ligne AB étant prolongée en R, l'angle RAL formé par la corde AL, & par le prolongement AR d'une autre corde AT, vaut la moitié de l'arc AVL, plus la moitié de l'arc AST (*n.* 139.), c'est-à-dire, la moitié des arcs AVL, AS, ST; or à cause des paralleles AL, SC, l'arc AS est égal à l'arc LC (*n.* 100.), mettant donc l'arc LC au lieu de l'arc AS, l'angle RAL vaut la moitié des arcs AVL, LC, ST, ou la moitié de l'arc AVLC, plus la moitié de l'arc ST; mais à cause des paralleles, l'angle RAL est égal à l'angle donné ABC; donc l'angle ABC vaut la moitié de l'arc AVLC, que ses jambes embrassent, plus la moitié de l'arc ST embrassé par le prolongement de ses jambes au-delà du sommet.

Enfin dans le troisiéme cas, l'angle SAL, dont le sommet est à la circonference, vaut la moitié de l'arc STL, que ses jambes embrassent, ou la moitié des arcs ST, TL, & comme l'arc TL est égal à l'arc CA, l'un & l'autre étant compris entre les paral-

leles, si l'on met l'arc BA au lieu de l'arc TL, l'angle SAL sera égal à la moitié de l'arc ST, plus la moitié de l'arc CA; mais à cause des paralleles, l'angle SAL est égal à son alterne ABC; donc l'angle donné ABC vaut la moitié de l'arc BA, plus la moitié de l'arc ST.

## PROBLEME XXV.

148. *Trouver la valeur d'un angle ABC* (Fig. 57, 58, 59.) *dont le sommet B est hors du cercle, & qui ne coupe le cercle que par l'une de ses jambes AB.*

Du point D où la jambe AB coupe le cercle, tirez une parallele DE à l'autre jambe BC, il arrivera ou que la parallele DE coupera le cercle entre les deux jambes AB, BC (*Fig.* 57.) ou qu'elle sera tangente (*Fig.* 58), ou qu'elle coupera le cercle hors des jambes AB, BC, (*Fig.* 59.) or dans les deux premiers cas, l'angle ADE est égal à l'angle donné ABC, à cause des paralleles DE, BC, (*n.* 154.) & dans le troisiéme l'angle alterne EDB, est égal à l'angle donné ABC, (*n.* 135.) donc dans le premier l'angle ABC vaut la moitié de l'arc AGE, parce que l'angle ADE son égal, ayant son sommet D à la circonference, vaut la moitié de cet arc (*n.* 140.); dans le second, l'angle ABC vaut la moitié de l'arc AGD, parce que l'angle ADE son égal, est l'angle du segment AGD, (*n.* 138.) enfin dans le troisiéme, l'angle ABC vaut la moitié de l'arc EHD, plus la moitié de l'arc DGA, parce que l'angle EBD est formé par une corde ED, & par le prolongement BD d'une autre corde DA, (*n.* 139.).

## PROBLEME XXVI.

149. *Trouver la valeur d'un angle ABC,* (Fig. 60, 61.) *dont le sommet B est hors du cercle, & dont l'une des jambes touche le cercle, & l'autre ne touche ni ne coupe le cercle.*

Du point A où la jambe AB touche le cercle, tirez la ligne AE parallele à l'autre jambe CB, cette ligne coupera nécessairement le cercle, puisqu'entre le point A d'attouchement d'une tangente & la circonference d'un cercle, on ne peut faire passer aucune ligne droite (*n.* 92.); or il arrivera ou que l'angle ABC sera tourné de l'autre côté du cercle (*Fig.* 60.), ou du même côté (*Fig.* 61.). Dans le premier cas, l'angle ABC sera égal à son alterne BAE, à cause des paralleles AE, CB; mais l'angle BAE étant l'angle du segment AHE, vaut la moitié de l'arc AHE de ce segment; donc

donc l'angle donné ABC vaudra aussi la moitié de l'arc AHE. Dans le second cas, prolongeant la jambe AB en I, l'angle IAE sera égal à l'angle ABC, à cause des paralleles; mais l'angle IAE étant l'angle du segment AHE, vaut la moitié de l'arc AHE de ce segment; donc l'angle donné ABC vaudra aussi la moitié de l'arc AHE.

## PROBLEME XXVII.

150. *Dans un cercle donné DPH* (Fig. 62.), *couper un segment capable de contenir un angle égal à un angle donné ABC.*

D'un point D pris sur la circonference du cercle, tirez une tangente DE, faites au point D avec la tangente DE un angle HDE égal à l'angle donné ABC, la ligne DH coupera le cercle, puisqu'entre la tangente & la circonference on ne peut faire passer aucune ligne droite (*n.* 93.), vous aurez donc deux segmens DFC, DPH, & l'angle HDE sera l'angle du segment DEC; prenez un point quelconque P sur la circonference DPH, & de ce point tirez les lignes PD, PH aux extrêmitez de la corde DH, ce qui vous donnera l'angle DPH égal à l'angle donné ABC.

### DEMONSTRATION.

L'angle HDE du segment DEH, vaut la moitié de l'arc DEH; or cet angle est égal à l'angle donné ABC par la construction: donc l'angle donné ABC, vaut la moitié de l'arc DEH; mais l'angle DPH ayant son sommet à la circonference, vaut aussi la moitié de l'arc DEH; donc l'angle DPH est égal à l'angle donné ABC.

### COROLLAIRE I.

151. L'angle donné ABC, peut être ou aigu, ou droit, ou obtus. Quand il est aigu (*Fig.* 62.), le segment DPH, dont la moitié de l'arc mesure l'angle ABC, est moindre que le demi-cercle; car la moitié de l'arc DEH, étant la mesure de l'angle aigu ABC, vaut par conséquent moins qu'un angle droit, ou que 90 degrez, & l'arc entier moins que deux fois 90 degrez, ou que 180, qui est la mesure de la demi-circonference. Quand l'angle ABC (*Fig.* 63.) est droit, le segment HDS est égal au demi-cercle, parce que sa moitié qui est la valeur de l'angle droit ABC vaut 90 degrez; enfin quand l'angle donné est obtus (*Fig.* 64.) le

segment HDS est plus grand que le demi-cercle, parce que la moitié de son arc étant la mesure d'un angle obtus, vaut plus de 90 degrez.

### COROLLAIRE II.

152. Tous les angles DRH, DPH, &c. (*Fig.* 62.) qui ont leur sommet à la circonference d'un grand segment, & dont les jambes s'appuyent sur l'arc du petit segment, sont égaux entr'eux, puisqu'ils valent chacun la moitié de l'arc du petit segment; de même tous les angles DRH, DPH, &c. (*Fig.* 64.) qui ont leur sommet à la circonference du petit segment, & dont les jambes embrassent l'arc du grand segment, sont égaux entr'eux, puisqu'ils valent la moitié du même arc; enfin par la même raison tous les angles DRH, DPH, &c. (*Fig.* 63.) qui ont leur sommet à la circonference, & qui s'appuyent sur les extrêmitez du diametre, sont égaux entr'eux.

### COROLLAIRE III.

153. Tout angle DPH dans le grand segment (*Fig.* 62.), est aigu, parce qu'il vaut la moitié de l'arc DFH, qui est moindre que la demi-circonference. Tout angle DEH, dans le demi-cercle est droit (*Fig.* 63.), parce qu'il vaut la moitié de la demi-circonference sur laquelle il s'appuye; enfin tout angle DPH dans le petit segment (*Fig.* 64.), est obtus, puisqu'il vaut la moitié de l'arc du grand segment, qui est plus grand que la demi-circonference.

### COROLLAIRE IV.

154. L'angle DPH dans le grand segment (*Fig.* 62.), est égal à l'angle HDE du petit segment, & l'angle DPH dans le petit segment (*Fig.* 64.), est égal à l'angle HDE du grand segment, cela est évident par la démonstration ci-dessus.

### COROLLAIRE V.

155. L'angle ABC dans le petit segment (*Fig.* 65.) & l'angle ADC dans le grand segment, valent ensemble deux angles droits; car le premier vaut la moitié de l'arc ADC, & l'autre la moitié de l'arc ABC, ce qui fait la moitié de la circonference, & par conséquent deux angles droits; on prouvera de même que les deux angles DAB, DCB, valent ensemble deux angles droits, d'où il suit que les quatre angles faits par les jambes des angles

dans le petit & dans le grand ſegment, valent enſemble quatre angles droits.

## COROLLAIRE VI.

156. Par le Corollaire 3, tout angle dans le demi-cercle eſt droit, & de-là on tire une autre maniere de mener une tangente AB à un cercle BCP par un point A pris hors du cercle (*Fig.* 66.), ce qui ſe fait ainſi: Du point A tirez au centre O la ligne AO, que vous diviſerez en deux parties égales au point R; du point R pris pour centre, & de l'intervalle RO décrivez le demi-cercle ABO, qui coupera le cercle au point B, duquel vous tirerez les lignes BA, BO. Ces lignes feront au point B un angle ABO, qui ſera droit, parce qu'il eſt dans le demi-cercle; ainſi la ligne OB, qui eſt rayon du cercle BPC, ſera perpendiculaire à la ligne AB, & par conſéquent la ligne AB ſera tangente au point B. (*n.* 89.)

## COROLLAIRE VII.

157. On tire encore du troiſiéme Corollaire la façon d'élever une perpendiculaire BC ſur l'extrêmité B d'une ligne droite AB (*Fig.* 67.) en cette ſorte. D'un point Q pris à diſcretion hors de la ligne AB, & de l'intervalle OB décrivez un grand arc de cercle qui coupe la ligne AB prolongée, s'il le faut, en un autre point E. Du point E par le centre C tirez la ligne AC, qui ſera un diametre du cercle; enfin du point C tirez au point B la ligne CB, qui ſera perpendiculaire ſur la ligne AB au point B, parce que l'angle ABC étant dans le demi-cercle, eſt droit.

Comme les lignes OE, OB, OC ſont égales, étant rayons d'un même cercle, s'il ſe trouvoit quelque obſtacle qui empêchât de décrire le cercle, comme il arrive quelquefois ſur le terrain, on tireroit du point O la ligne OB à l'extrêmité B de la ligne donnée; enſuite du même point O, on porteroit la grandeur OB de l'autre côté, juſqu'à ce que ſon extrêmité B touchât la ligne AB en un autre point E: après quoi on prolongeroit la ligne EO en C, enſorte que OC fût égal à OE, & du point C on tireroit la ligne CB, qui ſeroit perpendiculaire à la ligne AB, ce qui eſt évident; car ſi on décrivoit un cercle autour du diametre EO, ce cercle paſſeroit par le point B, à cauſe que la ligne OB eſt égale au rayon OE, & par conſéquent l'angle ABC ſeroit dans le demi-cercle ABC.

## COROLLAIRE VIII.

158. Si du centre O d'un cercle (*Fig.* 65.) on tire les lignes OA, OC aux extrêmitez A, C, des jambes d'un angle ADC dans le grand segment, l'angle AOC aura son sommet tourné du même côté que celui de l'angle ADC; or l'angle AOC étant au centre, vaut l'arc ABC qu'il embrasse, (*n.* 125.) & l'angle ADC ayant son sommet à la circonference, ne vaut que la moitié de cet arc; donc l'angle au centre AOC est double de l'angle de la circonference, & comme cela arriveroit de même quand la corde AC ne seroit pas tirée, il s'ensuit que tout angle au centre qui a son sommet tourné du même côté que celui d'un angle à la circonference, & qui embrasse le même arc, est double de l'angle à la circonference.

## REMARQUE.

159. Les Géometres se contentent de dire, *que l'angle au centre est double de l'angle à la circonference qui s'appuye sur le même arc*; sans ajoûter, comme j'ai fait, que les deux angles doivent avoir le sommet tourné du même côté; mais je crois que cette addition est néceſſaire pour ne pas embaraſſer les Commençans; car il est visible que lorsque l'angle DPH à la circonference (*Fig.* 63.) est un angle dans le demi-cercle, il n'est pas possible de faire au centre un angle qui embrasse le même arc, & quand l'angle DPH à la circonference est un angle du petit segment (*Fig.* 64.), l'angle HOD au centre qui n'a pas son sommet tourné du même côté que celui de l'angle DPH à la circonference, n'est pas toujours double de l'angle DPH; car l'angle HOD vaut l'arc HPD, & l'angle HPD vaut la moitié de l'arc HSD, laquelle moitié n'est égale à l'arc HPD, que lorsque l'arc HPD est le tiers de la circonference.

Mais quel rapport ont donc les angles dans le demi-cercle & les angles dans le petit segment avec les angles au centre? le voici. Du sommet P de l'angle dans le demi-cercle (*Fig.* 63.) tirez par le centre le diametre PS, l'angle HPD sera divisé en deux angles HPS, SPD, dont le premier vaudra la moitié de l'arc HS, & le second la moitié de l'arc SD; or les angles au centre HOS, SOD, vaudront, l'un l'arc HS, & l'autre l'arc SD; donc les deux angles au centre seront doubles des deux angles HPS, SPD.

De même du sommet P, (*Fig.* 64.) de l'angle du petit segment

HPD, tirez par le centre O le diametre POS, & du centre O tirez les lignes OH, OD aux extrêmitez des jambes de l'angle HPD, & l'angle HPD sera divisé en deux angles HPS, SPD, qui vaudront la moitié des arcs HS, SD, sur lesquels ils s'appuyent, tandis que les angles au centre HOS, SOD, vaudront ces arcs entiers; ainsi les deux angles au centre seront doubles des deux angles à la circonference HPS, SPD.

Il est évident que dans tous ces cas, les angles au centre & les angles à la circonference, ont les sommets tournez du même côté, & que par conséquent on ne doit dire que les uns sont doubles des autres qu'en ajoûtant que les sommets sont tournés du même côté.

## PROBLEME XXVIII.

160. *Une ligne AB étant donnée* (*Fig.* 68.) *trouver le cercle dans lequel cette ligne coupe un segment capable d'un angle donné OPR.*

A l'extrêmité A faites l'angle HAB égal à l'angle donné OPR, coupez la ligne AB en deux parties égales par la perpendiculaire DC; à lextrêmité A de la ligne AH, élevez la perpendiculaire AD, & du point D où ces deux perpendiculaires se coupent, décrivez par le point A le cercle ABE, le segment AEB sera capable d'un angle AEB égal à l'angle donné OPR.

### DEMONSTRATION.

La ligne AB étant coupée en deux parties égales par la perpendiculaire DC, touts les points de la ligne DC seront également éloignez des extrêmitez A, B; donc le point D en sera aussi également éloigné; ainsi la circonference dont le point D est le centre, & qui passe par le point A, doit passer par le point B. De plus, le rayon AD étant perpendiculaire sur la ligne AH, cette ligne AH sera tangente au cercle, & l'angle HAB sera l'angle du petit segment ACB. Or l'angle AEB du grand segment est égal à l'angle HAB du petit segment (*n.* 154.), & l'angle HAB est égal à l'angle donné OPR par la construction; donc l'angle AEB est aussi égal à l'angle OPR.

## PROBLEME XXIX.

161. *Diviser un angle donné ABC en deux parties égales* (Fig. 69.): Du sommet B pris pour centre, & d'une ouverture du compas à discretion, décrivez l'arc DF qui coupe les jambes de l'angle

aux points D, F ; ensuite de ces points pris pour centres, & d'une même ouverture de compas prise à discretion, décrivez deux arcs qui se coupent au point O, duquel vous tirerez la ligne OB au sommet B, & l'angle sera divisé en deux parties égales.

### DEMONSTRATION.

Le sommet B étant le centre de l'arc DF est également éloigné des extrêmitez D, F de cet arc. De même les points D, F étant les centres des arcs qui se coupent en O, le point O est également éloigné de ces points; donc la ligne OB a deux points également éloignez des points D, F ; donc tous ses autres points en sont aussi également éloignez, & par conséquent le point R divise l'arc DRF en deux parties égales DR, RF ; or ces arcs DR, RF, sont la mesure des angles DBR, RBF, qui sont au centre ; donc ces deux angles sont égaux, & l'angle ABC est divisé en deux parties égales.

### REMARQUE.

162. Il est évident qu'on peut diviser de même en deux parties égales, les angles DBR, RBF, ce qui diviseroit l'angle total ABC en quatre parties égales, & qu'en continuant à diviser ces quatre, on pourra diviser l'angle total en 8, 16, 32 parties, &c. c'est-à-dire en un nombre quelconque de parties, divisible par quatre. Mais on ne peut diviser un angle en 3, 5, 6, 7 parties, &c. qu'en employant la Géometrie composée, & le plus court dans ces occasions, est de diviser l'angle en divisant l'arc DF, comme nous avons dit plus haut.

### PROBLEME XXX.

163. *Faire un angle double, triple, &c. d'un angle donné ABC.* (Fig. 70.)

Du sommet B pris pour centre, & d'une ouverture de compas à discretion, décrivez un arc de cercle indéterminé AR, qui coupe les jambes de l'angle donné aux points A, C, prenez la grandeur de l'arc AC, & portez-la de C en D, de D en E, &c. ensuite du sommet B tirez les droites BD, BE, &c. l'angle DBA sera double de l'angle CBA, l'angle EBA sera triple, & ainsi de suite.

DEMONSTRATION.

Les angles ABC, CDB, étant au centre, ont pour mesure les arcs AC, DB qu'ils embrassent (*n.* 125.). Or ces deux arcs sont égaux par la construction; donc les angles sont aussi égaux, & par conséquent l'angle total ABD est double de l'angle ABC; on prouvera de même que l'angle ABE est triple de l'angle ABC &c.

REMARQUE.

164. Ce Probleme ne peut se pratiquer que lorsque l'angle donné est aigu; car s'il étoit droit, comme l'angle ABC (*Fig.* 71.) le double de cet angle vaudroit 180 degrez, & par conséquent ses jambes AB, BD, embrasseroient la demi-circonference, & loin de former un angle, elles ne feroient qu'une seule ligne droite AD; & si l'angle étoit obtus, comme l'angle ABE, le double de cet angle embrasseroit un arc EAF, plus grand que la demi-circonference, & ses jambes AB, BF, ne formeroient pas un angle, mais elles en formeroient le revers.

## SECTION VI.

### *Du Triangle considéré par rapport aux lignes & aux angles dont il est formé.*

DEFINITION XXXVI.

165. Le *Triangle* est une surface plane ou courbe, bornée par trois lignes ou côtez, qui forment entr'eux trois angles. Nous ne parlons ici que du Triangle plan, lequel s'appelle Triangle *rectiligne*, lorsque ses trois côtez sont des lignes droites, *curviligne*, lorsque ses côtez sont des lignes courbes, & *mixtiligne*, lorsque ses côtez sont les uns droits, & les autres courbes. Cette Section est uniquement pour le Triangle rectiligne.

DEFINITION XXXVII.

166. Le Triangle rectiligne considéré par rapport à ses côtez, s'appelle *Equilateral*, quand ses trois côtez sont égaux, *Isoscele*, lorsque deux de ses côtez sont égaux, & le troisiéme inégal, & *Scalene*, quand ses trois côtez sont inégaux.

### DEFINITION XXXVIII.

167. Le Triangle considéré par rapport à ses angles, se nomme Triangle *rectangle*, quand l'un de ses angles est droit, *amblygone*, ou *obtusangle*, lorsqu'il a un angle obtus, & *oxygone*, ou *acutangle*, quand ses trois angles sont aigus.

### DEFINITION XXXIX

168. Le côté sur lequel on conçoit qu'un Triangle est appuyé, s'appelle *base* du Triangle; l'angle opposé à ce côté, s'appelle le *sommet*, & la perpendiculaire tirée du sommet sur la base, se nomme *hauteur* du Triangle, parce qu'elle est le plus court chemin, ou la distance du sommet à la base. Ainsi si l'on prend le côté AC pour la *base* du Triangle ABC (*Fig.* 72.), l'angle B en sera le *sommet*, & la perpendiculaire BD en sera la hauteur. Quand le Triangle est incliné (*Fig.* 73.), la perpendiculaire BD ne peut pas tomber sur la base AC en-dedans du Triangle; c'est pourquoi il faut alors prolonger la base jusqu'à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire, parce que la hauteur d'un Triangle & de toute autre figure, doit toujours se prendre par la plus courte ligne qu'on puisse tirer du sommet sur la base.

### DEFINITION XL.

169. L'angle BCD (*Fig.* 73.) fait par un côté BC d'un Triangle ABC, & par le prolongement CD du côté AC, s'appelle angle *exterieur*.

### DEFINITION XLI.

170. Dans tout Triangle rectangle ABC (*Fig.* 74.) le côté AC opposé à l'angle droit B, s'appelle *hypothenuse*.

### DEFINITION XLII.

171. Deux Triangles sont dits *Egaux entr'eux*, lorsque l'espace fermé par les trois côtez de l'un est égal à l'espace fermé par les trois côtez de l'autre. On les appelle *Equiangles*, lorsque les trois angles de l'un sont égaux aux trois angles de l'autre, chacun à chacun. Enfin on les appelle *Equiangles & égaux entr'eux*, lorsque l'espace renfermé par les trois côtez, est égal de part & d'autre, & que les trois angles sont égaux chacun à chacun, & alors les trois côtez de l'un sont aussi égaux aux trois côtez de l'autre.

PROBL.

## PROBLEME XXXI.

172. *Trois lignes AB, CD, EF, étant données, en construire un Triangle* (Fig. 75).

Tirez une ligne HI égale à l'une des trois lignes données, par exemple à la ligne AB, ensuite des extrêmitez H, I, prises pour centres, décrivez des cercles, dont l'un ait pour rayon la ligne HO, égale à la seconde ligne donnée CD, & l'autre la ligne OI égale à la troisiéme EF. Si ces deux cercles se coupent, ce ne sera qu'en deux points O, P, (*n.* 110.) qui seront également éloignez de la ligne HI, l'un en-dessus & l'autre en-dessous, & en ce cas de l'un de ces points tirant les lignes OH, OI aux extrêmitez de la ligne HI, on aura le Triangle demandé HOI. Que si les deux cercles ne se coupent point, ou s'ils se touchent sans se couper, il sera impossible de faire un Triangle avec les trois lignes données.

### DEMONSTRATION.

En premier lieu, si les cercles se coupent (*Fig.* 73.), tirant la ligne OP entre les deux points de section O, P, les extrêmitez H, I de la ligne HI, sont également distantes des extrêmitez O, P de la ligne OP; donc la ligne HI coupe la ligne OP en deux parties égales, & les deux points O, P, sont hors de la ligne HI, & à égale distance. Donc les trois lignes HO, OI, IH, qui joignent les trois points H, O, I, renferment un espace, & forment par conséquent un Triangle, qui est le Triangle demandé, ces trois lignes étant égales par la construction aux trois lignes données chacune à chacune.

En second lieu, si les cercles ne se coupent point (*Fig.* 76.), il est impossible de faire le Triangle demandé, parce que les rayons AC, DB, que nous supposons égaux à deux des lignes données, ne peuvent se joindre, ni par conséquent renfermer un espace.

Enfin si les cercles se touchent sans se couper (*Fig.* 77.), le Triangle demandé est encore impossible, parce que le point d'attouchement C se trouve sur la ligne droite AB, qui joint les deux centres (*n.* 80), & que l'on suppose égale à l'une des trois lignes données; d'où il suit que les rayons AC, CB, ne pouvant se joindre qu'en ce seul point C, ne peuvent renfermer un espace, ni former un Triangle.

## REMARQUE.

173. Dans la pratique il suffira de décrire deux arcs, qui ayent pour rayons deux lignes égales aux données CD, EF, & de tirer du point O, ou du point P, où ces arcs se couperont, les lignes HO, OI.

## COROLLAIRE I.

174. Si les trois lignes données étoient égales entr'elles, le Triangle seroit équilateral, & s'il n'y en avoit que deux qui fussent égales, le Triangle seroit isoscele. (*n.* 166.)

## COROLLAIRE II.

175. *Dans tout Triangle deux lignes HO, OI, prises ensemble, sont plus grandes que la troisiéme HI.* (Fig. 75.) Si elles lui étoient égales, comme les lignes AC, CB, (*Fig.* 77.) qui sont égales à la ligne AB, ou si elles étoient moindres, comme les deux AC, DB, (*Fig.* 76.) qui sont moindres que AB, elles ne pourroient former un Triangle.

## COROLLAIRE III.

176. *Deux Triangles ABC, abc* (Fig. 78.) *qui ont les trois côtez égaux chacun à chacun, sont équiangles & égaux.* Si des extrêmitez A, B de la base AB, on décrit deux cercles DBR, DBS, dont l'un ait pour rayon le côté AB, & l'autre le côté BC, & que des extrêmitez *a*, *b*, de la base *ab*, on décrive deux cercles de la même façon, le cercle DBR sera égal au cercle *dbr*, à cause des rayons égaux AB, *ab*, & le cercle DBS sera égal au cercle *dbs* pour la même raison, & comme la base AB qui est la distance des centres A, C, est égale à la base *ab*; qui est la distance des centres *a*, *b*, il s'ensuit que si l'on met la base *ab* sur la base AB, les centres *a*, *b*, tomberont sur les centres A, B; le cercle *dbr*, sur le cercle DBR, le cercle *dbs* sur le cercle DBS, & par conséquent les points *b*, *d* des sections des deux cercles *dbr*, *dbs*, tomberont sur les points B, D des sections des deux cercles DBR, DBS; donc le côté *ab* tombera sur le côté AB, le côté *bc* sur le côté BC, & les Triangles seront parfaitement *égaux* & *équiangles*.

## COROLLAIRE IV.

177. Sur une même base AB (*Fig* 79.), on ne peut construire

que quatre Triangles scalenes, qui soient équiangles & égaux, & l'on n'en peut construire que deux qui soient équilateraux ou isosceles. Car des extrêmitez A, B, ayant décrit deux cercles inégaux, & tiré aux points de section les droites AC, AD, BC, BD, on aura deux Triangles scalenes, équiangles & égaux, puisqu'ils ont la base AB commune, le côté AC égal au côté AD, & le côté BC égal au côté BC. Ainsi voilà déja deux Triangles égaux; que si au lieu de mettre les côtez AC, AD à gauche de la base, on les met à droite, & les côtez BC, BD à gauche, au lieu de les mettre à droite, on aura deux autres Triangles AEB, AFB, égaux & équiangles aux deux précedens. Maintenant si on veut faire un cinquiéme Triangle égal à l'un des deux premiers ACB, ADB, il faudra nécessairement que son sommet soit ailleurs qu'aux points d'intersection C, D, où ces deux Triangles ont leur sommet, & comme les côtez de ce cinquiéme Triangle seroient égaux aux côtez AC, CB, qui sont les rayons des deux cercles, il s'ensuit que ces rayons se toucheroient par leurs extrêmitez en trois points différens, & que par conséquent les cercles pourroient se couper en trois points, ce qui est impossible. (*n.* 110.) On prouvera de même qu'on ne peut faire un cinquiéme Triangle égal & équiangle à l'un des deux derniers AEB, AFB.

Que si les Triangles sont équilateraux ou isosceles (*Fig.* 80); on n'en pourra décrire sur la base AB que deux qui soient égaux & équiangles; car les côtez AC, AD, étant égaux aux côtez CB, DB, la transposition des uns, de gauche à droite, & des autres de droite à gauche, ne fera pas que les sommets des nouveaux Triangles qu'on voudroit faire, tombent ailleurs que sur les points C, D.

### COROLLAIRE V.

178. Les trois côtez d'un Triangle étant connus, on peut toujours construire un Triangle égal & équiangle à ce Triangle, en prenant trois lignes égales aux trois côtez connus, & achevant la construction comme ci-dessus.

### COROLLAIRE VI.

179. Les trois sommets des angles d'un Triangle ne sçauroient être en ligne droite, ce qui est évident par la démonstration de de ce Problême, & par le second Corollaire.

## PROBLEME XXXII.

180. *Mesurer les angles d'un Triangle donné ABC.* (Fig. 81.) Faites passer un cercle par les trois sommets A, B, C, (*n.* 88.) ce qui est possible, puisque ces trois sommets ne sont point en ligne droite (*n* 79.); & alors l'angle A ayant son sommet à la circonference, vaudra la moitié de l'arc BC que ses jambes embrassent, c'est-à-dire, la moitié de l'arc soutenu par le côté opposé à cet angle, l'angle B par la même raison vaudra la moitié de l'arc AC, soutenu par le côté opposé AC, & l'angle C la moitié de l'arc AB, soutenu par le côté opposé AB.

### COROLLAIRE I.

181. *Dans tout Triangle les trois angles pris ensemble, valent deux angles droits*, les trois angles A, B, C, (*Fig.* 81.) valent la moitié de l'arc BC, plus la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc AB; or ces trois arcs pris ensemble, font la circonference entiere, donc, &c.

### COROLLAIRE II.

182. *L'angle exterieur FCB d'un Triangle, est égal aux deux angles internes oppo ez BAC, CBA.* Si aux deux angles BAC, CBA, on ajoûte l'angle ACB, les trois ensemble valent deux angles droits par le Corollaire precedent; & de même si à l'angle externe BCF, on ajoûte le même angle ACB, les deux ensemble vaudront aussi deux angles droits, parce qu'ils sont faits par une ligne BC, qui tombe sur une autre AB (*n.* 129.). Retranchant donc de part & d'autre l'angle ACB, il restera les deux angles BAC, CBA, égaux ensemble à l'angle externe BCF.

### COROLLAIRE III.

183. *Dans tout Triangle équilateral ABC* (Fig. 82.), *les trois angles sont égaux.* Faisant passer un cercle par les trois sommets, les trois côtez deviennent trois cordes égales d'un même cercle, & soutiennent par conséquent des arcs égaux (*n.* 99.); dont les trois angles valent chacun la moitié. Par la même raison dans tout Triangle isoscele DBE, les angles D, E opposez aux côtez égaux, sont égaux, & enfin dans tout Triangle scalene ABC, les trois angles sont inégaux.

## COROLLAIRE IV.

184. *Il ne peut se trouver dans un même Triangle ABC,* (Fig. 81), *deux angles droits.* Si les angles A, & B, étoient droits, les trois ensemble A, B, C, vaudroient plus de deux droits.

## COROLLAIRE V.

185. *Les angles A, C, adjacens à l'hypothenuse d'un Triangle rectangle ABC,* (Fig. 83.) *sont aigus.* Le troisiéme angle B étant droit, les deux A, C, pris ensemble, ne peuvent valoir qu'un angle droit, & par conséquent chacun d'eux est aigu; il en est de même d'un Triangle obtusangle ABC, dont les angles A, C sont aigus (*Fig.* 84.).

## COROLLAIRE VI.

186. Deux angles A, C d'un Triangle ABC, (*Fig.* 81.) étant connus, le troisiéme B sera connu facilement, en ajoûtant à la somme des deux angles A, C, son *complement* à 180 degrez, c'est-à-dire ce qui lui manque pour faire deux angles droits. Ainsi si l'angle A est, par exemple, de 40 degrez, & l'angle C de 80, ajoûtant 80 à 40, on aura 120 degrez; donc le troisiéme angle B sera de 60 degrez, parce que 120 & 60 sont 180 degrez, ou deux angles droits.

## COROLLAIRE VII.

187. *Si deux Triangles ABC, abc* (Fig. 85.) *ont deux angles égaux, chacun à chacun, l'angle A égal à l'angle* a, *& l'angle C égal à l'angle* c, *le troisiéme angle B sera égal au troisiéme angle* b; La somme des angles A, B, étant égale à la somme des angles *a, b*, le *complement* de l'une à 180 degrez, sera égal au *complement* de l'autre, & par conséquent le troisiéme angle B égal au troisiéme angle *b*.

## COROLLAIRE VIII.

188. *Dans tous Triangles ABC,* (Fig. 81.) *les plus grands angles sont opposez aux plus grands côtez, & les plus grands côtez aux plus grands angles.* Faisant passer un cercle par les trois sommets A, B, C, si l'angle C, par exemple, est plus grand que chacun des deux autres A, B, qui ont leur sommet à la circonference de même que lui, il embrassera nécessairement un plus grand arc,

& par conſéquent la corde AB de cet arc, qui eſt le côté oppoſé à cet angle, ſera plus grande que la corde AC, ou la corde BC, qui ſont les côtez oppoſez aux deux autres angles. De même ſi la corde AB eſt plus grande que chacune des cordes AC, BC, l'angle C ſera plus grand que chacun des angles A, B. On prouvera de la même façon, que les plus petits angles ſont oppoſez aux plus petits cotez, & les plus petits côtez aux plus petits angles, & enfin que les angles égaux ſont oppoſez à côtez égaux, de même que les côtez égaux ſont oppoſez à angles égaux.

## PROBLEME XXXIII.

189. *Connoiſſant deux côtez AB, AC d'un Triangle ABC, & l'angle A compris par ces deux côtez, conſtruire un autre Triangle qui lui ſoit égal & équiangle.* (Fig. 85.)

Tirez une ligne *ac* égale au côté donné AC, faites à l'extrêmité *a* l'angle *a* égal à l'angle A, menant le côté *ab*, que vous ferez égal au côté AB; enfin joignez les extrêmitez *b*, *c*, par la ligne droite *bc*, & le Triangle *abc* ſera égal & équiangle au Triangle ABC.

### DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit que le Triangle *abc* ſoit poſé ſur le Triangle ABC, en ſorte que le côté *ac* tombe ſur le côté AC, l'angle *a* tombera ſur l'angle A qui lui eſt égal, & le côté *ab* ſur le côté AB qui lui eſt auſſi égal par la conſtruction; donc les extrêmitez *b*, *c*, tomberont ſur les extrêmitez B, C, & par conſéquent la droite *bc* tirée entre ces deux extrêmitez, tombera ſur la droite BC, tirée entre ces mêmes extrêmitez; donc les deux Triangles auront les trois côtez égaux chacun à chacun, & ſeront égaux & équiangles.

*Deux Triangles ſont donc égaux, lorſqu'ils ont deux côtez égaux chacun à chacun, & l'angle compris égal à l'angle compris ſous ces côtez.*

## PROBLEME XXXIV.

190. *Un côté AC d'un Triangle ABC,* (Fig. 85.) *étant connu, & deux de ſes angles, conſtruire un autre Triangle qui lui ſoit égal & équiangle.*

Ou les deux angles connus ſont adjacens au côté donné AC, ou l'un eſt adjacent, & l'autre ne l'eſt pas.

Si les deux angles ſont adjacens, comme les angles A, C,

tirez une ligne *ac* égale à la ligne AC ; faites à l'extrêmité *a* l'angle *a* égal à l'angle A avec la ligne indéterminée *ae*, & à l'extrêmité *c* l'angle *c* égal à l'angle C, avec la ligne indéterminée *cf* ; les deux lignes *ae*, *cf* se couperont en un point *b*, & vous aurez le Triangle *abc* égal & équiangle au Triangle ABC.

### DEMONSTRATION.

Concevez que le Triangle *abc* soit transporté sur le Triangle ABC, de sorte que le côté *ac* tombe sur son égal AC, l'angle *a* tombera sur l'angle A qui lui est égal, & l'angle *b* sur l'angle B son égal ; ainsi les côtez *ab*, *cb*, tomberont sur les côtez AB, CB, & par conséquent leur point de section *b*, tombera sur le point de section B ; donc les deux Triangles auront les trois côtez égaux chacun à chacun ; donc ils seront égaux & équiangles.

Si l'un des deux angles connus A est adjacent au côté connu AC, & l'autre B ne l'est pas, prenez une ligne *ac* égale au côté connu AC, faites à l'extrêmité *a* l'angle *a* égal à l'angle A, avec la ligne indéterminée *ae* Ensuite mesurez les deux angles A, B, & prenant leur somme, faites à l'extrêmité *c* avec la ligne indéterminée *cf*, l'angle *c* égal au *complement* de cette somme, à 180 degrez, c'est-à-dire, égal à ce qui manque à cette somme pour faire deux angles droits, les lignes *ae*, *cf*, se couperont en un point *b* & vous aurez le Triangle *abc* égal & équiangle au Triangle ABC.

### DEMONSTRATION.

Concevez que le Triangle *abc* soit transporté sur le Triangle ABC, en sorte que le côté *ac* tombe sur son égal AC, l'angle *a* tombera sur l'angle A qui lui est égal, & l'angle *c* sur l'angle C qui lui est aussi égal ; car l'un & l'autre de ces angles sont le *complement* des deux angles A, B à 180 degrez ; donc les côtez *ab*, *bc*, tomberont sur les côtez AB, BC, & le point de section sur le point de section *b*, & par conséquent l'angle *b* sera aussi égal à l'angle B, & les deux Triangles seront parfaitement égaux & équiangles.

*Donc deux Triangles sont égaux & équiangles, lorsqu'ils ont un côté égal, & deux angles égaux.*

## SECTION VII.

### *Des figures planes considerées par rapport à leurs côtez & à leurs angles.*

### DEFINITION XLIII.

191. Tout espace plan fermé par plusieurs lignes s'appelle *figure plane ;* ainsi les Triangles dont nous venons de parler, est au nombre des figures, & c'est la plus simple qu'on puisse faire, parce qu'il faut au moins trois lignes droites pour renfermer un espace de toutes parts. Nous allons parler dans cette Section des autres figures.

### DEFINITION XLIV.

192. Le *quadrilatere* est une figure de quatre côtez, laquelle s'appelle *quarré*, quand ses quatre côtez sont égaux, & ses quatre angles droits (*Fig.* 86.). *Rhombe* ou *lozange*, quand ses quatre côtez sont égaux, & que les quatre angles ne sont pas droits (*Fig.* 87.); *quarré long*, *oblong*, ou *rectangle*, quand les côtez opposez sont paralleles & égaux, & les quatre angles droits (*Fig.* 88.) *Rhomboïde* ou *parallelograme*, quand les côtez opposez sont paralleles & égaux, & que les quatre angles ne sont pas droits (*Fig.* 89.); *trapeze*, quand il n'y a point de côtez paralleles entr'eux (*Fig.* 91.); & enfin *trapezoïde*, quand il y a deux cotez paralleles. (*Fig.* 90.)

### DEFINITION XLV.

193. Le *pentagone* est une figure de cinq côtez, l'*hexagone* de six, l'*eptagone* de sept, l'*octogone* de huit, l'*enneagone* de neuf, le *décagone* de dix, l'*ondecagone* de onze, & le *dodecagone* de douze. Les autres figures qui ont un plus grand nombre de côtez, s'appellent du nombre de leurs côtez; ainsi l'on dit une figure de 13 côtez de 14, de 15, &c.

### DEFINITION XLVI.

194. Toutes les figures, en général, s'appellent *polygones*, & ces *polygones* peuvent être ou *reguliers*, ou *irreguliers*. Les *polygones reguliers* sont des figures qui ont tous leurs côtez & leurs angles égaux, & les *polygones irreguliers* sont des figures qui n'ont pas tous leurs côtez ni tous leurs angles égaux.

DEFIN-

## DEFINITION XLVII.

195. L'espace fermé par les côtez d'une figure, *s'appelle aire* de la figure, & les côtez pris ensemble, s'appellent *contour* ou *perimetre*.

## DEFINITION XLVIII.

196. Toute ligne AC tirée de l'angle A d'une figure à un angle opposé C, se nomme diagonale (*Fig.* 86, 87, 88, 89, 90, 93).

## PROBLEME XXXVI.

197. *Connoître la valeur des quatre angles ensemble d'un quadrilatere ABCD, dont les angles ne sont pas droits.* (Fig. 87, 89, 90.)

Tirez la diagonale AC, qui divisera le quadrilatere en deux triangles ABC, ADC, dont les six angles pris ensemble, seront égaux aux quatre angles du quadrilatere; & comme dans tout triangle les trois angles pris ensemble valent deux droits (*n.* 181.) vous connoîtrez que les six angles des deux triangles valent ensemble quatre angles droits, & que par conséquent les quatre angles du quadrilatere pris ensemble, valent aussi quatre angles droits.

## COROLLAIRE I.

198. Si en faisant passer un cercle par les trois points A, B, C, de l'un des triangles ABC, faits par la diagonale, il se trouve que ce cercle passe aussi par le sommet D de l'autre ADC; (*Fig.* 92.) alors les angles opposez B, D, pris ensemble, valent deux droits; car l'angle B ayant son sommet à la circonference, vaut la moitié de l'arc CDA, qu'il embrasse, & par la même raison l'angle D, vaut la moitié de l'arc CBA; or la moitié de l'arc CDA, plus la moitié de l'arc CBA, valent la moitié de la circonference, puisque ces deux arcs font la circonference entiere; donc les deux angles B, D, pris ensemble, valent la moitié de la circonference ou deux angles droits. On prouvera de même que les deux angles opposez BCD, BAD, valent deux angles droits: d'où il suit que *dans tout quadrilatere inscrit au cercle, les angles opposez valent toujours ensemble deux angles droits.*

## COROLLAIRE II.

199. *La diagonale AC d'un quarré ABCD,* (Fig. 86.) *partage ce quarré en deux triangles ABC, ADC, isosceles, égaux & équiangles entr'eux.*

Premierement, ils sont isosceles, le premier ayant deux côtez

AB, BC, égaux, & le second, deux côtez AD, DC, qui sont aussi égaux; en second lieu, ils sont égaux & équiangles entr'eux, puisqu'ils ont le côté AC commun, & les côtez AB, BC égaux aux côtez AD, DC chacun à chacun.

## COROLLAIRE. III.

200. *La diagonale AC d'un quarré ABCD, divise chacun des angles A, C, par où elle passe en deux angles égaux.* Le triangle ABC étant isoscele, & l'angle ABC étant droit, les deux angles BAC, BCA pris ensemble, valent un angle droit; donc chacun d'eux vaut un demi-droit; donc l'angle BCA ne vaut que la moitié de l'angle BCD, & l'angle BAC la moitié de l'angle BAD; donc les angles BCD, BAD, sont divisez en deux également.

## COROLLAIRE IV.

201. *Les deux Diagonales AC, BD d'un quarré, le partagent en quatre triangles isosceles, égaux & équiangles, & ces diagonales se coupent chacune en deux parties égales.* 1°. Ils sont Isosceles; car dans le triangle BOC, l'angle OBC fait par la diagonale BD, est demi-droit par le Corollaire précedent, & l'angle OCB l'est aussi, puisqu'il est fait par la diagonale AD; donc ces deux angles sont égaux, & les côtez BO, OD, qui leur sont opposez, le sont aussi (*n* 188.); donc le triangle BOC, est isoscele: on prouvera facilement la même chose des trois autres triangles. 2°. Les quatre triangles sont égaux & équiangles entr'eux; le triangle BOC & le triangle BOA, ont le côté BO commun, le côté BC égal au côté BA, & l'angle OBC compris sous les deux côtez OB, BC, égal à l'angle OBA, compris sous les deux côtez OB, BA; donc ces deux triangles sont parfaitement égaux & équiangles entr'eux (*n.* 189.). On prouvera de même que le triangle AOD est égal & équiangle au triangle AOB, & par conséquent au triangle BOC, & que le triangle COD est égal & équiangle au triangle AOD; d'où il suit que les quatre triangles sont égaux & équiangles entr'eux. 3°. Les diagonales AC, BD, se coupent chacune en deux parties égales. Dans le triangle isoscele BOC, les côtez OB, OC, sont égaux, étant opposez à angles égaux, & dans le triangle isoscele BOA, les côtez BO, OA, sont aussi égaux par la même raison; donc les trois côtez CO, BO, AO, sont égaux, & par conséquent la diagonale AC, est divisée en deux parties égales AO, OC au point O. De même

dans le triangle AOD, les côtez AO, OD opposez à angles égaux, sont égaux; or AO est égal à BO, donc DO est égal à BO, & la diagonale BD est aussi divisée en deux également.

## COROLLAIRE V.

202. *Le rhombe est divisé en deux triangles isosceles, égaux & équiangles par la diagonale AC.* (Fig. 87.) Ces triangles ont le côté AC commun, & les deux côtez, AB, BC, égaux aux deux côtez AD, DC, par la définition du rhombe; donc ils sont égaux. Et si par les sommets BD de ces deux triangles on tire l'autre diagonale BD, elle coupera la premiere AC en deux parties égales, & en sera coupée aussi en deux également; car ses deux extrêmités B, D, étant également éloignées des extrêmités A, C de la diagonale, tous ses points en seront également éloignés; ainsi CO sera égal à OA, & de même les extrêmités A, C de la diagonale AC, étant également éloignées des extrêmités B, D de la diagonale BD, tous ses points en seront également éloignés, & BO sera égal à OD. Enfin ces deux diagonales divisent le rhombe en quatre triangles scalenes, égaux & équiangles; car les triangles OCD, OCB, ont le côté OC commun, & les deux côtez OD, CD, égaux aux deux côtez OB, BC, chacun à chacun, ce qui les rend égaux & équiangles, & il est facile de voir que les triangles OAB, OAD, sont égaux & équiangles à ces deux-ci. De plus, ces quatre triangles sont nécessairement scalenes; autrement la moitié d'une diagonale devroit être égale à la moitié de l'autre, & alors il arriveroit que les quatre angles du rhombe seroient droits, comme on a vû dans les Corollaires précédens, ce qui est contre la définition du rhombe.

## COROLLAIRE VI.

203. *Le rectangle* (Fig. 88.), *est divisé par la diagonale AC en deux triangles ABC, ADC scalenes, égaux & équiangles.* Le côté AC est commun, le côté BC est égal à son opposé AD, & le côté BA égal à son opposé CD; donc les triangles sont équiangles & égaux: ils sont d'ailleurs scalenes; car n'y ayant dans le rectangle que les côtez opposés qui soient égaux, il est évident que le triangle ABC a deux côtez inégaux AB, BC, & que le triangle ADC en a aussi deux inégaux AD, DC; quant à la diagonale elle est nécessairement plus grande que chacun de ces côtez,

parce qu'elle eſt oppoſée à l'angle droit, qui eſt le plus grand angle que chacun des triangles puiſſe avoir. Ce que nous venons de dire du rectangle, peut ſe dire du parallelograme (*Fig.* 89.), excepté dans certains cas, où la diagonale AC ſe trouve égale à l'un des côtez; car alors les deux triangles ABC, ADC ſont iſoſceles.

## COROLLAIRE VII.

204. *Daus le rectangle & le parallelograme* (Fig. 88, 89.) *les deux diagonales AC, BD, ſe coupent mutuellement en deux parties égales.* Ces deux figures ayant les côtez oppoſés égaux & paralleles, les deux triangles BOC, AOD, ont le côté BC égal au côté AD, l'angle OBC égal à ſon alterne ODA, & l'angle OCB égal à ſon alterne OAD, & par conſéquent ces deux triangles ſont égaux & équiangles (*n.* 190.); donc le côté AO oppoſé à l'angle ODA, eſt égal au côté OC, oppoſé à l'angle alterne OBC, & par conſéquent la diagonale AC eſt diviſée en deux parties égales. De même le côté OB oppoſé à l'angle BCO, eſt égal au côté OD, oppoſé à l'angle alterne OAD, & par conſéquent la diagonale BD eſt diviſée auſſi en deux parties égales. Nous démontrerons ailleurs que les deux diagonales diviſent ces deux figures en quatre triangles égaux, quoiqu'ils ne ſoient pas équiangles; ce qui dépend de certains principes, dont nous n'avons pas encore parlé.

## PROBLEME XXXVII.

205. *Un polygone quelconque étant donné, trouver la valeur de ſes angles pris enſemble.*

Soit le pentagone irregulier ABCD (*Fig.* 93.) de l'un de ſes angles C, tirez aux angles oppoſés les diagonales CA, CE, qui diviſeront le polygone en autant de triangles qu'il a de côtez moins deux; ce qui arrivera de même dans toute figure de pluſieurs côtez, parce qu'il faut deux côtez pour faire un triangle avec la premiere diagonale à gauche, ou la premiere à droite, au lieu qu'il n'en faut qu'un pour faire un triangle avec les diagonales du milieu. Puis donc que tout polygone peut ſe diviſer en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux, & que dans tout triangle les trois angles pris enſemble, valent deux angles droits, il s'enſuit que les angles du polygone qui, pris enſemble, ſont égaux aux angles des triangles dont il eſt compoſé, valent aus-

tant de fois deux angles droits, qu'il a de côtés moins deux fois deux angles droits, c'eſt-à-dire moins quatre angles droits : ainſi dans l'exemple propoſé, le polygone ayant cinq côtés, ſes angles pris enſemble, valent cinq fois deux, ou dix angles droits moins quatre, ce qui fait ſix angles droits.

### *Autrement.*

Prenez dans l'aire du polygone un point quelconque O, d'où vous tirerez les lignes OA, OB, OC, OD, OE, qui diviſeront le polygone en autant de triangles, qu'il a de côtés; & comme ces triangles ont tous leurs ſommets au point O, il eſt évident que les angles du polygone pris enſemble, ne valent que la ſomme des angles de leurs baſes; or tous les angles de ces cinq triangles valent dix angles droits, ôtant donc de ces dix angles droits la valeur des angles au ſommet O, qui eſt de quatre angles droits, parce qu'ils embraſſent une circonference entiere, il reſte 6 angles droits pour la valeur des angles du polygone, ce qui confirme la regle ci-deſſus, que *les angles d'un polygone valent autant de fois deux angles droits, qu'il a de côtez moins quatre angles droits.*

### COROLLAIRE.

206. Un polygone régulier ABCDE étant donné (*Fig. 95.*), ſi au lieu de prendre dans ſon aire un point à diſcretion, on diviſe tous ſes angles en deux parties égales, il ſera diviſé en autant de triangles iſoſceles égaux & équiangles qu'il a de côtés, & ces triangles auront leurs ſommets à un même point O, qui ſera également éloigné des angles du polygone. Premierement, les lignes de diviſion formeront des triangles; car l'angle BAE vaut moins que deux angles droits; donc l'angle OAE qui eſt la moitié de l'angle BAE, vaut moins qu'un angle droit, & par conſéquent ſon côté OA eſt incliné ſur AE du côté de l'extrêmité E; par la même raiſon la ligne OE eſt inclinée ſur AE du côté de l'extrêmité A; donc les deux lignes AO, OE doivent ſe rencontrer en un point O, & former un triangle avec la ligne AE; il en eſt de même des autres lignes de diviſion OD, OC, &c. ſecondement les triangles ſont iſoſceles; car dans le triangle AOE, les deux angles OAE, OEA ſur la baſe, ſont égaux, étant moitié des angles BAE, DEA, qui ſont égaux, attendu que le polygone eſt régulier (*n.* 194.). 3°. Ces triangles ſont égaux & équian-

gles, puiſqu'ils ont la baſe égale, & les deux angles adjacens à la baſe égaux chacun à chacun (*n.* 190.). 4°. enfin, le point O eſt également éloigné des angles du polygone; car les lignes AO, OB, OC, &c. ſont égales, comme on vient de voir.

## DEFINITION XLIX.

207. Dans tout polygone regulier, dont les angles ſont diviſés en deux parties égales, l'angle AOE s'appelle *angle au centre*, l'angle OAE, ou OEA, *angle à la baſe*, l'angle BAE, *angle de la figure*, ou du polygone, la ligne OA *rayon*, & la perpendiculaire OL tirée du centre O ſur un des côtés, *rayon droit* ou *apoteme*.

## PROBLEME XXXVIII.

208. *Un polygone ABCDE étant donné* (Fig. 95.), *connoître l'angle du centre, l'angle à la baſe, & l'angle de la figure.*

Du centre O décrivez la circonference ABCDE, qui paſſe par tous les angles de la figure, & les cinq côtés du polygone diviſeront la circonference de ce cercle en autant d'arcs égaux. Ainſi ſuppoſant que la figure ſoit un pentagone, l'angle du centre AOE vaudra la cinquiéme partie de la circonference, ou 72 degrez. Or ſi l'angle AOE vaut 72 degrez, les deux autres angles OAE, OEA du triangle AOE, vaudront enſemble 108 degrez; car 108 & 72 font 180 degrez, ou deux angles droits. Mais ces deux angles OAE, OEA ſont égaux; donc chacun d'eux vaut la moitié de 108 degrez, c'eſt-à-dire 54 degrez, & par conſéquent l'angle de la baſe eſt de 54 degrez; enfin doublant 54, ce qui fait 108, on aura la valeur de l'angle BAE de la figure.

C'eſt par ce moyen qu'on a calculé la Table ſuivante qui marque les angles au centre, à la baſe, & ceux de la figure pour les polygones, depuis le triangle juſqu'au dodecagone.

| | Angle du Centre | Angle de la Base. | Angle du Polygone |
|---|---|---|---|
| Triangle | 120 D. | 30 | 60 |
| Quarré | 90 | 45 | 90 |
| Pentagone | 72 | 54 | 108 |
| Hexagone | 60 | 60 | 120 |
| Eptagone | $51\frac{3}{7}$ | $64\frac{2}{7}$ | $128\frac{4}{7}$ |
| Octogone | 45 | $67\frac{1}{2}$ | 135 |
| Enneagone | 40 | 70 | 140 |
| Decagone | 36 | 72 | 144 |
| Ondecagone | $32\frac{7}{11}$ | $73\frac{7}{11}$ | $147\frac{3}{11}$ |
| Dodecagone | 30 | 75 | 150 |

## PROBLEME XXXIX.

209. *Le côté d'un polygone étant donné, décrire ce polygone.*

Soit AE le côté donné d'un pentagone (*Fig.* 95.), la Table précédente faisant voir que l'angle à la base de ce polygone, est de 54 degrez, faites aux deux extrêmités A, E, du côté donné AE un angle de 54 degrez, & vous aurez le triangle isoscele AEO, du sommet duquel O & de l'intervalle OA, vous décrirez le cercle ABCDE, sur lequel vous porterez la corde AE encore quatre fois, & la circonference sera divisée en cinq parties égales; tirant donc par les points de division les droites ED, DC, &c. vous aurez le pentagone demandé.

### DEMONSTRATION.

Le triangle isoscele AOE est nécessairement égal & équiangle à l'un des triangles isosceles, qui composent le pentagone demandé; car sa base AE est égale au côté du pentagone par la supposition, & les angles sur cette base sont égaux par la construction aux angles à la base de ce polygone; donc l'angle au sommet AOE,

eſt égal à l'angle au centre, & vaut par conſéquent 72 degrez, ou la cinquiéme partie de la circonference. Donc ſi du centre O & de l'intervalle OA, on décrit un cercle, l'arc AE ſera la cinquiéme partie de la circonference, & par conſéquent cet arc étant porté encore quatre fois ſur la circonference, elle ſera diviſée en cinq parties égales; donc les cordes de ces cinq arcs ſeront égales, & la figure qu'elles formeront, ſera un pentagone regulier.

## REMARQUE.

210. Cette méthode ſeroit très-commode, ſi les angles à la baſe de tous les polygones valoient toujours un certain nombre de degrez ſans fraction; mais comme il y en a qui ont des fractions à ces angles, tels que ſont l'eptagone, l'octogone, & l'ondecagone; le plus court dans ces occaſions, eſt de diviſer le cercle en tâtonnant, ou de ſe ſervir du compas de proportion, comme nous l'enſeignerons ailleurs: Nous parlerons encore de cette matiere lorſque nous traiterons de l'inſcription & de la circonſcription des figures autour d'un cercle.

## PROBLEME XL.

211. *Le rayon d'un polygone étant donné, décrire ce polygone.*

Soit OA le rayon d'un pentagone, faites à ſon extrêmité O un angle de 72 degrez, parce que ſelon la Table ci-deſſus, l'angle au centre d'un pentagone en vaut un pareil nombre, faites la jambe OE égale à la jambe OA; puis du centre O & de l'intervalle OA, décrivant le cercle ABCDE, portez cinq fois ſur ſa circonference la diſtance AE, & tirez par les points de diviſion les droites AE, ED, DC, &c. qui formeront le pentagone demandé.

## DEMONSTRATION.

Le rayon AE étant égal au rayon du pentagone, ſa circonference doit être égale à la circonference qui paſſe par les angles de ce polygone; ainſi l'angle AOE, qui a été fait de 72 degrez, embraſſe la cinquiéme partie de cette circonference, & par conſéquent ſa corde AE eſt égale au côté du pentagone; donc cette corde étant portée cinq fois ſur la circonference, doit former le pentagone requis.

PROBL.

## PROBLEME XLI.

212. *Le rayon droit ou* apotheme *d'un polygone étant donné, décrire le polygone.* (Fig. 95.)

Soit OH l'apotheme d'un pentagone, puiſque l'angle au centre eſt de 72 degrez, faites à l'extrêmité O deux angles AOH, EOH de 36 degrez chacun, l'un à gauche & l'autre à droite; ce qui fera l'angle total AOE de 72 degrez. A l'extrêmité H élevez la perpendiculaire AHE, que vous prolongerez de part & d'autre juſqu'à ce qu'elle coupe les jambes OA, OE, & vous aurez le triangle AEO, qui ſera égal & équiangle à l'un des cinq triangles égaux du pentagone; donc du centre O & de l'intervalle OA décrivant un cercle, & portant ſur ſa circonference la corde AE cinq fois, vous aurez le pentagone demandé.

### DEMONSTRATION.

Les deux triangles AOH, EOH, ſont égaux & équiangles, parce qu'ils ont le côté OH commun, l'angle AOH égal à l'angle EOH par la conſtruction, & l'angle droit AHO égal à l'angle droit EHO; ainſi le côté AO eſt égal au côté EO, & le côté AH égal au côté EH; donc le triangle total AOE eſt iſoſcele, & ſa baſe AE eſt diviſée en deux parties égales AH, HE. Or les triangles dont le pentagone eſt compoſé, ſont auſſi iſoſceles, comme on l'a prouvé dans les Problemes précédens, & leurs baſes ſont diviſées en deux parties égales par l'apotheme, à cauſe que cet apotheme leur eſt perpendiculaire, & qu'il paſſe par le centre. Donc ſi on met le triangle AOE ſur l'un des triangles du pentagone, l'angle du ſommet AOE tombera ſur l'angle du centre, l'un & l'autre de ces angles étant de 72 degrez, la perpendiculaire AH tombera ſur l'apotheme qui lui eſt égal par la ſuppoſition, & la baſe AE tombera ſur la baſe, & lui ſera égale; donc les deux triangles ſeront parfaitement égaux & équiangles, & par conſéquent la circonference ABCDE, ſera égale à celle qui paſſe par les angles du pentagone, & la figure ABCDE ſera le pentagone demandé

### COROLLAIRE.

213. Il ſuit de-là que *ſi deux triangles iſoſceles ont l'angle du ſommet égal à l'angle du ſommet, & la perpendiculaire tirée ſur la baſe*

*égale à la perpendiculaire tirée sur la base, ils sont parfaitement égaux & équiangles.*

## REMARQUE.

214. Les pratiques des deux derniers Problêmes souffrent la même difficulté que celle du Probleme 39, à cause qu'il y a des polygones dont les angles ont des fractions, ce qui demande une grande exactitude pour les prendre dans toute leur justesse.

## PROBLEME XLII.

215. *Le côté AD d'un quarré étant donné, décrire ce quarré* (Fig. 86).

Elevez à l'extrêmité A la perpendiculaire AB, que vous ferez égale au côté donné AD, puis des points B, D pris pour centres, & d'un rayon égal au côté AD, decrivez deux arcs qui s'entrecouperont en un point C, où vous tirerez par les extrêmités B, D, les lignes BC, DC, ce qui vous donnera le quarré demandé ABCD.

### DEMONSTRATION.

Tirez la ligne droite BD, cette ligne sera plus courte que les deux BA, AD, qui ne prennent pas le plus court chemin entre les points B, D, & par conséquent elle sera plus courte que les deux BC, CD, qui par la construction sont égales aux deux AB, AD; d'où il suit que le point C doit être hors de la ligne BD, & que par conséquent les trois lignes BD, BC; DC, forment un triangle (*n.* 175.). Or ce triangle BCD est égal & équiangle au triangle BAD, l'un & l'autre ayant le côté BD commun, & les deux côtez BC, CD égaux aux côtez BA, AD, chacun à chacun; de plus le triangle BAD ayant l'angle du sommet A droit, & étant isoscele à cause des côtez égaux AD, AB, ses deux angles sur la base sont chacun de 45 degrez; donc le triangle BCD a aussi l'angle au sommet C droit, & ses deux angles sur la base chacun de 45 degrez; d'où il suit que les quatre angles de la figure ABCD sont droits; mais la figure ABCD a aussi ses quatre côtez égaux chacun au côté donné AD par la construction; donc cette figure est le quarré demandé.

### COROLLAIRE.

216. Les deux côtez inégaux AB, AD d'un rectangle étant

donnés (*Fig.* 88.), si l'on veut décrire ce rectangle, on élevera la ligne AB perpendiculaire sur l'extrêmité A de la ligne AD; puis du point B pris pour centre, & d'un rayon égal à la ligne AD, on décrira un arc; ensuite du point D pris pour centre, & d'un rayon égal à la ligne AB, on décrira un autre arc qui coupera le premier en un point C par où on tirera les droites CB, CD qui formeront le rectangle requis ABCD; car premierement les côtés opposés BC, AD, seront égaux, de même que les opposés AB, DC par la construction. 2°. Ils seront paralleles, parce que les triangles ABD, BCD étant égaux & équiangles, à cause qu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun, l'angle DBC est égal à son alterne BDA, & par la même raison l'angle BDC est égal à son alterne DBA, ce qui n'arrive qu'entre les paralleles. 3°. Les quatre angles de la figure ABDC seront droits; car les triangles ABD, BCD égaux & équiangles, ayant chacun un angle droit, leurs angles sur la base pris ensemble, valent un angle droit dans chacun d'eux; or à cause des paralleles AB, DC, l'angle ABD est égal à son alterne BDC; donc puisque les deux angles CBD, CDB valent ensemble deux droits, si au lieu de l'angle CDB on met son égal ABD, on aura les deux angles ABD, CBD, c'est-à-dire, l'angle entier ABC égal à un angle droit; on prouvera de même que l'angle ADC est aussi droit, & que par conséquent la figure ABCD est le rectangle requis.

## PROBLEME XLIII.

217. *Les deux côtez inégaux AB, AD d'un parallelograme étant donnés* (Fig. 89), *& l'angle BAD compris sous ces deux côtez, décrire le parallelograme.*

Faites avec les deux lignes AB, AD, l'angle BAD égal à l'angle donné; puis du point B pris pour centre, & d'un rayon égal à la ligne AD, décrivez un arc, ensuite du point D pris pour centre, & d'un rayon égal à la ligne AB, décrivez un autre arc qui coupera le premier en un point C, par où vous tirerez les lignes BC, BD, & vous aurez la figure ABCD, qui sera le parallelograme requis.

La démonstration de ceci est évidente par les deux Problemes précédens.

### COROLLAIRE I.

218. *Dans tout parallelograme les angles faits sur un même côté;*

*valent enſemble deux droits.* Prolongeant l'un des côtés AD, l'angle interieur BAD eſt égal à l'angle exterieur CDE, à cauſe des paralleles AB, DC; or les deux angles CDA, CDE, valent enſemble deux droits, étant faits par une ligne droite CD qui tombe ſur la droite AE. Mettant donc au lieu de l'angle CDE, l'angle BAD ſon égal, les deux angles BAD, CDA ſeront égaux à deux droits.

### COROLLAIRE II.

219. *Dans tout parallelograme les angles oppoſés ſont égaux.* Les deux BAD, CDA, ſont égaux à deux droits, parce qu'ils ſont ſur un même côté; par la même raiſon les deux CDA, BCD, ſont auſſi égaux à deux droits: ôtant donc de part & d'autre l'angle CDA, il reſtera l'angle BAD égal à ſon oppoſé BCD. On prouvera de même que l'angle ABC eſt égal à ſon oppoſé ADC.

## SECTION VIII.

### *Des quatre operations de l'Arithmetique ſur les lignes.*

### PROBLEME XLIV.

220. *Ajoûter une ligne AB à une ligne CD, & ſouſtraire une ligne AB d'une ligne CD* (Fig. 96.).

Pour ajoûter la ligne AB à la ligne CD, prolongez la ligne CD juſqu'à ce que ſon prolongement DE ſoit égal à la ligne AB, & la ligne CE ſera la ſomme des deux AB, CD.

Pour ſouſtraire la ligne AB de la ligne CD, portez la grandeur AB ſur CD, de D en F, & la partie FC ſera le reſte de la ſouſtraction.

Ces deux operations ſont évidentes par elles-mêmes, & n'ont pas beſoin d'être démontrées; mais il n'en eſt pas de même de la multiplication des lignes & de leur diviſion, dont nous allons parler.

### PROBLEME XLV.

221. *Multiplier une ligne AB par une autre ligne AC.* (Fig. 97.)

Elevez la ligne AB perpendiculairement ſur la ligne AC à ſon extrêmité A, puis achevez le rectangle ABCD, lequel ſera le produit des deux lignes AB, AC.

DEMONSTRATION.

Multiplier une grandeur par une autre, c'eſt prendre cette grandeur autant de fois que l'autre a d'unités, ainſi que nous avons dit dans notre Arithmetique des Géometres. Or ſi l'on conçoit que la ligne AC ſoit diviſée en une infinité de parties égales entr'elles, & moindres chacune que tout ce qu'on peut aſſigner, ces parties ſeront les élemens, ou les unités de cette ligne; donc ſi l'on conçoit encore que ſur chacun de ces élemens il s'éleve une perpendiculaire égale à la ligne AB, la ſomme de ces perpendiculaires ſera le produit de la ligne AB par la ligne AC, parce qu'on aura autant de fois la ligne AB, qu'il y a d'unités dans la ligne AC; or ces perpendiculaires rempliront totalement le rectangle ABCD, & par conſéquent leur ſomme ſera égale au rectangle; donc le rectangle eſt le produit de la ligne AB par la ligne AC.

REMARQUE I.

222. Pour faire le produit de deux lignes, il faut néceſſairement que l'une ſoit perpendiculaire ſur l'autre; car ſi la ligne AB étoit oblique ſur AC (*Fig* 98.) le parallelograme ABCD, ſeroit moindre que le produit des deux lignes; & pour le démontrer, tirez de l'un des angles C la perpendiculaire CE, ſur le côté oppoſé AB, cette perpendiculaire ſera plus courte que la ligne AC, qui eſt oblique ſur le même côté AB, & qui part du même point C (*n.* 53.). Donc ſi l'on conçoit que la ligne CE ſoit diviſée en élemens égaux aux élemens de la ligne AC, elle en contiendra néceſſairement moins que la ligne AC, & par conſéquent ſi on conçoit encore que ſur tous les élemens de la ligne CE, il s'éleve des perpendiculaires égales chacune à la ligne AB, leur ſomme ſera moindre que la ſomme des perpendiculaires qui rempliſſent le rectangle ABCD (*Fig.* 97); or la ſomme des perpendiculaires ſur CE, rempliſſant le parallelograme, eſt égale à ce parallelograme, & la ſomme des perpendiculaires ſur AC (*Fig.* 97.), rempliſſant le rectangle, eſt égale au rectangle; donc le parallelograme eſt moindre que le rectangle, & par conſéquent moindre que le produit des deux lignes AB, AC, auquel le rectangle eſt égal.

## REMARQUE II.

223. Plus la ligne AB sera oblique sur AC, plus la perpendiculaire CE deviendra courte, parce que la ligne AB en s'inclinant davantage sur AC, approche aussi davantage du point C, & par conséquent la perpendiculaire qui marque la distance de cette ligne au point C, devient plus courte. D'où il suit que la perpendiculaire CE (*Fig. 99*), contient encore moins d'élemens que la perpendiculaire CE (*Fig. 98.*), & que le parallelograme ABCD (*Fig. 99.*), est encore moindre que le parallelograme ABCD (*Fig. 98.*).

## REMARQUE III.

224. Les lignes qui rempliſſent le rectangle (*Fig. 97.*), & celles qui rempliſſent les parallelogrames (*Fig. 98, 99.*), ſont paralleles entr'elles, étant toutes perpendiculaires ſur une même ligne, & elles ſe touchent dans toute leur longueur; donc ces perpendiculaires venant à tomber ſur les baſes de ces trois figures, les couvrent totalement. Mais ces baſes ſont égales entr'elles. Donc puiſqu'il y a plus de lignes dans le rectangle que dans le parallelograme (*Fig. 98*), il faut néceſſairement que les lignes du rectangle prennent des points moindres ſur la baſe du rectangle que ceux que les lignes du parallelograme prennent ſur ſa baſe, & par la même raiſon les lignes du parallelograme (*Fig 98.*), prennent des moindres points que celles du parallelograme (*Fig. 99.*). Ainſi voilà des points moindres & plus grands qu'il faut admettre dans la Geometrie, quoique ces points ſoient tous moindres que tout ce qu'on peut aſſigner.

### *Reponſe à une Objection.*

On pourra me dire que, quoique la perpendiculaire CE ſoit plus courte que la baſe AC, elle peut contenir un égal nombre d'élemens, mais moindres que ceux de la baſe, & que par conſéquent élevant des perpendiculaires ſur ces élemens, il y aura autant de lignes dans le parallelograme (*Fig. 98.*), que dans le rectangle; ce qui eſt vrai, parce que la matiere eſt diviſible à l'indéfini; mais cela ne fait rien à ce que nous venons de dire: car ſi on veut que la perpendiculaire CE ſoit diviſée en un nombre d'élemens égal à celui des élemens de la baſe, ces élemens étant plus petits que ceux de la baſe, les perpendiculaires élevées ſur

ces élemens, seront plus minces ou moins épaisses, & par conséquent leur somme en aura moins de largeur: d'où il suit qu'elle ne sera pas égale à celle des lignes du rectangle qui aura plus de largeur. Au reste, tout ce qu'on appelle élement, surtout en fait de Geometrie, doit être uniforme, parce que la somme des élemens est la mesure des grandeurs qui en sont composées, & qu'en fait de mesure il faut l'uniformité.

### COROLLAIRE.

225. De tous les points qu'une ligne peut prendre selon les différentes manieres dont elle tombe sur une autre, le plus petit est celui qu'elle prend lorsqu'elle est perpendiculaire; & ceux qu'elle prend en devenant oblique, sont d'autant plus grands qu'elle devient plus oblique.

## PROBLEME XLVI.

226. *Multiplier trois lignes AB, AC, AD, les unes par les autres.* (Fig. 100.)

Faites d'abord le produit ABEC des deux AB, AC, comme il a été enseigné dans le Probleme précedent. Ensuite sur les quatre angles A, B, E, C, élevez à plomb & perpendiculairement les lignes AD, CM, EL, BI, égales entr'elles & à la troisiéme ligne AD, tirez par leurs extrêmités les droites DI, IL, LM, MD, & vous aurez le solide ABECMDIL, qui sera le produit des trois lignes données. Nous montrerons en parlant des solides, comment il faut faire pour élever des lignes à plomb & perpendiculairement sur une surface.

### DEMONSTRATION.

Concevez que la ligne AD soit divisée en une infinité de parties égales moindres que tout ce qu'on peut assigner, lesquelles seront ses élemens, ou ses unités, & que sur ces élemens s'élevent des surfaces perpendiculaires égales chacune à la surface ABEC, en sorte qu'elles tombent exactement les unes sur les autres, toutes ces surfaces formeront le solide ABECMDIL. Or il y aura autant de surfaces que la ligne AD a d'élemens; donc leur somme sera le produit de la surface ABEC par la ligne AD; & comme la surface ABEC est le produit des deux lignes AB, AC, le produit de cette surface par la troisiéme ligne AD; c'est-

à-dire, le solide ABECMDIL, sera par conséquent le produit des trois AB, AC, AD.

## REMARQUE.

227. De même que pour faire le produit d'une ligne AB par une autre ligne AC, il faut que ces deux lignes soient perpendiculaires entr'elles; de même aussi pour faire le produit d'une surface ABEC par une ligne AD, il faut que cette ligne soit perpendiculaire & à plomb sur cette surface; car si la ligne AD, (*Fig.* 101.) est oblique sur la surface, tirant du sommet D la perpendiculaire DH sur cette surface, cette perpendiculaire sera plus courte que la ligne AD, & par conséquent elle contiendra moins d'élemens que la ligne AD. Si donc on conçoit qu'il passe par tous les élemens de la perpendiculaire DH des surfaces qui lui soient perpendiculaires, & qui soient égales à la surface ABEC, en sorte qu'elles aboutissent à la ligne AD, la somme de ces surfaces formera le solide oblique ABECMDIL, & comme il n'y aura de surfaces dans ce solide qu'autant qu'il y a d'élemens dans la ligne DH, il s'ensuit qu'il y en aura moins que dans le solide ABECMDIL, (*Fig.* 100.) & par conséquent le solide (*Fig.* 101.) sera moindre que le solide (*Fig.* 100.), & ne sera pas le produit de la surface ABEC par la ligne AD.

D'où il suit encore que les surfaces du solide (*Fig.* 101.) prennent des points plus grands sur la ligne oblique AD, que sur la perpendiculaire DH, puisqu'elles couvrent exactement l'une & l'autre de ces lignes, quoique AD soit plus grand que DH.

## PROBLEME XLVII.

228. *Diviser une ligne AB par une autre CD.* (Fig. 102.)

Portez la ligne CD sur la ligne AB autant de fois qu'elle pourra y être portée, & le nombre de fois qu'elle y entrera, sera le quotient; car puisque dans toute division le diviseur multiplié par le quotient, est égal au nombre à diviser, ainsi que nous l'avons fait voir dans notre Arithmetique des Géometres, & que la ligne CD, qui est le diviseur, prise, par exemple, trois fois, ou multipliée par trois, est égale à la ligne AB, qui est le nombre à diviser, il s'ensuit que le nombre 3 est le quotient.

Et si la ligne CD étoit la grandeur à diviser, & la ligne AB le diviseur, le quotient seroit $\frac{1}{3}$, parce que le diviseur étant trois fois plus grand que le nombre à diviser, c'est la même chose

que

que si on avoit à diviser 1 par 3, ce qui fait $\frac{1}{3}$.

Lorsque la ligne qui sert de diviseur, est plus petite que celle qui sert de nombre à diviser, s'il se trouve qu'après avoir porté la petite sur la grande un certain nombre de fois, comme par exemple trois, il reste quelque chose, on portera ce reste sur la petite ligne autant de fois qu'il pourra y entrer, & supposant qu'il y entre 4 fois juste, le quotient sera $3\frac{1}{4}$, c'est-à-dire 3, parce que le diviseur entre trois fois dans le dividende, & $\frac{1}{4}$, parce que ce qui reste, n'est que le quart du diviseur.

Et si la petite étoit en ce cas le nombre à diviser, on réduiroit en quarts les trois parties du diviseur, qui sont chacune égale au dividende, parce que le reste de ce diviseur n'est que le quart de ce dividende, & l'on auroit 12 quarts, lequel ajoûtez au reste qui est un quart, feroient 13 quarts, & réduisant de même le nombre à diviser en quarts, ce qui feroit quatre quarts, on diviseroit 4 quarts par 13 quarts, ce qui donneroit $\frac{4}{13}$ au quotient, comme il est évident par les regles que nous avons données touchant les fractions dans l'ouvrage que nous venons de citer.

Enfin si après avoir porté le reste de la grande ligne sur la petite autant de fois qu'il peut y entrer, on trouvoit un reste, on porteroit ce second reste sur le premier autant de fois qu'il peut y entrer, & si l'on trouvoit un troisiéme reste, & que continuant de la même façon, on ne parvint jamais à un reste qui divisât exactement celui qui le précede, les deux lignes AB, CD, seroient *incommensurables* entr'elles, puisqu'il ne seroit pas possible de leur trouver une mesure commune; & alors le quotient de leur division ne pourroit s'exprimer par aucun nombre ni entier ni rompu.

## PROBLEME XLVIII.

229. *Diviser un rectangle ABCD par une ligne donnée EF.* (Fig. 103.)

Puisque dans toute division le diviseur multiplié par le quotient, est égal au nombre à diviser, la question se réduit à chercher une ligne, laquelle multipliant la ligne donnée EF, fasse un rectangle égal au rectangle ABCD, & pour cela portez la ligne EF sur l'un des côtés du rectangle, comme, par exemple, sur le côté AC, & si elle est égale à ce côté, l'autre côté AB sera le quotient; car AB multiplié par AC, ou par EF, son égale donne toujours le même rectangle.

Si la ligne donnée EF, n'eſt que la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. du côté AC le quotient ſera le double, ou le triple, ou le quadruple du côté AB (*Fig.* 103.); car dans la diviſion le diviſeur devenant deux fois plus petit, ou trois fois, ou quatre, &c. le quotient devient deux fois plus grand, ou trois ou quatre, &c.

Si la ligne donnée EF eſt double, ou triple, ou quadruple, & du côté AC le quotient ſera ou la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. du côté AB; car lorſque le diviſeur devient deux fois plus grand, ou trois fois, ou quatre, &c. le quotient devient deux fois plus petit, ou trois, ou quatre fois, &c.

Cette maniere de diviſer un rectangle par une ligne, eſt tatonneuſe & très-difficile, ſurtout lorſque la ligne EF n'eſt pas contenuë, ou ne contient pas exactement un certain combre de fois le côté AC, & elle eſt même impoſſible à pratiquer, lorſque la ligne EF eſt incommenſurable au côté AC; auſſi n'en ai-je parlé que pour faire voir en paſſant, comment peut ſe faire la diviſion ſur les lignes, de même que les trois autres operations, & je donnerai dans la ſuite une méthode plus Géometrique, & toute auſſi facile lorſqu'il y a des fractions &. des incommenſurables, que lorſqu'il n'y en a pas. Voyez Partie 2, *n.* 85.

## SECTION IX.

### *Des puiſſances des lignes.*

#### DEFINITION L.

230. Les *puiſſances* d'une grandeur ſont les différens degrez par leſquels elle ſe s'éleve en ſe multipliant elle-même ſucceſſivement. La premiere *puiſſance* eſt la grandeur même, parce que c'eſt, pour ainſi dire, le premier pas qu'elle fait pour s'éloigner de l'unité. La ſeconde *puiſſance*, c'eſt le produit de la grandeur par elle-même, ce qu'on appelle ſon quarré. La troiſiéme, c'eſt lorſque la grandeur ſe multiplie deux fois ſucceſſivement. La quatriéme, lorſqu'elle ſe multiplie trois fois ſucceſſivement, & ainſi des autres. En fait de lignes, il n'y a que trois puiſſances, parce que l'étenduë n'a que trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur. La premiere puiſſance eſt la ligne qui ne contient que la longueur; la ſeconde, eſt ſon quarré qui contient la longueur & la largeur; & la troiſiéme, eſt ſon cube, qui contient la longueur, la largeur & la profondeur.

Il ne s'agit que de la ſeconde puiſſance ou du quarré dans cette

Section, dont l'objet est de rechercher combien une ligne divisée en plusieurs parties, contient de quarrés, & de rectangles de ses parties les unes par les autres, ou à quels rectangles le quarré de quelqu'une de ses parties est égal, &c. ainsi qu'on verra mieux par le Probleme suivant, & par les Corollaires que nous y ajoûterons.

## PROBLEME XLIX.

231. *Une ligne AB* (Fig. 105.), *étant divisée en deux parties AC, CB, trouver quels sont les quarrés & les rectangles de ces parties que le quarré de la ligne AB contient.*

Faites le quarré ADEB de la ligne donnée AB (*n.* 215.), puis du point C tirez la ligne CH, parallele au côté AD. Ensuite divisez le côté AD en deux parties égales aux parties AC, CB, ce qui se fait en prenant DF égal à AC, & FA égal à CB, & du point F tirez la ligne FI, parallele à la base AB.

Cela fait, vous aurez, à cause des paralleles FI, AB, & des paralleles AD, CH, BE, les lignes FA, GC, IB, égales entr'elles; & comme FA est égal à CB, GC sera aussi égal à CB, & par conséquent CGIB sera le quarré de la partie CB.

De même les lignes DF, HG, EI étant égales à cause des paralleles DE, FI, & la ligne DF étant égale à la ligne AC, le rectangle de GH par FI, c'est-à-dire le rectangle GHEI est égal au rectangle de AC par AF égal à CB, & par la même raison le rectangle AFGC est égal au rectangle GHEI.

Enfin DF étant égal à AC par la construction, & FG étant aussi égal à AC à cause des paralleles AD, CH, la figure FDHG est égale au quarré de AC.

D'où il suit que *le quarré de la ligne AB, contient le quarré CBIG de sa petite partie CB, plus deux rectangles AFGC, GHEI de sa partie AC par sa partie CB, plus le quarré FDHG de son autre partie AC.*

## COROLLAIRE I.

232. Si la ligne AB étoit divisée en trois parties CB, CD, AD (*Fig.* 106.), on trouveroit de même que son quarré contiendroit 1°. le quarré CQRB de sa premiere partie CB; 2°. deux rectangles DPQC, QMOR de cette partie CB, par la seconde CD, plus le quarré PMNQ de la seconde DC, plus deux rectangles AEPD, MILO de la troisiéme AD par la premiere CB, & deux

rectangles EFNP, NHIM de la troisiéme AD par la seconde CD; enfin le quarré FGHM de la troisiéme partie AD, ce qui s'accorde parfaitement avec les regles que nous avons données pour les quarrés numeriques dans notre Arithmetique des Géometres.

## REMARQUE.

233. Les Corollaires suivans sont tous autant de propositions d'Euclide, à qui l'inspection seule des figures peut servir de démonstration.

## COROLLAIRE II.

234. *Une ligne AB* (Fig. 107.), *étant divisée en plusieurs parties AD, DC, CB, le quarré AEFB de la ligne entiere, est égal aux rectangles AEGD, DGHC, CHFB de chacune des parties par la ligne entiere.* Les parties AD, DC, CB prises ensemble, étant égales à la ligne entiere AB, c'est la même chose de faire tout d'un coup le quarré de la ligne, ou de faire les rectangles de chaque partie par la ligne entiere, & de les ajoûter ensemble.

## COROLLAIRE III.

235. *Une ligne AB* (Fig. 108.), *étant divisée en plusieurs parties AC, CD, DE, DB, le rectangle de la ligne entiere AB par une autre ligne AF, est égal aux rectangles AFGC, CGHD, DHIE, EILB, de chacune des parties par la même ligne AF.* La démonstration est la même que celle du Corollaire précedent.

## COROLLAIRE IV.

236. *Une ligne AB étant divisée en deux parties AC, CB* (Fig.) 109), *le rectangle ABEG de toute la ligne par l'une de ses parties AC est égal au rectangle CBEF de l'autre partie CB par la partie CA, plus au quarré de la même partie CA.* A cause des paralleles AB, GF, la ligne CF est égale à la ligne AG, laquelle par la construction est égale à la partie AC. Ainsi le rectangle CBEF est égal au rectangle de CB par CA; & le quarré ACEG est égal au quarré de AC.

## COROLLAIRE V.

237. *Une ligne AB étant divisée également en C, & inégalement en D,* (Fig. 110.) *le quarré CEGB de l'une des moitiés CB, est égal au rectangle ADPM des deux parties inégales AD, DB, plus au quarré*

*LMNO de la partie CD interceptée entre les deux points de division.* Faisant le quarré CEGM de la moitié CB, & tirant du point D la parallele DF au côté CE, on aura le rectangle DFGB égal au rectangle ACPL, parce que DF égal à CE, est égal à CB, ou à AC son égale, & que DB est égal à DM. De même divisant le côté CE en deux parties égales aux parties CD, DE au point H, & tirant la ligne HI parallele à EF, le rectangle CHID est égal au rectangle CDLM, & le quarré HEFI au quarré LMNO, donc, &c.

## COROLLAIRE VI.

238. *Une ligne AB étant divisée en deux également en C,* (Fig. 111.) *si on lui ajoûte une autre ligne BD, le rectangle AEHD de la ligne entiere AD par l'ajoûtée BD, plus le quarré FILG de l'une des moitiés FG est égal au quarré CDOQ de la ligne CD, composée de la moitié CB, plus l'ajoûtée BD.* Ceci se voit clairement en tirant la ligne GP parallele à HQ, puis divisant CO, en sorte que les deux parties CM, MO, soient égales aux deux CB, CD; car alors on a le quarré CMBN égal au quarré FILG, le rectangle OMNP égal au rectangle AEFC; & enfin le rectangle BDPQ égal au rectangle CFHD.

## COROLLAIRE VII.

239. *Une ligne AC étant divisée en deux parties AO, OC,* (Fig. 112) *le quarré ACED, de cette ligne, plus le quarré CVBG de l'une de ses parties OC est égal à deux rectangles HAID, LHMI de la ligne entiere AC par cette même partie OC, plus au quarré NLSP de l'autre partie AO.* Divisant le côté AD, en sorte que AQ soit égal à OC, & le côté DE, en sorte que ER soit aussi égal à OC, & tirant la ligne QV parallele à OC, RO parallele à CE, on aura les lignes QD, DR égales entr'elles & à la partie AO; ainsi le quarré QDFR, sera égal au quarré de AO, & par conséquent au quarré NLSP. De même la ligne AQ étant égale à la partie OC, le rectangle AQVC, sera égal au rectangle de la ligne AC par la partie OC, & par conséquent au rectangle HAID; enfin si au rectangle RFVE on ajoûte le quarré CVBG égal au quarré OCFV, on aura une somme égale au rectangle ROCE, qui est égal à l'autre rectangle LHMI.

## COROLLAIRE VIII.

240. *Une ligne AB étant divisée en deux parties AC, CB;* (Fig. 113.) *si on lui ajoûte une de ses parties CB de B en D, le quarré AEFD de la ligne AD, est égal à quatre rectangles DZSG, GSRH, HRQI, IQPL, de la ligne AB par l'ajoûtée BD, ou par la partie CB, plus au quarré LONM de l'autre partie AC.* Coupant la ligne AE, en sorte que AY soit égal à AC, Y*d* égal à CB, & *d*E égal à BD, & tirant les lignes YV, *d*Z paralleles à AC, & les lignes CT, B&, paralleles à AE, le quarré AYTC sera le quarré de AC, & par conséquent il sera égal au quarré LONM; les trois rectangles BDXZ, Y*d*XV, *d*XE&, seront égaux entr'eux, & aux trois rectangles DGZS, GHSR, HIRQ, puisqu'ils auront tous le grand côté égal à la ligne AB, & le petit égal à la ligne BD; enfin si au rectangle CBTV, on ajoûte le quarré XZ&F, égal au quarré TrVX, on aura une somme égale au rectangle CrXB, & par conséquent égale au quatriéme rectangle ILQP.

J'obmets ici quelques Propositions d'Euclide, que nous démontrerons ailleurs plus commodément; & à leur place je vais en substituer trois autres qui sont d'Apollonius, dans son troisiéme Livre des Sections coniques.

## COROLLAIRE IX.

241. *Une ligne AB* (Fig. 114.), *étant divisée en quatre parties AC, CD, DE, EB, dont la premiere AC & la troisiéme DE sont égales, le rectangle VCSE de la seconde & troisiéme prises ensemble, c'est-à-dire de la ligne CE par la troisiéme DE, plus le rectangle ZXPQ de toute la ligne AB par la quatriéme partie BE sont ensemble égaux au rectangle CBLO des trois dernieres parties, c'est-à-dire de la ligne CB par les deux dernieres, ou par la ligne BD.*

Puisque BL est égal à BD par la construction, divisez BL en H, en sorte que BH soit égal à BE, & HL sera égal à DE; tirez du point H la ligne HN parallele à BA, & du point E la ligne EM parallele à BL. De même des points S, V, tirez SR, VT, paralleles à PQ; les lignes ES, HL sont égales par la construction, & les lignes HL, IM, le sont aussi étant perpendiculaires entre les paralleles HI, LM. Donc IM est égal à ES; & comme IN est égal à EC par la même raison, il s'ensuit que le rectangle IMNO est égal au rectangle SEVC; de même PQ, BH étant

égales par la construction, & la ligne RS étant égale à PQ, ainsi que EI à BH, & SV à EC, le rectangle EICN est égal au rectangle RSTV. On prouvera de la même façon que les deux EB, BH étant égales entr'elles, & aux deux PQ, PR, les quarrés EBHI, RPQS sont égaux entr'eux, & enfin que la ligne VZ étant égale à CA, laquelle est égale à la ligne ED, ou à la ligne HL, & la ligne TV étant aussi égale à la ligne HI, les rectangles HILM, TVCZ sont égaux.

## COROLLAIRE X.

242. *Une ligne AB* (Fig. 115.), *étant coupée en quatre parties AC, CD, DE, EB, dont la premiere AC, & la derniere EB sont égales, le rectangle CQGD de la seconde CD par la troisiéme DE, plus le rectangle AHIC de la premiere AC par les trois autres, c'est-à-dire par la ligne CB, est égal au rectangle ALMD des deux premieres; c'est-à-dire de la ligne AD par les deux dernieres, ou par la ligne DB.*

La ligne DM étant égale à DB par la construction, coupez-la en O, en sorte que DO soit égal à DE, & par conséquent OM sera égal à EB. Du point O tirez ON parallele à AD, & du point C tirez CP parallele à DM; & enfin du point Q tirez QF parallele à AD. Cela fait, vous comprendrez aisément que le rectangle CQGD est égal au rectangle CDPO, le rectangle AFQC au rectangle ACNP, & le rectangle FHIQ au rectangle NOLM. Car pour prouver l'égalité de ces deux derniers, qui sont les seuls où on puisse trouver de la difficulté, il n'y a qu'à faire attention que la ligne CI étant égale par la coustruction à la ligne CB, si on en ôte CQ qui est égal à DE, le reste QI sera égal à CD, plus EB; & comme AC & EB sont égales, mettant AC au lieu de EB, on aura QI égal à CD, plus AC, c'est-à-dire à AD ou LM: & comme MO égal à EB, est aussi égal à AC ou FQ, il s'ensuit que les rectangles FHIQ, NOLM, sont égaux.

## COROLLAIRE XI.

243. *Une ligne AB* (Fig. 116.), *étant divisée en trois parties AC, CD, DB, dont la premiere AC & la derniere DB sont égales, si on divise la premiere en deux parties quelconques AE, EC, le rectangle EFGB des trois EC, CD, DB, ou de la ligne EB par la partie AE, plus le rectangle FRIH des deux EC, CD, ou de la ligne ED par la*

*partie EC, eſt égal au rectangle COBN des deux CD, DB, ou de la ligne CB par la ligne AC.*

Joignez les points I, D par la ligne ID, qui ſera parallele à FE, puis diviſant DB, en ſorte que DL ſoit égal à CE, tirez LM parallele à BN. Cela fait, vous connoîtrez aiſément que la ligne RE étant égale à AC, puiſque RF eſt égal à EC, & FE égal à AE, la même ligne RE eſt auſſi égale à CO, qui par la conſtruction a été faite égale à AC, & que la ligne DL étant égale à la ligne CE, la ligne DC, plus CE, c'eſt-à-dire la ligne DE eſt égale à la ligne CD, plus DL, ou à la ligne CL; d'où il ſuit que le rectangle ERID eſt égal au rectangle COLM, puiſqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun. De même la ligne GB étant égale à la ligne EF, eſt auſſi égale à la ligne AE, qui par la conſtruction eſt égal à EF, & comme DB égal à AC, a été coupé en L, de ſorte que DL eſt égal à EC, le reſte LB eſt par conſéquent égal au reſte AE ou à GB ſon égal; enfin la ligne DB étant égale à AC, eſt auſſi égale à CO ou à BN; donc le rectangle DHGB eſt égal au rectangle LMNB, puiſqu'ils ont les côtez égaux chacun à chacun.

## SECTION X.

### *Des raiſons, proportions & progreſſions Géometriques des lignes.*

244. Nous avons amplement expliqué dans notre Arithmetique des Géometres tout ce qui concerne les raiſons, proportions & progreſſions Arithmetiques & Géometriques des grandeurs en général; ainſi pour ne pas groſſir cet Ouvrage par des redites, nous nous contenterons de rappeller en peu de mots ce qu'il y a de plus néceſſaire à ſçavoir ſur cette matiere, ſans nous arrêter à en donner de longues démonſtrations pour leſquelles nous renvoyons le Lecteur à l'Ouvrage que nous venons de citer.

### DEFINITION LI.

245. Ce qu'une grandeur eſt à l'égard d'une autre, lorſqu'on en fait la comparaiſon, c'eſt ce qui s'appelle *raiſon* ou rapport, & cette raiſon eſt ou *Arithmetique*, ou *Géometrique*. La raiſon Arithmetique conſiſte dans la maniere dont une grandeur ſurpaſſe, ou eſt ſurpaſſée par une autre, ce qu'on trouve en retranchant la moindre

moindre de la plus grande, & alors le reſte s'appelle *difference*. La raiſon *Géometrique* conſiſte dans la façon dont une grandeur contient une autre, ou eſt contenuë dans elle; ce qu'on découvre en diviſant la grande par la moindre, & le quotient s'appelle l'*expoſant*. 8 ſurpaſſe 2 de 6, voila une raiſon *Arithmetique*, dont la difference eſt 6, parce qu'en retranchant 2 de 8, le reſte eſt 6; 8 contient 2 quatre fois, voila une raiſon *Géometrique*, dont l'expoſant eſt 4, parce que diviſant 8 par 2, le quotient eſt 4. Nous ne parlerons dans le reſte de cette Section que des raiſons, proportions & progreſſions Géometriques.

## DEFINITION LII.

246. Toute raiſon a donc deux termes, dont le premier s'appelle l'*antecedent*, & le ſecond le *conſequent*. Lorſque l'antecedent contient le conſéquent, & eſt plus grand que lui, la raiſon s'appelle *de plus grande inégalité*, & en particulier *double*, ſi l'antecedent contient le conſéquent deux fois; *triple*, s'il le contient trois fois; *quadruple*, *quintuple*, &c. s'il le contient 4 ou 5 fois, &c. ou enfin *multiple*, lorſqu'on ne veut pas exprimer le nombre de fois. Quand au contraire, c'eſt le conſéquent qui eſt plus grand que l'antecedent, la raiſon s'appelle *de moindre inégalité*, & en particulier *ſon double*, *ſon triple*, &c. Lorſque le conſéquent contient l'antecedent deux fois, trois fois, &c. ou ſou-multiple, lorſqu'on n'exprime pas le nombre de fois qu'il le contient. Enfin ſi l'antecedent eſt égal au conſéquent, la raiſon s'appelle *raiſon d'égalité*.

## DEFINITION LIII.

247. Toute raiſon *multiple* ou *ſoumultiple*, c'eſt-à-dire de *plus grande* ou de *moindre inégalité*, peut être ou *rationnelle*, autrement dite, *de nombre à nombre*, ou *irrationnelle*, qu'on appelle autrement *ſourde*. Elle eſt *rationnelle* ou *de nombre à nombre*, lorſqu'on peut exprimer en nombres la maniere dont le plus grand terme contient le moindre, & alors l'expoſant s'appelle *rationnel*, & les deux grandeurs ſont dites *commenſurables entr'elles*. Elle eſt au contraire *irrationnelle* ou *ſourde*, lorſqu'on ne peut exprimer en nombres la maniere dont le plus grand terme contient le moindre, & alors on dit que l'expoſant eſt *irrationnel*, & que les deux grandeurs ſont *incommenſurables entr'elles*.

Il arrive quelquefois que deux grandeurs étant *incommenſurables entr'elles*, leurs quarrez ou leurs cubes deviennent commenſu-

rables entr'eux, & alors ces grandeurs ſont dites *incommenſurables, entr'elles,* & *commenſurables en ſeconde puiſſance*, ou *troiſiéme puiſſance*, ſelon que ce ſont les quarrez, ou les cubes qui deviennent *commenſurables entr'eux.*

## DEFINITION LIV.

248. Lorſqu'on compare deux raiſons enſemble, ſi l'expoſant de l'une eſt égal à l'expoſant de l'autre, c'eſt-à-dire, ſi le plus grand terme de l'une contient autant ſon moindre terme, que le plus grand terme de l'autre contient ſon moindre terme, cela s'appelle *proportion* ou *égalité de raiſons*, ce qu'il ne faut pas confondre avec la *raiſon d'égalité*, dont nous avons parlé ci-deſſus, parce que la *raiſon d'égalité* eſt entre deux grandeurs qui ſont égales, au lieu que l'*égalité de raiſons* eſt entre deux raiſons égales, ou dont les expoſans ſont égaux. Le premier terme d'une proportion s'appelle *premier antecedent*, le ſecond *premier conſéquent*, le troiſiéme *ſecond antecedent*, & le quatriéme *ſecond conſéquent*. Le premier & le dernier terme s'appellent les *extrêmes*, & le ſecond & le troiſiéme ſe nomment *les moyens*. On écrit une proportion Géometrique en cette ſorte; 4 . 2 :: 6 . 3, & on l'énonce ainſi; 4 eſt à deux comme 6 eſt à 3, ce qui ſignifie : quatre contient autant de fois deux que ſix contient de fois trois. Et comme il arrive quelquefois que le premier conſéquent & le ſecond antecedent ſont les mêmes comme dans la proportion 8 . 4 :: 4 . 2, alors pour abreger on écrit : : 8 . 4 . 2, mais on énonce de la même façon en diſant, 8. eſt à 4, comme 4 eſt à 2. & cette proportion s'appelle proportion continuë.

La principale proprieté d'une proportion eſt que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Ainſi ſi 8 . 4 :: 6 . 3, multipliant les deux extrêmes 8 & 3, & les deux moyens 4 & 6, les deux produits 24 & 24 ſont égaux, & la raiſon en eſt facile à trouver; car puiſque 8 contient deux fois 4, comme ſix contient deux fois 3, on peut mettre au lieu de 8, deux fois 4, & au lieu de 6 deux fois 3, & alors la proportion ſera 2 fois 4 . 4 :: 2 fois 3 . 3, & le produit des extrêmes, c'eſt-à-dire de 2 fois 4 par 3, ſera égal au produit des moyennes, c'eſt-à-dire de 4 par 2 fois 3, puiſque de côté & d'autre, il ſe trouve les mêmes grandeurs 2, 3 & 4.

Quand la proportion eſt continuë, comme : : 8 . 4 . 2, alors le produit 16 des extrêmes 8 . & 2, eſt égal au quarré 16 de la moyen-

ne 4, parce que cette moyenne tient lieu de premier conſéquent & de ſecond antecedent.

## DEFINITION LV.

249. Une proportion 8 . 4 :: 6 . 3, étant donnée, on peut faire pluſieurs changemens dans ſes termes, qui n'empêchent point qu'il n'y ait toujours proportion entr'eux. Le premier s'appelle *alternando*, & ſe fait en comparant le premier antecedent au ſecond antecedent, & le premier conſéquent au ſecond conſéquent, en diſant, 8. 6 :: 4. 3. Le ſecond s'appelle *invertendo*, & ſe fait en mettant les conſéquens à la place des antecedens, en diſant, 4. 8 :: 3. 6, & dans ces deux changemens il y a toujours proportion, parce que les extrêmes reſtant extrêmes dans le premier, & devenant moyens dans le ſecond, leur produit eſt toujours égal au produit des deux autres, ſoit que ces deux autres reſtent moyens, ſoit qu'ils deviennent tous deux extrêmes. Le troiſiéme changement s'appelle *componendo*, & ſe fait en ajoûtant chaque conſéquent à ſon antecedent, & comparant ces antecedens ainſi augmentés, à leur conſéquens, en diſant, 8 + 4. 4 :: 6 + 3. 3. Le quatriéme s'appelle *dividendo*, & ſe fait en retranchant le conſéquent de chaque antecedent, & comparant enſuite chaque antecedent ainſi diminué à ſon conſéquent, en diſant, 8 — 4. 4 :: 6 — 3. 3. Or dans ces derniers changemens la proportion ſubſiſte encore, parce que le premier antecedent contenant autant de fois ſon conſéqent, que le ſecond antecedent contient le ſien, il eſt évident que ſi on ajoûte à chaque antecedent une fois ſon conſéquent, ou qu'on le lui ôte une fois, les deux antecedens contiendront encore autant de fois leurs conſéquens. Enfin il y a un cinquiéme changement qu'on appelle *convertendo*, ou *converſion de raiſon*, qui ſuppoſe que les conſéquens ſoient plus grands que les antecedens, comme dans la proportion 4. 8 :: 3. 6, & elle ſe fait en retranchant d'abord chaque antecedent de ſon conſéquent, & comparant enſuite les conſéquens ainſi diminués à leurs antecedens, en diſant : 8 — 4. 4 :: 6 — 3. 3,

| | |
|---|---|
| | 8. 4 :: 6. 3 |
| *alternando* | 8. 6 :: 4. 3 |
| *invertendo* | 4. 8 :: 3. 6 |
| *componendo* | 8 + 4. 4 :: 6 + 3. 3 |
| *dividendo* | 8 — 4. 4 :: 6 — 3. 3 |

| | |
|---|---|
| | 4. 8 :: 3. 6 |
| | 8 — 4. 4 :: 6 — 3. 3 |

& en cela il y a encore proportion ; car les conſéquens contenant également leurs antecedens, ſi on retranche à chacun d'eux leurs antecedens une fois, il eſt viſible qu'ils le contiendront encore chacun un même nombre de fois.

## REMARQUE.

250. Si on multiplie ou diviſe deux grandeurs 12 & 6 par un même nombre 3, les produits 36 & 18, ou les quotiens 4 & 2 ſont en même raiſon que les grandeurs 12 & 6. Car il eſt évident que ſi 12 contient deux fois 6, le triple ou le tiers de 12 doit auſſi contenir deux fois le triple ou le tiers de 6. Or ce principe ouvre la porte à d'autres changemens qu'on peut faire ſur les proportions auſquels les Géometres n'ont point donné de noms. Ainſi 1°. ſuppoſant que la proportion ſoit 12. 6 :: 8. 4, ſi l'on multiplie ou diviſe les deux premiers termes par un même nombre 3, on aura encore 36. 18 :: 8. 4, ou 4. 2 :: 8. 4, parce que les raiſons 36. 18, & 4. 2, étant chacune égale à la raiſon 12. 6, ſont par conſéquent auſſi égales à la raiſon 8. 4, & ainſi il y a toujours proportion. 2°. Si on multiplie ou diviſe les deux premiers termes 12, 6 par un même nombre 3, & les deux derniers 8, 4 par un même nombre 2, on aura encore les proportions 36. 18 :: 16. 8. ou 4. 2 :: 4. 2, parce que les raiſons 36. 18, & 4. 2 étant égales chacune à la raiſon 12. 6, & les raiſons 16. 8, & 4. 2 étant auſſi égales chacune à la raiſon 8. 4. la proportion ſubſiſte toujours. 3°. Si on multiplie ou diviſe les deux antecedens 12 & 8 par un même nombre 2, on aura encore les proportions 24. 6 :: 16. 4, ou 6. 6 :: 4. 4, parce que les deux antecedens contenant également leurs conſéquens, les doubles ou les moitiés des antecedens doivent auſſi contenir leurs conſéquens de la même façon. 4°. Si on multiplie ou diviſe les deux antecedens par un même nombre 3, & les deux conſéquens par un même nombre 2, on aura les proportions 36. 12 :: 24. 8, ou 4. 3 :: $2\frac{2}{3}$. 2; car les antecedens contenant également les conſéquens, le triple ou le tiers des antecedens doivent auſſi contenir également le double ou la moitié des conſéquens, & ainſi des autres ; où il faut remarquer que les termes d'une proportion qu'on peut multiplier ou diviſer par un même nombre, doivent être ou les deux premiers ou les deux derniers, ou les deux antecedens ou les deux conſéquens, parce qu'il n'y a que ceux-la qu'on puiſſe comparer enſemble, ſans déranger la proportion, attendu que les deux extrêmes reſtent tou-

jours extrêmes, ou deviennent tous deux moyens, au lieu que si on comparoit ensemble les extrêmes, ou les moyens, alors l'un des extrêmes restant extrême, l'autre deviendroit moyen, ce qui dérangeroit la proportion, & que par conséquent elle seroit aussi troublée, si on multiplioit ou divisoit les deux extrêmes, ou les deux moyens par un même nombre.

## DEFINITION LVI.

251. Lorsqu'on a plusieurs grandeurs de suite, dont la premiere est à la seconde comme la seconde à la troisiéme, & la seconde à la troisiéme comme la troisiéme à la quatriéme, & ainsi de suite, cela s'appelle *progression*, que l'on écrit ainsi, :: 2. 4. 8. 16. 32. &c. & on l'énonce en disant, 2 est à 4 comme 4 est à 8, comme 8 est à 16, comme 16 est à 32, &c. parce que chaque terme, à l'exception du premier & du dernier, sert de conséquent au terme qui le précede, & d'antecedent à celui qui le suit. Il est visible que l'exposant des termes d'une progression est toujours le même, puisque la maniere de contenir du premier au second, est la même que celle du second au troisiéme, du troisiéme au quatriéme, &c.

Quand les termes d'une progression vont en augmentant, comme ceux de la progression ci-dessus, la progression se nomme *ascendante*, & il est clair que si on la continuoit à l'infini, le dernier terme seroit une grandeur infiniment grande; quand au contraire, les termes vont en diminuant, comme dans la progression 16. 8. 4. 2. 1, &c. la progression se nomme *descendante*, & si on la continuoit à l'infini, le dernier terme seroit une grandeur infiniment petite.

Puisque chaque terme d'une progression, à l'exception du premier & du dernier, sert de conséquent au terme qui le précede, & d'antecedent à celui qui le suit, on peut écrire cette progression en cette sorte, 2. 4 :: 4. 8 :: 8. 16 :: 16. 32, &c. & alors l'une des principales proprietés d'une progression est que la somme 2+4+8+16 des antecedens, est à la somme 4+8+16+32 des consequens, comme l'un des antecedens 2 est à son conséquent 4; car chaque antecedent contenant, ou étant contenu dans son conséquent de la même façon, tous les antecedens ensemble doivent aussi contenir tous leurs conséquens, où être contenus de la même maniere. Au reste cette proprieté convient aussi à une suite de raisons égales, quoique ces raisons ne fassent

pas enſemble une progreſſion ; car ſoient les raiſons égales 2. 4 :: 3. 6 :: 5. 10 :: 9. 18, la ſomme 2 + 3 + 5 + 9 des antecedens, eſt autant contenuë dans la ſomme 4 + 6 + 10 + 18 des conſéquens, que l'un des antecedens 2 eſt contenu dans ſon conſéquent 4. par la même raiſon que nous en avons donnée cy-deſſus.

Les progreſſions ont d'autres proprietés que nous avons expliquées dans notre Arithmetique des Géometres pour les grandeurs en général, & que nous démontrerons dans la ſuite de cette Section pour les lignes en particulier.

## DEFINITION LVII.

252. Si l'on a deux grandeurs 3 & 4 d'une part, & deux autres grandeurs 2 & 6 de l'autre, & que les deux premieres puiſſent tenir la place des deux extrêmes d'une proportion, & les deux dernieres la place des deux moyens, ces quatre grandeurs s'appelleront *réciproques*, parce qu'ayant pris pour faire la proportion le premier antecedent dans les deux premieres, & le premier conſéquent dans les deux autres, il faut réciproquement prendre le ſecond antecedent dans les deux dernieres, & le ſecond conſéquent dans les deux premieres.

3. 6 :: 2. 4.
ou 4. 2 :: 3. 6, &c.

Il ſuit de-là que le produit des extrêmes d'une proportion, & celui des moyens ont leurs racines réciproques. Car ſoit le produit des extrêmes 24, dont les racines ſont 3 & 8, & le produit des moyens 24, dont les racines ſont 2 & 12, les deux premieres 3 & 8 ſont réciproques aux deux dernieres 2 & 12, puiſque pour faire la proportion il faut mettre les deux premieres à la place des extrêmes, & les deux dernieres à la place des moyens.

3. 12 :: 2. 8.
ou 8. 2 :: 12. 3, &c.

Il ſuit encore que toutes les fois qu'on a deux produits égaux les racines de ces produits ſont réciproques ; car ſoient les produits égaux 2 fois 9, & 3 fois 6, ſi l'on met les deux premieres à la place des extrêmes d'une proportion, & les deux dernieres à la place des moyens, il y aura proportion, puiſqu'en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, ces deux produits ſeront égaux.

2. 6 :: 3. 9.
ou 9. 3 :: 6. 2, &c.

## DEFINITION LVIII.

253. On appelle *partie aliquote* d'une grandeur, une partie qui eſt contenuë exactement un certain nombre de fois dans cette grandeur; ainſi 3 eſt partie aliquote de 12, parce qu'elle eſt contenuë quatre fois exactement dans 12, & l'on dit que deux parties ſont *aliquotes pareilles* ou *ſemblables* de leurs grandeurs lorſqu'elles y ſont contenuës exactement un même nombre de fois. Ainſi 3 & 4 ſont *aliquotes pareilles* de 12 & de 16, parce que 3 eſt contenu dans ſon entier 12 quatre fois, de même que quatre eſt auſſi contenu quatre fois dans ſon entier 16.

## PROBLEME L.

254. *Une ligne AB étant coupée en deux parties AI, IB, couper une autre ligne donnée BC en même raiſon, c'eſt-à-dire la couper de ſorte que ſa partie BP ſoit à ſa partie PC comme la partie BI de la ligne BA eſt à ſa partie IA.* (Fig. 117.)

Joignez les lignes AB, BC par leur extrêmité, enſorte qu'elles faſſent un angle ABC; tirez la baſe AC, & par le ſommet B une parallele BS à la baſe AC. Du point I tirez IP parallele à BS, ou à AC, & la ligne BC ſera diviſée en P, ainſi qu'il eſt requis.

## DEMONSTRATION.

Portez ſur la ligne BA ſa petite partie IA autant de fois qu'elle peut y entrer, comme, par exemple, ici quatre fois de A en I, de I en L, de L en M, & de M en B; puis des points de diviſion M, C, tirez des paralleles à AC, ou à BS. L'eſpace parallele RSTV, ſera diviſé en quatre eſpaces paralleles RS*M*e, *M*eLD, L*d*IX, IXTV, qui ſeront égaux entr'eux, puiſque les perpendiculaires BM, ML, LI, IA, qui meſurent les diſtances des paralleles, ſont égales entr'elles; or la ligne BC étant droite, les paralleles RS, *M*e, &c, venant à la rencontrer, forment avec elle les angles RBN, MNO, &c. tournez du même côté égaux, & par conſéquent la ligne BC eſt également inclinée ſur toutes ces paralleles. Donc ſi l'on met l'un des eſpaces paralleles, comme par exemple, l'eſpace IXTV ſur un autre eſpace parallele *M*eL*d*, les deux paralleles de l'un tomberont ſur les deux paralleles de l'autre, la perpendiculaire IA ſur la perpendiculaire ML, de ſorte que les deux eſpaces n'en feront plus qu'un ſeul, & par conſéquent les obliques PC, NO étant également inclinées dans cet

eſpace, ſeront égales (*n.* 70.), on démontrera de la même façon que l'inclinée PC eſt auſſi égale à l'inclinée OP, ou à l'inclinée BN; d'où il ſuit que les quatre BN, NO, OP, PC ſont égales entr'elles, de même que les quatre BM, ML, LI, IA le ſont auſſi entr'elles; or la partie BI de la ligne BA, étant triple de la partie IA, la partie BP de la ligne BC eſt auſſi triple de la partie PC; donc BP. PC. :: BI. IA, ce qu'il falloit démontrer.

### COROLLAIRE I.

255. Puiſque BP, PC :: BI. IA, donc *permutando* ou *alternando* BP. BI :: PC. IA; car conſiderant les antecedens qui ſont ici plus grands que leurs conſéquens, comme deux entiers, dont les conſéquens ſont parties *aliquotes pareilles*, c'eſt-à-dire des tiers, il eſt ſûr que le premier entier doit être au ſecond entier comme le tiers du premier entier eſt au tiers du ſecond. Si le premier entier eſt, par exemple, double du ſecond, le tiers du premier entier ſera néceſſairement double du tiers du ſecond.

### COROLLAIRE II.

256. Donc *invertendo* PC. BP :: IA. BI. Si chaque antecedent eſt triple de ſon conſéquent, chaque conſéquent doit être le tiers de ſon antecedent.

### COROLLAIRE III.

257. Donc *componendo* BP+PC. PC :: BI+IA. IA. Si on ajoûte à chaque antecedent une fois ſa partie, les deux antecedens contiendront encore leur partie un égal nombre de fois.

### COROLLAIRE IV.

258. Donc *dividendo* BP—PC. PC :: BI—IA. IA. Si on retranche de chaque entier une fois ſa partie, les deux entiers, c'eſt-à-dire les deux antecedens contiendront encore leurs parties un même nombre de fois.

### COROLLAIRE V.

259. Par le Corollaire ſecond on a PC. BP :: IA. BI, où les deux conſéquens ſont plus grands que les antecedens, & peuvent par conſéquent être regardés comme étant des entiers, dont les antecedens ſont les parties. Donc *convertendo*, ou par converſion de

de raisons, BP—PC. PC:: BI—IA. IA, & la raison de ceci est la même que celle du Corollaire précedent.

## COROLLAIRE VI.

260. Si entre les deux paralleles RS, TV, on tire tant d'obliques inégalement inclinées, que l'on voudra, soit qu'elles partent du point B où se joignent les deux lignes AB, CB, comme l'oblique BD, ou qu'elles partent d'ailleurs, comme les obliques EF, GH, il est évident que ces obliques seront coupées par la parallele EX, chacune en deux parties, qui seront proportionnelles aux parties BI, IA de la perpendiculaire BA; d'où il suit que toutes ces obliques auront leurs parties proportionnelles entr'elles; & que si l'une, comme BC, est coupée en P en deux parties, dont l'une soit, par exemple, le tiers de l'autre, la ligne PX qu'on tirera par le point P pareillement aux deux RS, TV, coupera les autres obliques, & la perpendiculaire même BA chacune en deux parties, dont l'une sera aussi le tiers de l'autre.

## COROLLAIRE VII.

261. Si après avoir porté sur la ligne AB, (*Fig.* 118.) sa petite partie AI autant de fois qu'elle y peut entrer, on trouvoit un reste BN, les paralleles tirées par les points de divisions N, L, I, laisseroient aussi un reste BM sur la seconde ligne BC, & si l'on portoit le reste BN de la premiere ligne sur l'une de ses parties égales NL, & qu'il y entrât exactement un certain nombre de fois, comme, par exemple, deux fois, la parallele *rt* tirée par le point de division *r*, couperoit la partie MO de la ligne BC en deux parties égales M*t*, *t*O, chacune desquelles seroit égale au reste BM de cette ligne, puisque les quatre paralleles BS, NM, *rt*, LO, étant également distantes les unes des autres, formeront trois espaces paralleles égaux, entre lesquels les lignes BM, M*t*, *t*O, seroient également inclinées, d'où il suit que la partie PC de la ligne BC seroient à la partie PB, comme la partie AI de la ligne AB à sa partie IB, puisque PC seroit contenuë deux fois & demi dans BP, de même que AI seroit contenuë deux fois & demi dans BI.

Et si après avoir porté le premier reste BN sur l'une des parties égales NL autant de fois qu'il pourroit y entrer, on trouvoit un second reste, lequel porté sur le premier reste laissât encore un troisiéme reste, & ainsi de suite à l'infini, les paralleles tirées par

les points de division, laisseroient aussi sur la ligne BC un second reste, lequel porté sur le second, en laisseroit un troisiéme, & ainsi de suite à l'infini, de sorte que la partie AI de la premiere ligne étant incommensurable avec la partie BI de la même ligne, on trouveroit que la partie CP de la seconde ligne seroit aussi incommensurable à la partie PB, & qu'il seroit vrai de dire que CP est à PB comme AI est à IB, quoiqu'il ne fût pas possible de connoître au juste le rapport de AI à IB.

La méthode de ce Probleme peut donc servir, soit que la petite partie AI soit contenuë dans IB un certain nombre de fois sans reste, ou qu'elle y soit contenuë avec un reste, ou enfin qu'elle lui soit incommensurable.

## COROLLAIRE VIII.

262. *Si on a deux espaces paralleles inégaux* (Fig. 119.), *& que dans le premier la ligne MN soit autant inclinée que la ligne IL l'est dans le second, la ligne MN est à la ligne IL, comme le premier espace parallele est au second espace.* Des points M, I, tirez les perpendiculaires MO, IP entre les paralleles, ces perpendiculaires marqueront la grandeur des deux espaces; si donc on met le petit espace parallele EFGH sur le grand, en sorte que EF tombe sur AB, la perpendiculaire IP tombera sur la perpendiculaire MO, de M en Z, & l'oblique IL sur l'oblique MN, de M en X, de sorte que la ligne QZXR, sera parallele à la ligne CD, puisqu'elle le sera à la ligne AB; ainsi on aura par ce Probleme OZ. ZM :: NX. XM. & *composant* OZ+ZM. ZM. :: MX+XM. XM. ou ce qui est la même chose OM. ZM :: NM. XM. c'est-à-dire que la perpendiculaire OM du grand espace est à la perpendiculaire ZM du petit comme l'oblique NM du grand est à l'oblique XM du petit; & par conséquent l'oblique du grand est à l'oblique du petit, comme le grand espace est au petit.

## COROLLAIRE IX.

263. On tire de ce Probleme une méthode facile de diviser une ligne donnée AB (*Fig.* 120.), en autant de parties égales que l'on voudra, ce qui se fait ainsi: A l'extrêmité A de la ligne donnée AB, faites un angle quelconque avec une ligne indéterminée, sur laquelle vous porterez, par exemple, quatre parties égales d'une grandeur prise à discretion de A en D, de D en E, &c. si on veut que la ligne AB soit divisée en quatre parties égales; de

l'extrêmité G de la derniere partie, tirez la droite GB à l'extrêmité de la ligne AB, & des autres points de division D, E, F, tirez des paralleles DL, EI, FH à la ligne GB, & la ligne AB sera divisée en quatre parties égales aux points L, I, H; car tirant à l'autre extrêmité A, la ligne AZ parallele à la ligne GB, les lignes AB, AG seront comprises entre ces deux paralleles : & comme la ligne AG est divisée en quatre parties égales par les paralleles intermediaires, la ligne AB est aussi divisée en quatre parties égales par les mêmes paralleles.

Dans la pratique on tire de l'autre extrêmité B une ligne BP parallele & égale à AG, sur laquelle on porte le même nombre de parties de B en M, de M en N, &c. puis ayant tiré la ligne GB, on joint par des droites les points correspondants PM, IN, &c. qui donnent, en passant par AB, les points L, I, H, ce qui revient au même, comme on peut aisément le prouver, & est beaucoup plus commode, parce qu'il n'y a qu'une seule parallele BP à tirer, laquelle donne le parallelisme de toutes les autres GB, FM, &c. au lieu que de l'autre façon il faut chercher le parallelisme de chacune de ces lignes.

## PROBLEME LI.

264. *Un triangle ABC*, (Fig. 121.) *étant donné, décrire sur une ligne* ac *donnée, un triangle* abc, *dont les côtez soient proportionnels aux côtez du triangle ABC, en sorte que* ab. *AB* :: bc. *BC* :: ac. *AC*.

Faites à l'extrêmité *a* de la ligne *ac* l'angle *a* égal à l'angle A, & à l'autre extrêmité l'angle *c* égal à l'angle C, & vous aurez les triangles *abc*, dont l'angle *b* sera égal à l'angle B du triangle ABC, parce que l'angle *b* est le complément des deux angles *a*, *c* à deux angles droits, de même que l'angle B est le complément des deux angles A, C à deux angles droits; or cela étant, je dis que le triangle *abc* a ses côtez proportionnels aux côtez du triangle ABC, ainsi que je vais le démontrer.

### DEMONSTRATION.

Tirez par les sommets B, *b*, des deux triangles les lignes RT, *rt*, paralleles aux bases, & les perpendiculaires BZ, *bz*, sur ces mêmes bases; cela fait dans les deux espaces paralleles RFAC, *rfac*, les lignes AB, *ab*, sont également inclinées à cause de l'angle A égal à l'angle *a*; donc ces lignes sont entr'elles comme les espaces, ou comme les perpendiculaires BZ, *bz*, qui mesu-

rent ces espaces (*n.* 262.) donc AB. *ab* :: BZ. *bz*. Par la même raison on aura BC. *bc* :: BZ. *bz*. Puis donc que la raison AB. *ab*, est égale à la raison BZ. *bz*, & que la raison BC. *bc* est aussi égale à la même raison BZ. *bz*, il s'ensuit que la raison AB. *ab* est égale à la raison BC. *bc* ; donc AB. *ab* :: BC. *bc*.

Quant aux bases, tirez par leurs extrêmitez C, *c*, les lignes CH, *ch*, paralleles aux côtez opposés, & vous aurez deux autres espaces paralleles ABCH, *abch*, dans le premier desquels les lignes AC, BC, sont autant inclinées que les lignes *ac*, *bc* dans le second, à cause que l'angle A, est égal à l'angle *a*, & l'angle B égal à l'angle *b*. Donc vous trouverez AC. *ac* :: CB. *cb*. Mais CB. *cb* :: AB. *ab*, comme on vient de voir. Donc AC. *ac* :: CB. *cb* :: AB. *ab*.

## COROLLAIRE I.

265. *Si deux triangles ont leurs trois angles égaux chacun à chacun ; leurs côtez sont proportionnels, c'est ce qu'on vient de voir, & si leurs côtez sont proportionnels, leurs angles sont égaux chacun à chacun.* Leurs côtez ne peuvent être proportionnels sans être également inclinés entre deux paralleles. Au reste, les côtez proportionnels sont ceux qui sont opposés aux angles égaux, & les angles égaux sont ceux qui sont opposés aux côtez proportionnels, ce qui est évident par la seule inspection de la figure.

## COROLLAIRE II.

266. *Deux figures regulieres d'un même nombre de côtez* (Fig. 122.), *ont leurs côtez, leurs rayons & leurs apothemes proportionnels.* Si ces deux figures sont, par exemple, deux pentagones, on pourra les diviser chacune en cinq triangles isosceles égaux & équiangles (*n.* 205.), & les triangles de l'un auront les angles égaux aux angles des triangles de l'autre, & par conséquent les côtez proportionnels. Comparant donc les triangles AOB, *aob* ensemble, on aura AB. *ab* :: AO. *ao* :: OB. *ob* :: OR. *or* ; car par rapport aux apothemes OR, *or*, si l'on conçoit que par les sommets O, *o*, il passe des paralleles aux bases, les apothemes OR, *or*, perpendiculaires entre les paralleles, seront dans la même raison que les obliques AO, *ao*, OB, *ob*.

## REMARQUE.

267. Il n'y a que les triangles & les figures regulieres d'un

même nombre de côtez qui ayent leurs angles égaux chacun à chacun, par la seule raison que leurs côtez ou leurs apothemes sont proportionnels, ou qui ayent les côtez & les apothemes proportionnels par la seule raison que leurs angles sont égaux chacun à chacun. Car par rapport aux autres figures, il arrive très-souvent que deux figures irregulieres d'un même nombre de côtez, ont leurs angles égaux chacun à chacun, sans avoir leurs côtez proportionnels, ou qu'elles ont leurs côtez proportionnels sans avoir les angles égaux chacun à chacun. Supposé, par exemple, que les deux rectangles ABCD, *abcd*, (*Fig.* 123.) qui ont leurs angles égaux chacun à chacun, ayent encore leurs côtez proportionnels, je puis, en laissant subsister la base *ad* du second rectangle, alonger ou racourcir sa hauteur *ab*, & faire d'autres rectangles *a*EF*d*, *a*GH*d*, lesquels auront les angles égaux aux angles du rectangle ABCD, mais dont les côtez ne seront plus proportionnels à ceux de ce rectangle, parce que la base *ad* étant toujours la même à l'égard de la base AD la hauteur *a*E ou *a*G aura été augmentée ou diminuée à l'égard de la hauteur AB. De même laissant subsister la hauteur *ab*; si j'augmente, ou je diminuë la base, j'aurai d'autres rectangles qui auront les angles égaux aux angles du rectangle ABCD, mais dont les côtez ne seront pas proportionnels aux côtez de ce rectangle. D'autre part soient deux lignes AB, BD, (*Fig.* 124.) proportionnelles aux deux *ab*, *bd*, je puis avec les deux premieres, faire un parallelograme ABCD, & avec les deux secondes, un parallelograme *abcd*, sans être obligé de faire l'angle *a* égal à l'angle A, & dès-lors il est évident que les deux figures auront les côtez proportionnels sans avoir les angles égaux. Donc, &c.

## DEFINITION LIX.

268. Les figures qui ont tous les angles égaux chacun à chacun, s'appellent figures *semblables*, & les côtez opposés aux angles égaux, s'appellent côtez *homologues*.

## COROLLAIRE III.

269. *Deux figures ABCDE, abcde, étant semblables* (Fig. 122.), *le circuit ou le perimetre de la premiere est au circuit de la seconde, comme l'un des côtez AB, est au côté homologue* ab *de la seconde.* Ces figures étant semblables, on a une suite de raisons égales AB. *ab* :: BC. *bc* :: CD. *cd* :: DE. *de* :: EA. *ea*; donc la somme des antecedens

est à la somme des conséquens, comme l'un des antecedens est à son conséquens (*n.* 251.); donc AB+BC+CD+DE+EA. *ab*+*bc*+*cd*+*de*+*ea* :: AB. *ab*, or AB+BC+CD+DE+EA, est le circuit de la premiere figure, & *ab*+*bc*+*cd*+*de*+*ea* est le circuit de la seconde; donc, &c.

## COROLLAIRE IV.

270. Ce que nous venons de dire dans le Corollaire précédent par rapport aux figures semblables, est encore vrai par rapport aux figures qui ont leurs côtez proportionnels sans avoir leurs angles égaux; car supposé que les deux parallelogrames ABCD, *abcd* (*Fig.* 124.), qui n'ont point leurs angles égaux, ayent cependant leurs côtez proportionnels, il est évident par le Corollaire précedent, que le circuit de l'une sera au circuit de l'autre, comme l'un des côtez AB de la premiere, est au côté proportionnel *ab* de la seconde; mais ce qu'il y a de particulier aux figures semblables, c'est que non seulement leurs circuits sont entr'eux comme les côtez homologues, mais encore comme les rayons & les apothemes lorsque ces figures en ont, ou comme les diagonales & les autres lignes semblablement posées, qu'on peut y tirer. Car par rapport aux rayons & aux apothemes, nous avons fait voir (*n.* 266.) que les deux figures ABCDE, *abcde*, (*Fig.* 122.) avoient leurs côtez AB, *ab*, proportionnels à leurs rayons AO, *ao*, & à leurs apothemes OR, *or*; & par rapport aux diagonales ou aux lignes semblablement posées, supposons que les deux figures ABCDE, *abcde*, (*Fig.* 125.) soient semblables, & que dans la premiere on tire la diagonale BE de l'angle B à l'angle E, & dans la seconde la diagonale *be* de l'angle *b* à l'angle *e*, qui sont les angles égaux aux angles B, E. Les deux triangles ABE, *abe*, seront semblables; car l'angle A sera égal à l'angle *a*, & les côtez AB, AE proportionnels aux côtez *ab*, *ae*; donc transportant le triangle *abe* sur le triangle ABE, en sorte que l'angle *a* tombe sur l'angle A, & tirant la parallele *xz* à la diagonale BE, les deux espaces *xzbe*, *xz* BE, seront paralleles à cause de *ab*. *ae* :: AB. AE, & par conséquent les angles *bea*, BEA, faits par les paralleles *be*, BE sur le côté AE, seront égaux, de même que les angles *eba*, EBA, faits par les mêmes paralleles sur le côté AB. Donc on aura aussi *be*. BE :: *ae*. aE.

De même, que de l'angle E on tire la ligne ET sur le milieu du côté opposé AB, & que de l'angle *e* on tire aussi la ligne *et*

sur le milieu du côté opposé *ab*, il est évident que puisque par la supposition AB. *ab* :: AE. *ae*, aussi la moitié de AB sera à la moitié de *ab* comme AE est à *ae*; car les moitiez sont entr'elles en même raison que leur *tout* : ainsi on aura TA. *ta* :: AE. *ae*, d'où il sera facile de démontrer, comme ci-dessus, que TA. *ta* :: TE. *te*, & par conséquent que TE. *te* :: AE. *ae*, c'est-à-dire que les lignes semblablement posées TE, *te*, sont entr'elles comme les côtez homologues, ou comme les circuits.

## COROLLAIRE V.

271. *Les circonferences des cercles* (Fig. 126.) *sont entr'elles comme leurs rayons AB*, ab. Concevons que le cercle *ab* soit mis sur le cercle AB, en sorte que le centre *a* tombe sur le centre A; & qu'après avoir divisé la circonference du grand en une infinité de petits arcs tous égaux, & tiré leurs cordes, on mene de tous les points de division des rayons au centre, ces rayons couperont la circonference du petit cercle en un même nombre d'arcs tous égaux entr'eux, & concevant que les cordes de ces arcs soient tirées, elles formeront un polygone regulier, & semblable au polygone que les cordes du grand cercle formeront; donc les circuits de ces deux polygones seront entr'eux comme leurs rayons *ab*, AB; mais à cause de l'infinie petitesse des arcs, les circuits de ces deux polygones se confondront avec les circonferences, & n'en différeront point; donc les circonferences seront aussi entr'elles comme leurs rayons.

## *Petite Digression touchant l'angle de contingente fait par la tangente, & la circonference d'un cercle.*

272. Nous avons dit (*n.* 92.) qu'entre la circonference d'un cercle & sa tangente, on ne peut tirer aucune ligne droite, & (*n.* 93.) qu'on peut cependant y faire passer une infinité d'autres circonferences. Sur cela quelques Géometres se sont imaginé que les circonferences qui passoient entre la petite circonference & la tangente, divisoient l'angle mixte fait par la tangente de la circonference en d'autres angles toujours moindres; après quoi ils se sont écrié : au prodige, ce qui en effet, en seroit un bien grand, parce qu'on ne conçoit point comment un angle qui pourroit être ainsi divisé, ne sçauroit cependant l'être par aucune ligne droite. Voici donc en quoi consiste leur erreur.

Il faut remarquer 1°. que les polygones semblables ont leurs côtez d'autant plus grands que leurs rayons sont plus grands, parce que leurs côtez sont proportionnels à leurs rayons. 2°. Que si deux polygones semblables ABCDEF, *abcdef*, (*Fig.* 127.) s'appuyent par un de leurs côtez BC, *bc*, sur une ligne droite RS, le plus grand prend sur cette ligne une partie *bc* plus grande que la partie BC, que le moindre prend sur cette même ligne, puisque le plus grand a son coté *bc* plus grand aussi que le côté BC du petit. 3°. Que les angles externes *dcs*, DCS, faits par les côtez adjacens de ces polygones, & par la ligne RS, sont égaux entr'eux; car les deux angles *dcb*, *dcs* sont égaux à deux droits, étant faits par une ligne *dc*, qui tombe sur une autre ligne RS, & par la même raison les deux angles DCB, DCS, sont aussi égaux à deux droits; or les angles *dcb*, DCB, sont égaux, parce que les deux polygones sont semblables; donc si on ôte l'angle *dcb*, des deux angles *dcb*, *dcs*, & l'angle DCB des deux DCB, DCS, l'angle restant *dcs*, sera égal à l'angle restant DCS.

Cela posé, puisque les cercles sont des polygones semblables d'une infinité de côtez, si deux circonferences ACR, ADS, (*Fig.* 128.) touchent une ligne droite AB en un même point, la plus grande la touchera par un plus grand côté, & la petite par un moindre, & les angles CAB, DAB, que leurs côtez adjacens feront avec la ligne AB, seront égaux; ainsi l'angle CAB ne sera pas divisé par l'angle DAB, comme on le prétend; mais ce seront deux angles égaux, dont les sommets ne seront pas précisément sur le même point, mais seront contigus, parce que ces angles se faisant à l'extrêmité des côtez des circonferences qui touchent la ligne droite, & l'un de ses côtez étant plus grand que l'autre, l'extrêmité de ce côté doit sortir en-delà de l'extrêmité de l'autre.

Ceci fait voir pourquoi on peut faire passer une infinité de circonferences entre un cercle & sa tangente, quoiqu'on ne puisse y faire passer aucune ligne droite; car supposons que la ligne BC (*Fig.* 122.), soit le côté infiniment petit d'une circonference qui touche la ligne droite RS, & que la ligne *bc* soit le côté infiniment petit d'une autre circonference plus grande, si on met *bc* sur BC, les deux circonferences toucheront le cercle, & la ligne *bc* débordera de part & d'autre de la ligne BC, après quoi il se fera un angle *bcd* égal à l'angle BCD; & il en seroit de même si on vouloit que d'autres circonferences plus grandes touchassent

sent la même ligne. Mais il n'en est pas ainsi à l'égard des lignes droites ; les points d'attouchement étant eux-mêmes des petites lignes qu'on peut concevoir divisées en deux parties égales au point O, si une ligne droite a une de ses parties qui s'ajuste avec le côté infiniment petit BC d'une circonference de O en B, ou de O en C, cette ligne étant supposée droite, suivra toujours la même direction, & par conséquent elle ne differera point de la tangente RS, & si cette ligne n'a pas la même direction que BO, ou BC, elle tombera nécessairement ou en-dessous de OB, ou en-dessous de OC, comme les lignes OZ, OX, & par conséquent elle entrera dans le cercle, & le coupera ; ainsi on n'en fera jamais passer entre le cercle & la tangente.

On me dira peut-être que les Géometres ne tiennent pas le même langage, & que selon eux les cercles ne touchent la tangente qu'en un seul point, ce qui semble opposé à ce que je viens de dire ; mais il faut sçavoir que ces mêmes Géometres admettent des points plus grands & plus petits, ainsi qu'on peut voir dans quelques-uns de leurs Ouvrages, & en particulier dans la Géometrie theori-pratique du célebre Monsieur Parent, *page* 420, 421, & que s'ils appellent du nom général de *points*, les parties inégales par lesquelles les cercles inégaux touchent une même ligne droite, c'est ce que ces parties étant moindres que toute autre grandeur, que l'on peut assigner, quelque petite qu'elle soit, leur différence est par conséquent encore moindre, & peut passer pour rien à l'égard de la mesure des corps, qui est le seul objet de la Géometrie.

On repliquera peut-être que les cercles inégaux qui touchent une même ligne, la touchent par leurs angles, & non par leurs côtez, & qu'ainsi ils la touchent en un seul & même point ; mais quand même j'admettrois cette supposition, il n'en seroit pas moins vrai que les angles mixtes faits par les circonferences & par la tangente, seroient tous égaux entr'eux ; car si deux polygones semblables ABCDEF. *aBcdef*, (*Fig.* 129.) touchent une ligne droite RS par un de leurs angles B, l'angle ABC tombera sur l'angle *aBc*, qui lui est égal, & par conséquent l'angle externe CBS, sera égal à l'angle externe *cBs* ; ainsi ces polygones ne feront pas des angles différens avec la tangente RS, & par conséquent les cercles qui sont aussi des polygones semblables, feront avec la tangente, des angles égaux. Outre cela, il ne sera pas plus possible dans cette supposition de faire passer une ligne droite entre une

circonference & la tangente, qu'il ne l'eſt dans la nôtre ; car les angles des polygones devenant d'autant plus grands qu'ils ont un plus grand nombre de côtez, l'angle externe CBS devient auſſi d'autant plus petit ; donc les cercles ayant une infinité de côtez, les angles formés par ces côtez doivent être infiniment grands, & approcher de bien près de deux angles droits, & l'angle exterieur doit être infiniment petit ; d'où il ſuit qu'on n'en ſçauroit faire de moindres, & que par conſéquent on ne ſçauroit faire paſſer entre la circonference & la tangente, aucune ligne droite, parce que ſi cela ſe pouvoit, cette ligne feroit avec la tangente un angle moindre que l'angle mixtiligne, ce qui ne ſe peut.

## PROBLEME LII.

273. *Couper un triangle rectangle ABC* (Fig. 130.) *en deux autres triangles ABD, BCD, dont les côtez ſoient proportionnels entr'eux, & aux côtez du triangle total ABC.*

Du ſommet B de l'angle oppoſé à l'hypothenuſe, tirez la perpendiculaire BD ſur l'hypothenuſe AC, & vous aurez deux triangles ABD, BCD, dont les côtez ſeront proportionnels entr'eux, & aux côtez du triangle total ABC.

### DEMONSTRATION.

Premierement, le triangle ABD, & le triangle total ABC, ont l'angle A commun, & l'angle droit ADB égal à l'angle droit ABC ; donc le troiſiéme angle ABD eſt égal au troiſiéme angle ACB, (*n.* 187.) & par conſéquent le triangle ABD & le triangle total ABC, ont leurs trois angles égaux chacun à chacun & leurs côtez proportionnels. Secondement, le triangle BCD, & le triangle total ABC, ont l'angle commun C, & l'angle droit CDB, égal à l'angle droit ABC ; donc le troiſiéme angle CBD, eſt égal au troiſiéme BAC, & les deux triangles ayant les trois angles égaux chacun à chacun, ont leurs côtez proportionnels ; enfin le triangle ADB, ayant ſes côtez proportionnels aux côtez du triangle total, & le triangle CDB, ayant auſſi ſes côtez proportionnels aux côtez du même triangle total, il s'enſuit que les deux triangles ADB, CDB, ont leurs côtez proportionnels entr'eux.

### COROLLAIRE I.

274. *Dans tout triangle rectangle ABC,* (Fig. 131.) *le quarré ACDE de l'hypotenuſe eſt égal aux quarrez AILB, BMNC des deux*

côtez *AB. BC.* Tirant la perpendiculaire BO sur l'hypothenuse AC, le triangle ABO a ses côtez proportionnels aux côtez du triangle total ABC; donc le grand côté AO du premier, est à son hypotenuse AB, comme le grand côté AB du second est à son hypotenuse AC. Ainsi :: AO. AB. AC, & faisant le produit des extrêmes & le quarré de la moyenne, on a AO×AC égal à $\overline{AB}^2$. Or AO×AC est égal au rectangle AODR, parce que la hauteur AD de ce rectangle est égale à AC, & que par conséquent AO×AC est la même que AO×AD, & le quarré $\overline{AB}^2$ est égal au quarré AILD; donc le rectangle AODR est égal au quarré AILB.

De même le triangle BOC ayant ses côtez proportionnels aux côtez du grand triangle ABC, le petit côté OC du premier est à son hypotenuse BC, comme le petit côté BC du second est à son hypotenuse AC; ainsi on a :: OC. BC. AC, & faisant le produit des extrêmes & le quarré de la moyenne, on a OC×AC=$\overline{BC}^2$. Or le rectangle OC×AC est égal au rectangle OCRE, parce que la hauteur CE de ce rectangle est égale à AC; donc le rectangle OCRE est égal au quarré $\overline{BC}^2$. Mais les rectangles AODR, OCRE pris ensemble, sont égaux au quarré de l'hypotenuse AC (*n.* 234.); donc puisque le rectangle AODR est égal au quarré $\overline{AB}^2$, & le rectangle OCRE au quarré $\overline{BC}^2$, il s'ensuit que les deux rectangles AODR, OCRE pris ensemble, c'est-à-dire le quarré $\overline{AC}^2$ de l'hypotenuse est égal aux quarrez $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$ des deux côtez AB, BC.

## COROLLAIRE II.

275. *Dans tout triangle acutangle ABC* (Fig. 132.), *le quarré ACDB de l'un des côtez, est égal aux quarrez AXVB, BOPC des deux autres côtez AB, BC, moins deux rectangles de l'un des côtez BC, sur lequel tombe la perpendiculaire AH, tirée de l'angle opposé, par la partie BH que cette perpendiculaire coupe sur le côté BC, du côté de l'angle B opposé au côté AC.* Par le point H tirez la parallele HQ au côté BO, puis divisez ce côté BO, en sorte que BL soit égal à CH, & par conséquent LO à HB, & tirez LF parallele à BC. Cela fait, le triangle ABH étant rectangle, le quarré de l'hypotenuse AB, est égal

aux quarrez des deux côtez AH, BH; donc si de ce quarré qui est le quarré AXVB, on retranche le quarré RSTB du petit côté BH, le reste VXATSRV sera égal au quarré de l'autre côté AH, Présentement dans le triangle AHC rectangle, le quarré de l'hypotenuse AC est égal au quarré du côté AH, c'est-à-dire à la figure VXATSRV, plus au quarré HIFC de l'autre côté HC. Donc pour que le quarré de AC fût égal aux quarrez AXVB, BOPC des deux côtez AB, BC, il faudroit lui ajoûter la figure BOPFIHB, plus le quarré TSRB. Mais la partie BOQH de la figure BOPFIHB, est égale au rectangle de BO, ou de BC par BH, & le reste IQPF, avec le quarré TSRB, ou ILOQ, est aussi égal au rectangle de OP, ou BC par OL ou BH; donc il manque au quarré de AC, pour être égal aux quarrez des côtez AB, BC, deux rectangles du côté BC par la partie BH, que la perpendiculaire AH retranche sur ce côté.

### COROLLAIRE. III.

276. *Dans tout triangle obtusangle ABC* (Fig. 133.), *le quarré ACLM du côté AC opposé à l'angle obtus, est égal aux quarrez des deux côtez AB, BC, plus deux rectangles du côté AB par la ligne BT, qu'il faut lui ajoûter pour pouvoir tirer sur ce côté la perpendiculaire CT de l'angle opposé C.* Faites le quarré AEFT de la ligne AT; du point B tirez BO parallele à FT; puis divisez le côté FT, en sorte que FR soit égal à BT, & par conséquent RT égal à AB, & par R tirez RS parallele à AT; enfin faites le quarré TVXC de la perpendiculaire CT. Cela fait dans le triangle BTC le quarré de l'hypotenuse BC est égal aux quarrez TVXC, OFPR des côtez BT, TC, & dans le triangle rectangle ATC le quarré de l'hypotenuse AC est égal aux quarrez AEFT, TVXC des lignes AT, TC; or ces deux quarrez contiennent le quarré ASPB du côté AB, plus deux quarrez OFPR, TVXC, lesquels pris ensemble, valent le quarré du côté BC, comme on vient de voir: plus enfin deux rectangles SEOP, BPRT du côté AB par son prolongement BT; donc le quarré ACLB du côté AC, qui vaut les deux quarrez AEFT, TVXC, vaut aussi les quarrez des deux côtez AB, BC, plus deux rectangles du côté AB par son prolongement BT.

Les deux Corollaires suivans sont deux propositions d'Euclide touchant la puissance des lignes, que nous n'avons pas rapportées en leur lieu, pour les démontrer ici plus commodément.

## COROLLAIRE IV.

277. *Une ligne AB* (Fig. 134.), *étant divisée également en C, & inégalement en D, les quarrez des deux parties inégales AD, DB pris ensemble, sont doubles des quarrez de l'une des parties égales AC, & de la partie CD comprise entre les points de division des parties égales, & des inégales.* Du milieu C de la ligne AB, élevez la perpendiculaire CE égale à la moitié AC de la ligne, & tirez les lignes AE, EB; & vous aurez dans le triangle rectangle ACE, le quarré de l'hypotenuse AE égal aux quarrez des côtez AC, CE, ou double du quarré $\overline{AC}^2$, à cause que le côté AC est égal au côté CE.

Du point D élevez la perpendiculaire DF, & du point F tirez FG parallele à CD, & vous aurez 1°. deux triangles ECB, FDB, dont les côtez seront proportionnels, parce qu'ils auront les trois angles égaux chacun à chacun, à sçavoir l'angle B commun, l'angle droit ECB égal à l'angle droit FDB, & par conséquent le troisiéme angle CEB, égal au troisiéme angle DFB; donc EC. CB :: DF. DB, & comme EC est égal à CB par la construction, DF sera aussi égal à DB. 2°. Vous aurez deux autres triangles ECB, EGF, qui seront aussi proportionnels, à cause qu'ils ont l'angle E commun, & que leurs bases CB, GF, étant paralleles, font l'angle EGF égal à l'angle ECB, & l'angle EFG égal à l'angle EBC; donc EC. CB :: EG. GF, & comme EC est égal à CB, EG est par conséquent égal à GF, ou CD son égale, à cause des paralleles GC, DF. Or dans le triangle rectangle EGF, le quarré de l'hypotenuse EF, est égal aux quarrez des deux côtez EG, GF; donc le quarré de EF est double du quarré de CD.

Cela posé, considerez que le triangle rectangle ACE, étant isoscele, l'angle AEC doit être de 45 degrez, & que par la même raison l'angle BEC du triangle rectangle isoscele BCE, doit être de 45 degrez; d'où il suit que les deux angles AEC, BEC pris ensemble, c'est-à-dire l'angle AEB doit être droit. Si donc vous tirez la droite AF, vous aurez dans le triangle rectangle AEF, le quarré de l'hypotenuse AF, égal aux quarrez des côtez AE, EF, & dans le triangle rectangle ADF, le quarré de la même hypotenuse AF, égal aux quarrez des deux côtez AD, DF. Donc $\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2$, mais $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = 2\overline{AC}^2$, & $\overline{EF}^2 = 2\overline{CD}^2$; donc on a $\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2$, ou $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2$.

## COROLLAIRE V.

278. *Une ligne AB* (Fig. 135.), *étant diviſée en deux également en C, ſi on lui ajoûte une autre ligne BD, les quarrez de toute la ligne AD, & de l'ajoûtée BD pris enſemble, ſont égaux aux doubles des quarrez de l'une des moitiez AC, & de la ligne CD, compoſée de l'autre moitié & de l'ajoûtée.* Du point du milieu C, élevez la perpendiculaire CG égale à la moitié AC, & tirez les lignes AG, GB, ce qui vous donnera, comme dans le Corollaire précedent, deux triangles iſoſceles rectangles ACG, BCG, & par conſéquent le quarré de AG, double du quarré de la moitié AC. A l'extrêmité D élevez la perpendiculaire DF égale à AC ou CG, & tirez par F la ligne FG, qui ſera égale à CD. Enfin prolongez GB & FD juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en E, & tirez la ligne AE. Les deux triangles GBC, EBD, ſont proportionnels, parce qu'ils ont l'angle CBG égal à l'angle DBE, qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'angle droit GCB égal à l'angle droit BDE, & par conſéquent le troiſiéme angle CGB égal au troiſiéme DEB; donc GC. CB :: DE. DB, & comme GC eſt égal à CB; donc DE eſt auſſi égal à l'ajoûtée DB. Or FD eſt égal à CG ou CB, par la conſtruction. Donc FD+DE, c'eſt-à-dire, FE eſt égal à CB+BD, c'eſt-à-dire à CD; donc le triangle rectangle GFE eſt iſoſcele, & ainſi le quarré de l'hypotenuſe GE, égal aux quarrez des deux côtez GF, FE, eſt double du quarré de CD. Maintenant dans le triangle rectangle ADE, le quarré de AE eſt égal aux quarrez de AD, & de DE, & dans le triangle rectangle AGE, le quarré de la même ligne AE, eſt auſſi égal aux quarrez de AG & de GE; donc les quarrez de AD & DE, c'eſt-à-dire de la ligne entiere AD, & de l'ajoûtée DE ou DB pris enſemble, ſont égaux aux quarrez de AG, & GE, dont le premier $\overline{AG}^2$ eſt double du quarré de la moitié AC, & l'autre GE eſt double du quarré de la ligne CD, compoſée de la moitié CB & de l'ajoûtée BD.

## PROBLEME LIII.

279. *Retrancher d'un triangle donné ABC* (Fig. 136.), *un autre triangle qui lui ſoit ſemblable.*

D'un point D pris ſur l'un des côtez, tirez une ligne DE parallele à la baſe, & vous aurez le triangle DBE, qui ſera ſemblable au triangle ABC.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles DE, AC, l'angle BDE eſt égal à l'angle BAC, & l'angle BED eſt égal à l'angle BCA par la même raiſon. Ainſi les deux triangles ABC, DBE, ayant l'angle B commun, l'angle BAC égal à l'angle BDE, & l'angle BCA égal à l'angle BED, ſont ſemblables, & leurs côtez ſont proportionnels.

COROLLAIRE.

280. Il ſuit de-là que ſi un triangle eſt coupé par une ou pluſieurs lignes paralleles à l'un de ſes côtez, les deux autres côtez ſont coupés proportionnellement; car les triangles ABC, DBE, étant ſemblables, on a AB. DB :: CB. EB; donc *dividendo*, AB—DB. DB :: CB—EB. EB, c'eſt-à-dire, AD. DB :: CE. EB. Et ſi les côtez ſont coupez proportionnellement, les lignes qui les coupent ſont paralleles à la baſe.

PROBLEME LIV.

281. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données AB, BC.* (Fig. 137.)

Ajoutez la ligne BC à la ligne AB, puis diviſant leur ſomme AC en deux également en E, décrivez du centre E, & de l'intervalle AE, ou EC, le demi-cercle ADC; du point B elevez la perpendiculaire BD, qui coupera la demi-circonference en D, & la ligne BD ſera moyenne proportionnelle entre les données AB, BC.

DEMONSTRATION.

Des extrêmitez A, D du diametre, tirez les droites AD, DC, qui formeront un triangle rectangle, dont l'angle ADB ſera droit, parce qu'il a ſon ſommet à la circonference, & qu'il s'appuye ſur le diametre : or la ligne BD eſt perpendiculaire ſur l'hypotenuſe AC par la conſtruction, & elle paſſe par le ſommet de l'angle droit; donc elle diviſe le triangle rectangle ADC, en deux autres triangles ABC, BDC, qui ont les côtez proportionnels (*n.* 273.); donc :: AB, BD. BC, & par conſéquent BD eſt moyenne proportionnelle entre AB & BC.

*Autrement.*

Mettez la ligne BC sur la ligne AB, de B en C (*Fig.* 138); puis partageant la ligne AB en deux également en E, décrivez du centre E & de l'intervalle EA, ou EB le demi-cercle ADB; du point C elevez la perpendiculaire CD, qui coupera la demi-circonference en D, d'où vous tirerez au point B la droite DB, qui sera moyenne proportionnelle entre les données AB. BC.

DEMONSTRATION.

Tirez la ligne AD, qui vous donnera le triangle rectangle ADB, lequel sera coupé par la perpendiculaire DC en deux triangles ACD, DCB, dont les côtez seront proportionnels entr'eux, & aux côtez du triangle total ADC (*n.* 273.); comparant donc ensemble le triangle DCB, & le triangle total ADB, on aura :: CB. BD. AB, & par conséquent BD sera moyenne proportionnelle entre CB. AB.

On prouveroit de même, s'il étoit nécessaire, que la ligne AD est moyenne proportionnelle entre AC & AB.

*Autrement.*

Mettez la ligne BC sur la ligne AB, de B en C (*Fig.* 139.), faites passer un cercle par les extrêmitez A, C, du reste AC, ce qui se fait en décrivant des extrêmitez A, C prises pour centre, & d'un intervalle égal, deux arcs de cercle qui se coupent en un point O, lequel est par conséquent également éloigné des extrêmitez A, B; ainsi prenant ce point O pour centre, & la distance OA pour rayon, la circonference ACDE passe par les points A, B; cela fait, du point B tirez la tangente BD, laquelle sera moyenne proportionnelle entre les lignes AB, BC.

DEMONSTRATION.

Du point D tirez les lignes DA, DC, & vous aurez deux triangles BCD, BDA, qui seront semblables entr'eux; car ils auront l'angle B commun, & l'angle CDB du petit segment CD, égal à l'angle CAD dans le grand segment (*n.* 154.); d'où il suit que le troisiéme angle BCD, est égal au troisiéme BDA; or les triangles semblables ayant leurs côtez proportionnels, on a :: CB. BD. BA. Donc, &c.

COROL.

### COROLLAIRE.

282. *Si d'un même point B hors du cercle on tire une tangente à ce cercle, & une ſecante, le quarré de la tangente BD, eſt égal au rectangle de la ſecante BA, par ſa partie exterieure BC.* Par la démonſtration précedente on a :: CB. BD. BA; donc faiſant le produit des extrêmes, & le quarré de la moyenne, on aura $CB \times BA = \overline{BD}^2$.

### PROBLEME LV.

283 *Entre deux lignes données AB, AC, trouver deux moyennes proportionnelles, en ſorte que les quatre lignes ſoient en progreſſion.* (Fig. 140.)

Ce Probleme ne peut ſe réſoudre géometriquement que par la Géometrie compoſée & les Sections coniques; mais comme les courbes qu'il faut y employer, ne ſont pas faciles à décrire, on a imaginé pluſieurs moyens mécaniques, parmi leſquels je n'en vois point de plus commode que celui de ſe ſervir du compas de proportion, ainſi que nous l'enſeignerons dans la ſuite, ou de la pratique que nous allons donner.

Faites le rectangle ACHB des deux lignes données, & tirez ſes deux diagonales CB, AH, qui ſe couperont en un point O, également éloigné des angles A, C, H, B, parce que ces deux diagonales ſont égales, & ſe coupent mutuellement en deux parties égales. Du point O abbaiſſez la perpendiculaire OE ſur le côté AC, qui ſera diviſé en deux parties égales en E; enfin prolongez indéfiniment le côté AC en D, & le côté AB en P, & mettant une regle ſur le point H, tournez-la autour de ce point juſqu'à ce qu'elle coupe les lignes AD, AP en deux points également éloignés du centre O; ce que vous trouverez en meſurant les diſtances OD, OP avec le compas, & vous aurez les deux lignes CD, BP moyennes proportionnelles entre les deux AB, AC, en ſorte que AB. CD :: CD. BP :: BP. AC.

### DEMONSTRATION.

La ligne AC étant diviſée en deux parties égales en E, le quarré de la ligne ED, c'eſt-à-dire de l'une des moitiés EC, jointe à la ligne ajoûtée CD, eſt égal au rectangle $AD \times DC$ de la ligne entiere AD, par l'ajoûtée CD, plus le quarré de l'une des moitiés EC (*n.* 238.), & ajoûtant de part & d'autre le quarré de la

P

ligne EO, on aura $\overline{DE}^2+\overline{EO}^2=AD\times DC+\overline{EC}^2+\overline{EO}^2$; or à cauſe du triangle rectangle DEO, le quarré de DO eſt égal aux quarrez $\overline{DE}^2+\overline{EO}^2$, & à cauſe du triangle rectangle ECO, le quarré de CO eſt égal aux deux quarrez $\overline{EC}^2$. $\overline{EO}^2$ (*n.* 274.); donc puiſque $\overline{DE}^2+\overline{EO}^2=AD\times DC+\overline{EC}^2+\overline{EO}^2$, mettant au lieu de $\overline{DE}^2+\overline{EO}^2$, le quarré $\overline{DO}^2$ qui leur eſt égal, & au lieu de $\overline{EC}^2+\overline{EO}^2$, le quarré CO, qui leur eſt égal, on aura $\overline{DO}^2=AD\times DC+\overline{CO}^2$. On prouvera de même en tirant du centre O la perpendiculaire OL ſur la ligne AB, que le quarré $\overline{OP}^2=AP\times PB+\overline{OB}^2$, & comme le quarré $\overline{OP}^2=\overline{DO}^2$, & le quarré $\overline{OB}^2=\overline{OC}^2$, mettant $\overline{DO}^2$ au lieu de $\overline{OP}^2$, & $\overline{OC}^2$ au lieu de $\overline{OB}^2$, on aura $\overline{DO}^2=AP\times PB+\overline{OC}^2$; mais le même quarré $\overline{DO}^2=AD\times DC+\overline{OC}^2$, comme on vient de voir; donc $AP\times PB+\overline{OC}^2=AD\times DC+\overline{OC}^2$, & retranchant de part & d'autre $\overline{OC}^2$, on aura $AP\times PB=AD\times DC$; donc les deux lignes AP, PB, ſont réciproques aux deux AD, DC (*n.* 252); donc AP. AD :: DC. PB. Or les triangles DCH, DAP, étant ſemblables à cauſe des paralleles CH, AP, on a auſſi AP. AD :: CH. CD; donc CH. CD :: DC. PB, & mettant au lieu de CH, ſon égale AB, on aura AB. CD :: CD. PB. De même les triangles DCH, HBP étant ſemblables, à cauſe des paralleles CH, BP, DA, HB, on aura CH ou AB. CD :: BP. BH ou AC ſon égale; donc puiſque la raiſon AB. CD eſt égale à la raiſon CD. PB, & qu'elle eſt auſſi égale à la raiſon BP. AC, on aura les trois raiſons égales AB. CD :: CD. PB :: PB. AC; d'où il ſuit que les quatre lignes AB, CD, PB, AC, ſont en progreſſion, & que les deux CD, CP, ſont moyennes proportionnelles entre les deux lignes données AB, AC.

## PROBLEME LVI.

284. *Couper une ligne donnée AB* (Fig. 141.), en moyenne & extrême raiſon, *c'eſt-à-dire, la couper en deux parties, de ſorte que la ligne entiere AB ſoit à ſa grande partie BE, comme cette partie BE eſt à la petite AE.*

A l'extrêmité A élevez la perpendiculaire AO égale à la moitié de la ligne AB, du centre O & du rayon OA, décrivez un cercle ACD, auquel vous tirerez de l'autre extrêmité B la secante BC, qui passe par le centre O; enfin faites BE égale à la partie exterieure BD de la secante, & la ligne AB sera coupée en E en moyenne & extrême raison.

### DEMONSTRATION.

AB est tangente du cercle, & CB qui part d'un même point exterieur B, est une secante; donc :: CB. AB. DB (*n.* 281.); donc *dividendo* CB—AB. AB :: AB—DB. DB. Or par la construction AB est égal au diametre CD, & DB est égal à BE, mettant donc dans le premier antecedent de cette proportion CD, au lieu de son égale AB, & dans le second antecedent & le second conséquent, BE au lieu de DB, on aura CB—CD. AB :: AB—BE. BE, ce qui se réduit à DB ou BE. AB :: AE. BE; donc *invertendo* AB. BE :: BE. AE. & par conséquent BE est moyenne proportionnelle entre la ligne AB, & la petite partie AE.

### COROLLAIRE I.

285. *Le quarré de la grande partie BE est égal au rectangle de la ligne entiere par la petite partie AE.* Car puisqu'on a :: AB. BE. AE; donc on a aussi $AB \times AE = \overline{BE}^2$.

### COROLLAIRE II.

286. *Une ligne AB* (Fig. 142.), *etant coupée en moyenne & extrême raison en E, si on lui ajoûte la* médiane *EB, c'est-à-dire sa grande partie de B en C, la toute AC sera encore coupée au point B en moyenne & extrême raison;* puisqu'on a AB. BE :: BE. AE; donc *componendo* AB+BE. AB :: BE+AE. BE; & comme BE est égal à BC, si l'on substituë BC au lieu de BE dans le premier antecedent, on aura AB+BC. AB. BE+AE. BE, ou ce qui est la même chose, AC. AB :: AB. BE, ou BC; donc AB est moyenne proportionnelle entre la ligne AC, & sa petite partie BC.

### COROLLAIRE III.

287. *Une ligne AB étant divisée en moyenne & extrême raison en E* (Fig. 143.), *si l'on porte la petite partie AE sur la médiane EB de E*

*en C, cette médiane sera coupée EB au point C en moyenne & extrême raison.* Puisqu'on a AB. EB. :: EB. EA ; donc *dividendo* on aura AB—EB. EB :: EB—EA. EA ; or EA est égal à EC, mettant donc EC au lieu de EA, dans cette proportion on aura AB—EB. EB :: EB—EC. EC, ce qui se réduit à AE ou EC. EB :: CB. EC; donc *invertendo* on aura EB. EC :: EC. CB. & par conséquent EB sera divisée en moyenne & extrême raison.

### COROLLAIRE IV.

288. Il suit des deux Corollaires précedens, qu'une ligne étant coupée en moyenne & extrême raison, on peut en trouver une infinité d'autres coupées de la même facon, qui seront de plus grandes en plus grandes, si on ajoûte toujours la derniere médiane à la ligne entiere, & de moindres en moindres, si on retranche la derniere moindre partie de la derniere médiane.

### LEMME I. POUR LES COROLLAIRES SUIVANS.

289. *Si dans un rectangle ou dans un parallelograme ABCD* (Fig. 144. 145.), *on tire la diagonale AC, & que d'un point O pris sur cette diagonale, on tire deux lignes IL, MN, paralleles aux côtez, il se formera quatre rectangles ou quatre parallelogrames ; donc les deux MBIO, LOND, par lesquels la diagonale ne passe pas, seront égaux entr'eux.*

### DEMONSTRATION.

La diagonale AC divise le rectangle ou le parallelograme en deux triangles égaux & équiangles (*n.* 203.), chacun desquels contient deux autres triangles & un parallelograme ; or le triangle OCI, & le triangle OCN sont égaux, étant faits par la diagonale OC du rectangle ou du parallelograme IONC, & par la même raison les deux triangles MAO, OLA sont égaux ; donc si du triangle ABC on ôte les deux triangles IOC, MAO, & du triangle CDA, les deux triangles ONC, ALO, le rectangle, ou le parallelograme restant MBIO, sera égal au rectangle ou parallelograme restant IONC.

Dans le quarré (*Fig.* 146.) les figures AMOL, IONC, par lesquels la diagonale passe, sont les quarrez des parties AL, LD de la base ; car la diagonale AC divisant l'angle droit BAD en deux angles égaux, l'angle MAO du triangle rectangle MAO, est de 45 degrez ; & par conséquent l'angle MOA est aussi demi-

droit : d'où il suit que ce triangle est isoscele, & que par conséquent le côté AM étant égal au côté MO, la figure AMOL est le quarré de la partie AL, & l'on démontrera de même que ICON, est le quarré de l'autre partie LD.

## LEMME II. POUR LES COROLLAIRES SUIVANS.

290. *Le quarré ABCD d'une ligne AB* (Fig. 147.), *est quadruple du quarré AEIH de sa moitié AH.*

### DEMONSTRATION.

Coupez les côtez AB, AC, chacun en deux parties égales aux points H, E, & de ces points tirez HG, EF, paralleles aux côtez AC, AB, le quarré ABCD sera divisé en quatre quarrez égaux, chacun desquels sera égal au quarré AEIH de la moitié AH.

## COROLLAIRE V.

291. *Une ligne AB* (fig. 148.), *étant coupée en moyenne & extrême raison en C, si on ajoûte à la médiane AC, la moitié de la ligne entiere de A en E, le quarré EHIC de la ligne CE, est quintuple du quarré de la moitié de la ligne AB.* Tirez du point A la parallele AL au côté EH, puis coupant ce côté EH, en sorte que EM soit égal à EA, & par conséquent MH égal à AC, tirez MN parallele à AC, & la diagonale EI ; le quarré EMOA sera le quarré de EA, ou de la moitié de la ligne AB, & le quarré LINO sera le quarré de la médiane AB (*n.* 289.), & les deux rectangles MHLO, AONC, seront égaux entr'eux (*n.* 289.). De l'autre côté faites le quarré ABPR de la ligne entiere AB, lequel sera quadruple du quarré EMOA de la moitié de cette même ligne AB ; enfin tirez du point C la parallele CQ au côté BR ; & coupant le côté AP en deux parties égales en Z, tirez ZX parallele à AC. Par la supposition le quarré LINO de la médiane, est égal au rectangle CBQR de la ligne entiere AB, par la petite partie CB. De plus, le rectangle AONC est égal au rectangle AZXC, l'un & l'autre ayant la base commune AC, & la hauteur AZ égale à la hauteur AG ou EM, parce que chacune de ces hauteurs, est égale à la moitié de la ligne AB, & comme le rectangle MHLO, est égal au rectangle AONC (*n.* 289.), & le rectangle ZXPQ égal au rectangle ACZX, lequel, comme on vient de voir, est égal au rectangle AONC, il s'ensuit que le rectangle MHLO est égal au rectangle

ZXPQ ; donc le quarré entier ABPR eſt égal à la figure MHICAOM, & comme le quarré ABPR eſt égal à quatre quarrez de la moitié de la ligne entiere AB, ou à quatre quarrez de EA, la figure MHICAOM, eſt auſſi égale à quatre quarrez de EA ; ſi on ajoûte donc à cette figure le quarré EMOA de EA, on aura le quarré EHIC égal à cinq quarrez de EA ou à cinq quarrez de la moitié de AB.

## COROLLAIRE VI.

292. *Une ligne AB* (Fig. 149.) *étant coupée en moyenne & extrême raiſon en C, ſi on ajoûte à ſa petite partie BC, la moitié RC de la médiane, le quarré RLMB de la ligne RB, ſera quintuple du quarré RPOC de la moitié RC de la médiane ;* tirez la diagonale RM, & du point C la ligne CN parallele au côté RL, puis du point O où cette ligne coupe la diagonale, tirez PQ parallele à AB ; le quarré RPOC ſera le quarré de la moitié RC de la médiane, & le quarré ONMQ, ſera celui de la petite partie CB, & les deux rectangles PLNO, COQB, ſeront égaux entr'eux (*n.* 289.) ; d'un autre côté faites le quarré ACID de la médiane, & le rectangle CBYH de la ligne entiere AB par ſa petite partie CB, lequel rectangle ſera égal au quarré ACDI par la ſuppoſition, & par conſéquent quadruple du quarré PORC. Si l'on diviſe donc le côté BY du rectangle CBHY, en ſorte que BT ſoit égal à la petite partie CB, & TV égal à la moitié RC de la médiane, le reſte VY ſera égal à l'autre moitié AR. Ainſi tirant les paralleles ZT, XV, on aura le quarré CBZT égal au qurré ONMQ, le rectangle ZTXV, égal au rectangle COQB, & le rectangle XVHI, égal au rectangle PLNO ; d'où il ſuit que le rectangle CBHY, eſt égal à la figure LMBCOPL, & que par conſéquent l'un & l'autre ſont quadruples du quarré PORC ; ajoûtant donc à la figure LMBCOPL, le quarré PORC, on aura le quarré RLMB quintuple du quarré PORC.

## COROLLAIRE VII.

293. *Une ligne AB* (Fig. 150.), *étant coupée en moyenne & extrême raiſon en C, le quarré ADEB de cette ligne, plus le quarré CBRT de ſa petite partie ſont enſemble triples du quarré ACNM de la médiane.* Du point C tirez CI parallele au côté AD, puis diviſant ce côté, en ſorte que AF ſoit égal à AC ; & par conſéquent FD égal à CB, tirez FG parallele à CB, & vous aurez FOCA égal au

quarré ACNM de la médiane ; or par la supposition le rectangle FDEG de la ligne AB par sa petite partie BC, est égal au quarré de la médiane ACLM, & il est visible que le rectangle OGRT est égal au rectangle FDEG ; donc, &c.

## COROLLAIRE VIII.

294. *Si deux lignes AB*, ab (Fig. 151.), *sont coupées en moyenne & extrême raison aux points C*, c, *elles sont coupées en parties proportionnelles, c'est-à-dire AC. CB :: ac. cb.* Mettez le triangle rectangle OAB sur le triangle rectangle *oab*, en sorte que l'angle droit A tombe sur l'angle droit *a*, & vous aurez OA. AB :: *oa. ab*, les antecedens OA, *oa*, étant chacun moitié de leurs conséquens AB. *ab* par la construction ; donc *permutando* OA. *oa* :: AB. *ab*, & *dividendo* OA—*oa*. *oa* :: AB—*ab*. *ab*, ou O*o*. *oa* :: *bB*. *ab* ; donc les côtez OA. AB du triangle OAB, sont coupés proportionnellement par la ligne *ob*, & la ligne *ob* est parallele à la base OB. Si l'on tire donc dans ces deux triangles les lignes AH, *ah*, on aura deux autres triangles isosceles AOH, *aoh*, qui seront aussi semblables ; car les angles des sommets O, *o*, sont égaux, à cause des triangles semblables AOB, *aob*, & par conséquent les deux angles sur la base sont égaux aux deux triangles sur la base, chacun d'eux étant la moitié du complément de l'angle du sommet à deux droits. Cela posé, les deux triangles AHB, *ahb*, sont aussi semblables ; car l'angle ABO est égal à l'angle *abo*, à cause des triangles semblables OAB, *oab* ; l'angle HAB est égal à l'angle *hab*, parce que les deux angles OAB, *oab* étant droits, si on ôte du premier l'angle OAH, & du second l'angle *oah* égal à l'angle OAH, à cause des triangles semblables AOH, *aoh* l'angle restant HAB, est égal à l'angle restant *hab* ; d'où il suit que le troisiéme angle AHB est égal au troisiéme *ahb*. Donc AB. BH :: *ab. bh*, & comme les lignes BH, *bh* sont égales aux deux BC, *bc* ; donc AB. BC :: *ab. bc*, & *dividendo* AB—BC. BC :: *ab*—*bc. bc*, ou AC. cB :: *ac. cb.* Ainsi les lignes AB, *ab* sont coupées en parties proportionnelles.

## COROLLAIRE IX.

295. Il suit de ce dernier Corollaire que, *si deux triangles OAB*, oab, *ont deux côtez. OA, AB, proportionnels aux deux côtez* oa, ab, *& l'angle compris A, égal à l'angle compris* a, *les deux triangles sont semblables* ; car soit que les angles compris A, *a*, soient droits,

comme dans la queſtion préſente, ſoit qu'ils ſoient aigus ou obtus; il ſuffit que l'un ſoit égal à l'autre, pour que les côtez OA, AB, tombent ſur les côtez *oa*, *ab*, & dès-lors on démontrera de la même façon que ces côtez ſont coupés proportionnellement, & que les deux triangles ſont ſemblables.

## COROLLAIRE X.

296. *Une ligne AB* (Fig. 148.), *étant coupée en moyenne & extrême raiſon en C, ſes deux parties AC, CB, ſont incommenſurables entr'elles & à la ligne entiere.* Ajoûtant à la médiane AC la moitié EA de la ligne entiere, le quarré de EC eſt quintuple du quarré de la moitié EA, & par conſéquent ces deux quarrez ſont entr'eux comme 5 à 1. Or les côtez EC, EA de ces quarrez, ſont entr'eux comme les racines quarrées de 5 & 1, & 5 eſt un nombre dont on ne peut exprimer la racine quarrée ni en nombre entier, ni en nombre rompu, parce qu'il n'eſt pas un quarré parfait, ainſi que nous l'avons obſervé dans notre Arithmetique des Géometres; donc le rapport de EC à EA, ne pouvant s'exprimer en nombre, eſt un rapport irrationnel, & les deux lignes EC, EA, ſont incommenſurables (*n.* 247.). Or la ligne EA meſure la partie EA de la ligne EC, puiſqu'elle lui eſt égale; donc la ligne EA eſt incommenſurable avec l'autre partie AC; autrement elle meſureroit la ligne entiere EC. Puis donc que la médiane AC eſt incommenſurable à la ligne EA, qui eſt la moitié de la ligne AB, elle eſt auſſi incommenſurable à cette ligne entiere; & ſi elle lui eſt incommenſurable, elle l'eſt auſſi à la petite partie, parce que ſi cette petite meſuroit la médiane, elle meſureroit auſſi la ligne entiere.

## PROBLEME LVII.

297. *Un triangle ABC étant donné* (Fig. 152.), *couper ſa baſe AC en deux parties AD, DC, proportionnelles aux côtez AB, BC en ſorte que AD. AB :: DC. CB.*

Diviſez l'angle B du ſommet B en deux parties égales par la ligne BE, laquelle coupera la baſe au point D en parties proportionnelles aux côtez AB, BC, ainſi qu'il eſt requis.

## DEMONSTRATION.

Tirez par les extrêmitez A, B, de la baſe AB, les lignes RS, GH, paralleles à la ligne BE, vous aurez deux eſpaces paralleles

BERS,

BERS, BEGH, dans lesquels les lignes AB, BC, seront également inclinées, l'angle ABD étant égal à l'angle DBC par la construction. De même la ligne AC étant droite, sa partie AD est autant inclinée dans son espace que la partie DC est inclinée dans le sien. Ainsi les deux lignes DC, CB, étant autant inclinées dans l'espace GHBE, que les deux AD, AB dans l'espace BEAS, il s'ensuit que DC. CB :: AD. AB, & *permutando* DC. DA :: CB. BA.

## REMARQUE.

298. Il ne faudroit pas conclure de-là que les deux triangles ADB, DBC, sont semblables, parce qu'il faut pour les rendre tels, que les angles compris sous les côtez proportionnels, soient égaux (*n.* 295.) ce qui n'arrive pas ici, à cause que dans l'espace parallele RSBE, l'inclinée AB n'est pas posée du même côté à l'égard de la ligne AD, que l'inclinée BC à l'égard de la ligne CD dans l'autre espace BEGH; car la ligne BC étant posée du côté de l'angle ACG, fait par la ligne AC, & la parallele GH, l'autre inclinée BA devroit être posée du côté de l'angle alterne CAS, auquel cas les deux triangles BDC, ADE, seroient semblables, ayant l'angle ADE égal à l'angle BDC, qui lui est opposé au sommet, l'angle CBD égal à l'angle DEA, parce que les deux lignes AE, BC, seroient également inclinées, & par conséquent le troisiéme angle EAD égal au troisiéme BCD.

## COROLLAIRE I.

299. *Dans tout triangle rectangle BAC* (Fig. 153.), *si l'on divise l'un des angles sur son hypotenuse en deux ou plusieurs parties égales, le côté opposé à cet angle, sera divisé en deux ou plusieurs parties inégales; donc les plus grandes seront celles qui seront plus éloignées de l'angle droit A.* L'angle ECA étant divisé en deux parties égales par la ligne CD, on a DE. EC :: DA. AC; & comme le premier conséquent EC est plus grand que le second AC, à cause que la ligne EC est oblique sur BA, & AC perpendiculaire, il s'ensuit que le premier antecedent DE, est plus grand que le second antecedent DA. De même l'angle BCD étant divisé en deux également par la ligne CE, on a EB, BC :: ED. DC; mais le premier conséquent BC, étant une oblique plus éloignée de la perpendiculaire AC que le second conséquent DC, est aussi plus grand que DC; donc le premier antecedent EB, est plus grand que le second antecedent ED.

### COROLLAIRE II.

300. *Un triangle isoscele ABC* (Fig. 154.), *dont l'angle B du sommet est de 36. degrez, étant donné, si l'on divise l'un des angles A de la base AC en deux parties égales par la ligne AD, le côté BC sera divisé au point D en moyenne & extrême raison.* Par la démonstration de ce Problême on aura CD. CA :: DB. BA. Si donc je fais voir que CA est égal à DB, on aura CD. DB :: DB. BA, & comme BA est égal à BC par la supposition, on aura enfin CD. DB :: DB. CB. Il reste donc à prouver que CA est égal à DB, & pour cela considerez que l'angle B étant de 36 degrez par la supposition, les deux autres angles A, C du triangle ABC, doivent valoir chacun 72 degrez. Donc l'angle DAC, étant la moitié de l'angle A, doit valoir 36 degrez, ce qui le rend égal à l'angle B; & par conséquent le triangle ADB est isoscele, & le côté AD est égal au côté DB. De même dans le triangle DAC, l'angle DAC est de 36 degrez, puisqu'il est la moitié de l'angle A, l'angle ACD est de 72, comme nous venons de voir; donc le troisiéme angle ADC, est aussi de 72 degrez; ainsi le côté AC est égal au côté AD, & par conséquent à la ligne DB; donc, &c.

### COROLLAIRE III.

301. La médiane BD d'une ligne divisée en moyenne & extrême raison, étant donnée, on trouvera la ligne entiere & la petite partie, en faisant à l'extrémité D de la médiane un angle de 108 degrez avec une ligne AD, que l'on fera égal à BD, puis tirant la ligne BA, on prolongera BD en C, jusqu'à ce que BC soit égale à BA, & BC sera la ligne entiere, & DC la petite partie, ce qui est visible par le Corollaire précedent; car les deux angles égaux DAB, DBA du triangle BAD, étant chacun de 36 degrez, le troisiéme BDA doit être par conséquent de 108.

### COROLLAIRE IV.

302. La petite partie CD d'une ligne coupée en moyenne & extrême raison étant donnée, on trouvera la ligne entiere & la médiane; en faisant aux extrêmitez C, D deux angles de 72 degrez chacun, ce qui donnera un triangle isoscele DAC, ensuite on prolongera CD en B, jusqu'à ce que BD soit égal à AC, & la ligne BC sera la ligne entiere, & AD en sera la médiane.

### COROLLAIRE V.

303. Pour faire sur une ligne donnée BC un triangle isoscele, dont chaque angle de la base soit double de l'angle du sommet, on divisera la ligne BC en moyenne & extrême raison; puis prenant deux lignes égales chacune à BC, & une troisiéme égale à BD, on formera de ces trois lignes un triangle, lequel sera isoscele, & dont les angles de la base seront chacun double de l'angle du sommet.

## PROBLEME LVIII.

304. *A deux lignes données AB, AC* (Fig. 155.), *trouver une troisiéme proportionnelle.*

Faites avec les deux lignes données un angle BAC à discrétion, que vous fermerez par la base BC. Prolongez les deux côtez AC, AB, indéfiniment en H, I, & prenant la grandeur AC de la seconde ligne, portez-la sur AI de A en D, & du point D tirez DE parallele à BC, jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne AH en E, ce qui vous donnera la ligne AE, troisiéme proportionnelle aux deux lignes AB, AC.

### DEMONSTRATION.

Les deux triangles ABC, ADE, ayant l'angle A commun, & les deux angles sur la base égaux chacun à chacun, à cause des paralleles BC, DE, sont par conséquent proportionnels; donc AB. AC :: AD. AE; mais AD est égal à AC par la construction: donc AB. AC :: AC. AE.

### *Autrement.*

Faites avec les deux lignes AB. BC, un angle quelconque CBA (*Fig.* 156.), que vous fermerez par la base AC, puis prolongeant cette base, & le côté AB en-delà de B, faites AD égal à la seconde ligne BC, & du point D tirez la parallele DE, qui sera la troisiéme proportionnelle aux deux AB, BC.

### DEMONSTRATION.

Les deux triangles ABC, ADE, étant semblables par la même raison que nous en avons donnée ci-dessus, on aura AB. BC :: AD. DE; or AD est égal à BC par la construction: donc AB. BC :: BC. DE.

### COROLLAIRE.

305. Si la premiere des deux lignes données étoit plus grande que la seconde, comme par exemple, la ligne AE (*Fig.* 155.), qui est plus grande que la ligne AD, on trouveroit la troisiéme proportionnelle à ces deux lignes, en leur faisant faire un angle quelconque A, que l'on fermeroit par la base DE, puis on porteroit sur la grande ligne AE, la petite AD de A en C, & du point C on tireroit CB parallele à DE, & la ligne AB seroit la troisiéme proportionnelle aux deux AE, AD; car à cause des triangles semblables, on auroit AE. AD :: AC, ou AD. AB.

Ou bien si les deux lignes données étoient, DE, AD (*Fig.* 156.), on faisoit de ces deux lignes un angle D à discrétion, que l'on fermeroit par la ligne AE, puis portant la petite ligne AD sur DE, de D en H, on tireroit HC parallele à AD, & du point C la ligne CB parallele à DE, & la ligne AB seroit la troisiéme proportionnelle aux deux DE, AD; car les lignes CB, HD, étant paralleles entre les deux paralleles, CH, BD sont égales; or HD est égal à AD: donc CB est aussi égal à AD; mais les triangles semblables ADE, ABC, donnent DE. AD :: CB. AB: mettant donc AD au lieu de CB, on aura DE. AD :: AD. AB.

### PROBLEME LIX.

306. *A trois lignes AB, AC, AD, trouver une quatriéme proportionnelle* (Fig. 155.).

Faites un angle A à discrétion, dont les jambes AH, AI, soient d'une longueur indéterminée, portez la premiere ligne sur AI de A en B, & la seconde sur AH de A en C, & tirez la ligne CB; portez ensuite la troisiéme que je suppose n'être pas égale à la seconde de A en D, & tirez DE parallele à CB, ce qui vous donnera la ligne AE, quatriéme proportionnelle aux trois lignes données. La démonstration est la même que dans le Probleme précedent.

### *Autrement.*

Faites avec la premiere ligne AB, & la seconde BC, un angle quelconque que vous formerez par la base AC, prolongez cette base, & le côté AB en-delà de CB, & portez la troisiéme ligne que je suppose inégale à la seconde de A en D; du point

D tirez la parallele DE, qui sera la quatriéme proportionnelle aux trois lignes données, ce qui est clair par le problême précedent.

### COROLLAIRE.

307. Si la proportionnelle demandée, & que j'appellerai X, étoit le premier antecedent de la proportion, en sorte qu'on eût X. AC :: AD. AE, on feroit *invertendo*, AE. AD :: AC, X (*Fig.* 155.), & alors X seroit la quatriéme proportionnelle aux trois AE, AD, AC. C'est pourquoi on la trouveroit en construisant de l'une des deux façons que nous avons enseignées dans ce Probleme & dans le précedent.

De même si X étoit le second terme de la proportion, on auroit AB. X :: AD. AE; donc *permutando*, X. AB :: AE. AD, & *invertendo*, AD. AE :: AB. X; ainsi X seroit encore une quatriéme proportionnelle qu'on trouveroit comme ci-dessus.

Enfin si X étoit le troisiéme terme de la proportion, on auroit AB. AC :: X. AE; donc *invvertendo*, AC. AB :: AE. X, & l'on trouveroit la quatriéme X, comme nous avons dit.

### PROBLEME LX.

308. *Les deux premiers termes AB, CD, d'une progression descendante de lignes, étant donnés* (Fig. 157.), *continuer cette progression tant qu'on voudra.*

Faites un angle BAC de telle ouverture qu'il vous plaira, & dont les jambes AB, AC, soient chacune égale à la premiere ligne donnée AB; de l'extrêmité C de l'une de ces jambes, tirez CD parallele à AB, & égale à la seconde ligne donnée CD; par les extrêmitez B, A, tirez la ligne BD, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle coupe au point O la ligne AC prolongée. Portez ensuite la grandeur CD sur AO de C en R, & du point R tirez RS parallele à CD, & RS sera le troisiéme terme de la progression. Portez de même la grandeur RS sur AO de R en T, & du point T tirez TV parallele à RS, & TV sera le quatriéme terme; operez toujours de la même façon, & vous continuërez cette progression à l'infini même s'il étoit nécessaire. Ainsi les termes de la progression seront les lignes AB, CD, RS, TV, XZ, IH, &c.

DEMONSTRATION.

En premier lieu, les lignes AB, CD, RS, TV, &c. étant paralleles entr'elles par la conſtruction les triangles OAB, OCD, ORS, &c. ſont équiangles; donc OA. AB :: OC. CD. & *dividendo*, OA—AB. AB :: OC—CD. CD. Or AB=AC, & CD =CR par la conſtruction; donc OA—CA. AB :: OC—CR. CD, ou ce qui eſt la même choſe, OC. AB :: OR. CD.; donc *permutando*, OC. OR :: AB. CD. Mais à cauſe des triangles ſemblables OCD, ORS, on a OC. CR :: CD. RS; donc AB. CD :: CD. RS.; ainſi RS eſt troiſiéme proportionnelle aux deux AB. CD. On prouvera de même que RS. TV :: CD. RS, & que par conſéquent TV eſt le quatriéme terme de la progreſſion, & ainſi des autres.

En ſecond lieu, cette progreſſion pourra ſe continuer à l'infini; car la baſe BA du triangle OBA, étant plus petite que ſon côté OA, les baſes CD, RS, TV, &c. des autres triangles OCD, ORS, OTV, &c. ſeront moindres que leurs côtez OC, OR, OT, &c. d'où il ſuit qu'en portant ces baſes ſur la ligne AO, de C en R, de R en T, &c. elles laiſſeront toujours un reſte RO, ou TO, ou XO, &c. & que par conſéquent on pourra toujours trouver de nouveaux termes à l'infini.

PROBLEME LXI.

309. *Une progreſſion deſcendante de lignes AB. CD. RS, &c.* (Fig. 157.), *étant donnée, trouver la ſomme de ces lignes, ou une ligne égale à toutes ces lignes priſes enſemble.*

Prenez la difference de la premiere à la ſeconde ligne, & la difference de la premiere à la derniere; enſuite cherchez une quatriéme proportionnelle à la difference de la premiere à la ſeconde, à la premiere, & à la difference de la premiere à la derniere, & cette quatriéme proportionnelle ſera la ſomme de toutes les lignes, excepté la derniere; c'eſt pourquoi ajoûtant la derniere à cette ſomme, vous aurez la ſomme entiere de la progreſſion.

DEMONSTRATION.

De l'extrêmité D de la ſeconde ligne CD, tirez CM parallele à AC, & MA étant égal à DC, BM ſera la difference de la premiere ligne AB à la ſeconde CD. De même de l'extrê-

mité I de la derniere ligne IH, tirez IN parallele à OA, & NA étant égale à IH, la droite BN sera la difference de la premiere à la derniere. Or à cause des paralleles DM, IN, les triangles BMD, BNI, sont semblables; donc BM. MD :: BN. NI. Mais MD est égal à AC, & par conséquent à AB par le Probleme précedent; donc BM. AB :: BN. NI; donc la difference de la premiere à la seconde, est à la premiere comme la difference de la premiere à la derniere est à NI. Or NI est égal à AC+CR +RT+TX+XH, & ces lignes sont égales par la construction à AB+CD+RS+TV+XZ, c'est-à-dire à toutes les lignes, excepté la derniere; donc la difference de la premiere à la seconde, est à la premiere, comme la difference de la premiere à la derniere est à toutes les lignes, excepté la derniere; si donc on ajoûte à NI la derniere IH, on aura la somme entiere de la progression.

## COROLLAIRE.

310. Si la progression étoit continuée à l'infini, & qu'on en demandât la somme, le dernier terme seroit en ce cas infiniment petit, & infiniment proche du sommet O du triangle BAO, de sorte que la difference du premier terme au dernier, seroit encore le premier terme, parce que retrancher d'une grandeur AB une grandeur O infiniment petite, c'est ne retrancher rien. Ainsi on auroit BM. MD. ou BA :: BA. AO, c'est-à-dire que le premier terme seroit alors moyen proportionnel entre la difference du premier au second, & la somme des termes.

## PROBLEME LXII.

311. *Les deux premieres lignes AB, CD d'une progression ascendante de lignes étant données* (Fig. 158.), *continuer cette progression tant qu'on voudra.*

Faites un angle RAB de telle ouverture que vous voudrez, & dont les jambes RA, AB, soient chacune égale à la premiere ligne donnée AB; prolongez RA de part & d'autre, & portez de A en C la seconde ligne CD, à l'extrêmité de laquelle vous tirerez une ligne parallele à AB, & égale à CD, tirez par les extrêmitez B, D, des lignes AB, CD, la droite indéfinie ON, laquelle coupera en O la ligne RA prolongée indéfiniment. Cela fait, tirez les lignes RB, AD, & par l'extrêmité C de la ligne CD, tirez CF parallele à RB ou AD, & par le point F,

la ligne FE parallele à AB ou à CD ; la ligne EF sera le troisiéme terme de la progression ; tirez de même par le point E la ligne EH parallele à CF ou à AD, & par le point H la ligne HG, parallele à EF ou à CD, & vous aurez HG pour le quatriéme terme de la progression. Operez toujours de la même maniere, & vous trouverez les autres termes IL, MN, &c. ce que vous pourrez continuer à l'infini.

DEMONSTRATION.

Les triangles RAB, ACD, sont isosceles par la construction ; & les angles A, C, compris sous leurs côtez proportionnels, sont égaux, à cause des paralleles AB, CD, donc les deux triangles sont semblables (*n.* 295.) ; mais par la même construction CEF, EGH, GIL, &c. ont leurs côtez paralleles aux côtez des deux premiers chacun à chacun ; donc tous ces triangles sont semblables. Or dans le premier triangle la base RA est égale au côté AB, de même que dans le second, CA est égal à CD ; donc dans le troisiéme EG, est égal à GH, & ainsi des autres. Cela posé, les triangles OAB, OCD, OEF, &c. étant semblables, à cause de l'angle O commun, & des paralleles AB, CD, EF, &c. on a OC. CD :: OE. EF, & *dividendo*, OC—CD. CD :: OE—EF. EF. Mais CD=AC & EF=CE ; donc OC—AC. CD :: OE—CE. EF, ou OA. CD :: OC. EF. & *permutando*, OA, OC :: CD. EF. Or à cause des triangles semblables OAB, OCD, on a aussi OA. OC :: AB. CD. ; donc AB. CD :: CD. EF. Ainsi la ligne EF est le troisiéme terme de la progression, & l'on prouvera, de même que les autres termes, sont les lignes GH, IL, &c.

## PROBLEME LXIII.

312. *Une progression ascendante Géometrique de lignes étant donnée* (Fig. 158.), *en trouver la somme, c'est-à-dire, trouver une ligne qui soit égale à tous les termes pris ensemble.*

Prenez la difference du dernier terme au pénultieme, & la difference du dernier au premier, puis cherchez une quatriéme proportionnelle à la difference du dernier au pénultieme, au dernier terme, & à la difference du dernier au premier. Cette proportionnelle sera la somme de tous les termes, excepté le premier : ainsi en y ajoûtant le premier, on aura la somme entiere des termes.

DEMONS.

DEMONSTRATION.

De l'extrêmité L de la pénultiéme ligne, tirez LZ parallele à OM, & la droite NZ sera la difference de la derniere à la pénultieme : de même de l'extrêmité B de la premiere AB, tirez BX parallele à OM, la droite NX sera la difference de la derniere à la premiere ; mais à cause des triangles semblables NZL, NXB, on a NZ. ZL :: NX. XB. & par le Probleme précedent LZ = IM = NM, & BX = AM = AC + CE + EG + GI + IM = CD + EF + GH + IL + MN. Donc NZ. NM :: NX. CD + EF + GH + IL + NM. & par conséquent la difference du dernier au pénultieme, est au dernier terme, comme la difference du dernier au premier, est à la somme des termes moins le premier. Ajoûtant donc le premier terme à cette somme, on aura la somme totale.

## PROBLEME LXIX.

313. *Une ligne indéterminée NZ étant coupée en deux points K, A, (Fig. 159.) la couper en un autre point E, en sorte que NK. AE :: AE. NE. c'est-à-dire, que la partie AE soit moyenne proportionnelle entre la partie NK, & toute la ligne NE.*

Ce Probleme a deux cas differens ; dans le premier cas, le point K est entre l'extrêmité N & le point A, & dans le second (*Fig.* 160.), le point A est entre N & K. Nous allons résoudre le premier, & l'on comprendra aisément par sa résolution, ce que l'on doit faire pour résoudre le second.

Faites NH moyenne proportionnelle entre NA & NK, & à son extrêmité H, élevez la perpendiculaire HO, que vous ferez égale à la moitié de NK. Du centre O décrivez le cercle MPH, & du point N par le centre O, tirez la droite NP. Faites AE égal à NP, & vous aurez :: NK. AE. NE, ainsi qu'il est demandé.

DEMONSTRATION.

Par la construction $\overline{NH}^2 = NA \times NK$. & comme NH est tangente du cercle MP, & NP secante, on a aussi $\overline{NH}^2 = NP \times NM$. (*n.* 282.) ; donc $NA \times NK = NP \times NM$.

D'autre part NK étant égal à MP, & AE égal à NP par la construction, on a $NK \times AE = NP \times MP$. Si donc on ajoûte

ces deux rectangles aux deux précedens chacun à chacun, on aura $NA \times NK + NK \times AE = NP \times NM + NP \times MP$. Or $NA \times NK + NK \times AE = NE \times NK$ (*n.* 235.), & $NP \times NM + NP \times MP = \overline{NP}^2$; donc $NE \times NK = \overline{NP}^2$. mais $\overline{NP}^2 = \overline{AE}^2$ par la construction; donc $NE \times NK = \overline{AE}^2$; & par conséquent AE est moyenne proportionnelle entre NE & NK.

Pour le second cas (*Fig.* 160.), il faut prendre de même la moyenne proportionnelle NH entre NA & NK, ensuite élever la perpendiculaire HO, qu'on fera égale à la moitié de NK, puis décrivant un cercle du centre O, & tirant NP, on fera AE égal à NP, & AE sera moyenne proportionnelle entre NK & NE, ce qu'on démontrera comme ci-dessus: d'où l'on voit que dans l'un & dans l'autre cas, il faut prendre pour le rayon OH, la moitié de la ligne NK, qui est le premier terme de la proportion.

## PROBLEME LXX.

314. *Construire une Echelle qui contienne une certaine espece de mesures avec ses divisions & ses soudivisions, comme par exemple de toises, pieds, pouces & lignes.* (Fig. 161.)

Quand on dessine sur le papier une certaine étenduë de terrein dans toutes ses proportions, cela s'appelle *faire le plan* de ce terrein, ou en lever le plan. Or comme le papier est toujours beaucoup plus petit que l'étenduë qu'on veut dessiner, il faut aussi qu'on se serve d'une mesure qui soit à proportion plus petite que celle dont on s'est servi pour mesurer, & c'est ce qu'on fait par le moyen d'une *échelle*, ou d'une ligne qu'on divise, & soudivise proportionnellement aux divisions, & soudivisions de la mesure dont on s'est servi, ce qui s'appelle *réduire au petit pied.*

Supposons donc que la ligne AB, doive représenter quatre toises, je la divise d'abord en quatre parties égales, que je marque par les chiffres Romains I. II. III. IV. ensuite pour marquer les pieds, je divise la quatriéme de ces parties en six parties égales, parce que la toise contient six pieds, & je marque ces divisions par les chiffres ordinaires 1. 2. 3. 4. 5. 6. Maintenant comme chacun de ces pieds se trouve trop petit pour être divisé en douze parties égales, qui doivent représenter des pouces, j'éleve à l'extrêmité B, une perpendiculaire indéterminée,

sur laquelle je porte douze parties égales d'une grandeur à discrétion, de B en R, & achevant le rectangle BRCA, je tire par les divisions de BR des paralleles à AB, & par les divisions de la ligne AB des paralleles à BR, ce qui me donne sur la quatriéme toise six petits rectangles égaux, dans le premier desquels je tire la diagonale IIIP; cette diagonale forme avec la ligne IIIO, un triangle IIIOP, qui se trouve coupé par douze lignes paralleles ou bases, dont la premiere du côté du sommet III, est la douziéme partie de la derniere OP, parce que la partie que cette petite base coupe IIIo, est la douziéme partie de la ligne IIIO; d'où il suit que cette petite base vaut un pouce; que celle qui vient après en vaut deux, l'autre trois, & ainsi des autres, ce que je marque par des chiffres ordinaires le long des divisions de la ligne IIIO. Enfin si je veux avoir des lignes, je porte la grandeur d'un pouce sur CR, prolongée de R en S, je tire la ligne SB, & je prolonge jusqu'à cette ligne les paralleles à la ligne AC, ce qui me donne un autre triangle RBS, coupé par douze bases, dont la premiere du côté du sommet B, est la douziéme partie de la base RS, & vaut par conséquent une ligne; ainsi la seconde en vaut deux, l'autre trois, &c.

Cette échelle étant achevée, si je veux prendre, par exemple, 2 toises 3 pieds 4 pouces, je porte la pointe du compas sur l'extrêmité I de la premiere toise AI, & j'ouvre le compas jusqu'à ce que l'autre pointe tombe sur le nombre trois marqué sur la quatriéme toise, ainsi j'ai 2 toises 3 pieds; ensuite pour avoir les quatre pouces qu'il faut encore, je porte le compas ainsi ouvert, de sorte que l'une de ses pointes tombe sur le nombre 4 marqué aux divisions de la ligne IIIO, & que l'autre tombe sur quelque endroit H de la ligne 4H, & fixant la pointe en H, j'ouvre le compas jusqu'à ce que l'autre pointe tombe en X, & j'ai la grandeur HX, qui vaut 2 toises 3 pieds 4 pouces, & on feroit la même chose, si on vouloit outre cela des lignes, ce qui est trop clair pour m'y arrêter plus long-tems.

## DEFINITION LIX.

315. Lorsqu'un angle ABC (*Fig.* 162.), est fermé par deux bases AE, CD, qui forment des angles égaux, mais sur les côtez opposez, c'est-à-dire l'angle A, fait sur le côté AB, égal à l'angle C, fait sur CB, & l'angle BDC, fait sur le côté AB, égal à l'angle BEA, fait sur le côté BC, les deux bases s'appel-

pellent *antiparalleles*, parce qu'elles sont le contraire des bases paralleles, qui forment des angles égaux du même côté; au reste ce que nous disons d'un angle fermé par deux bases, doit s'entendre aussi des triangles qui se trouvent coupés de la même facon.

## REMARQUE.

316. Les bases *antiparalleles* peuvent avoir trois sortes de positions differentes.

Dans la premiere position (*Fig.* 162.), les bases s'entrecoupent, & alors il arrive en premier lieu qun le côté BA, & sa partie BD coupée vers le sommet par la base DC, sont réciproques au côté BC, & à sa partie BE, coupée vers le sommet par la base AE; car les deux triangles BAE, BCD sont semblables, ayant l'angle B commun, & les deux autres angles égaux chacun à chacun par la supposition. Ainsi AB. BC :: BE. BD; donc les deux lignes AB, BD, étant les deux extrêmes d'une proportion, sont réciproques aux deux BC, BE, qui en sont les moyens (*n.* 252.). En second lieu, les bases AE, DC, se coupent mutuellement au point O en deux parties réciproques entr'elles; car les triangles ADO, CEO, sont semblables, ayant l'angle A égal à l'angle C par la supposition, l'angle AOD, égal à l'angle COE, qui lui est opposé au sommet, & par conséquent le troisiéme ADC égal au troisiéme CEO; donc AO. OC :: DO. OE; or les deux extrêmes AO. OE, sont les parties de la base AE, & les deux moyennes OC, DO, sont les parties de la base CD: donc les deux bases se coupent en parties réciproques.

Dans la seconde position (*Fig* 163.), les deux bases AC, DE, ne se coupent point, & alors à cause des triangles semblables ABC, EBD, on a AB. BC :: BE. BD, c'est-à-dire le côté AB, & sa partie DB du côté du sommet, sont réciproques au côté BC, & à sa partie BE du sommet.

Enfin dans la troisiéme position (*Fig.* 164.), les deux bases AC, AD, se touchent à leurs extrêmitez, & alors les triangles semblables ABC, DBA, donnent :: BC. BA. BD, c'est-à-dire, que le côté AB; est moyen proportionnel entre le côté BC, & sa partie BD, du côté du sommet.

## PROBLEME LXXI.

317. *Deux lignes AB, BC* (Fig. 165.), *étant données, trouver deux autres lignes qui leur soient réciproques.*

Mettez la petite ligne BC sur la grande AB, puis autour de AB prise pour diametre, décrivez le cercle AFBE, & par le point C tirez la ligne RD, perpendiculaire à AB; cela fait, toute ligne BD, qui coupera l'arc AEI, & se terminera sur l'indéfinie RD, résoudra le Probleme de même que toute ligne BF, qui coupera l'indéfinie RD, & qui ira aboutir ensuite à la circonference du cercle; c'est-à-dire, AB. BD :: BE. BC. & AB. BF :: BG. BC.

### DEMONSTRATION.

Tirez de l'extrêmité A de la ligne AB, la ligne AE au point E, où BD coupe la circonference du cercle, vous aurez deux triangles semblables ABE. BDC, parce qu'ils ont l'angle B commun, & l'angle BEA, égal à l'angle BCD, à cause que l'angle, BCD est droit par la construction, & l'angle BEA l'est aussi ayant son sommet à la circonference, & s'appuyant sur le diametre; d'où il suit que le troisiéme angle BAE, est égal au troisiéme BDC; donc AB. BD :: BE. BC, & par conséquent les deux lignes BD, BE, sont réciproques aux deux lignes données AB. BC.

De même de l'extrêmité A, tirez la ligne AF à l'extrêmité de la ligne BF, l'angle AFB est droit, parce qu'il a son sommet à la circonference, & qu'il s'appuye sur le diamêtre, & l'angle BCG est aussi droit par la construction; ainsi les triangles rectangles ABF, BCG, ayant l'angle aigu B commun, sont semblables entr'eux; donc AB. BF :: BG. BC, & par conséquent les deux lignes BF, BG, sont réciproques aux deux AB, BC.

### *Autrement.*

Mettez la petite ligne donnée BC (*Fig.* 166.), sur la grande donnée AB, puis prenant AC pour diametre, décrivez le cercle ACD, & du point B, tirez une secante BD, & vous aurez AB. BD :: BE. BC, c'est-à-dire, la secante BD, & sa partie exterieure BE, réciproques aux deux AB. BC.

DEMONSTRATION.

De l'extrêmité A de la ligne AB, tirez la ligne AD à l'extrêmité de la ſecante, & du point C tirez CE à l'extrêmité E de la partie exterieure de la même ſecante. Les deux triangles ABD, EBC, ſont ſemblables; car l'angle B eſt commun, & l'angle BAD ayant ſon ſommet à la circonference, vaut la moitié de l'arc CED, & l'angle BEC, formé par la corde CE, & par le prolongement ED de la corde DE, vaut la moitié de l'arc CE, plus la moitié de l'arc ED(*n.* 139.), c'eſt-à-dire, la moitié du même arc CED; d'où il ſuit que ces deux angles ſont égaux, & que par conſéquent le troiſiéme angle BDA, eſt égal au troiſiéme BCE; donc BA. BD :: BE. BC. Ainſi la ſecante BD, & ſa partie exterieure BE, ſont réciproques aux deux lignes données BA. BC.

COROLLAIRE I.

318. En ſuivant l'une ou l'autre de ces deux manieres, on peut trouver une infinité de réſolutions differentes de ce Probleme; car l'arc BI (*Fig.* 165.), étant compoſé d'une infinité de points, de même que la droite CR, il eſt évident qu'on peut tirer du point B une infinité de lignes qui coupent l'arc BI, & qui aillent aboutir à l'indéterminée RD, ou qui coupent la ligne RC, & qui aillent aboutir à la circonference. Il n'eſt pas moins viſible que du point B (*Fig.* 166.), on peut tirer au cercle une infinité de ſecantes, qui réſoudront le Probleme de la même façon, ſans compter qu'il n'eſt pas néceſſaire que la ligne AB paſſe par le centre du cercle, & qu'il ſuffit que ſa partie AC ſoit une corde d'un cercle quelconque, grand ou petit.

COROLLAIRE II.

319. Si d'un point B exterieur on tire au cercle deux ſecantes BA, BD, ſoit que l'une paſſe par le centre, ſoit qu'elle n'y paſſe pas, la ſecante BA, & ſa partie exterieure BC, ſont réciproques à la ſecante BD, & à ſa partie exterieure BE, ce qu'on démontrera de même que ci-deſſus.

PROBLEME LXXII.

320. *Couper deux lignes données AB, CD, chacune en deux parties réciproques entr'elles* (Fig. 167.

Décrivez autour de la plus grande ligne CD, priſe pour dia-

metre, un cercle ACBD, puis prenant la grandeur de la petite AB, transportez-la sur le cercle, en sorte qu'elle lui serve de corde, & qu'elle coupe CD en un point E, vous aurez AE. CE :: ED. EB, c'est-à-dire les deux parties AE, EB de la ligne AB réciproques aux deux parties CE, ED de la ligne ED.

### DEMONSTRATION.

Tirez les lignes AC, BD, vous aurez deux triangles semblables AEC, DEB; car l'angle AEC est égal à l'angle BED, qui lui est opposé au sommet, l'angle EAC est égal à l'angle EDB, l'un & l'autre ayant le sommet à la circonference, & embrassant le même arc CB, & par conséquent le troisiéme angle ACE, est égal au troisiéme DBE; donc AE. CE :: ED. EB.

### COROLLAIRE I.

321. *Deux cordes CD, AB, qui se coupent dans un même cercle, se coupent en parties reciproques;* ce qu'on démontrera de même que ci-dessus.

### COROLLAIRE II.

322. Il n'est pas nécessaire que la plus grande ligne CD des deux données AB, CD, soit le diametre d'un cercle; mais il suffit qu'elle en soit une corde, pour que l'autre AB, puisse aussi en devenir une corde qui coupe la ligne CD; car alors par le Corollaire précedent, les deux lignes se couperont toujours en parties réciproques; d'où il suit que ce Probleme peut avoir une infinité de résolutions, puisque la même ligne CD peut devenir corde d'une infinité de cercles differens, ce qu'on fera aisément en élevant sur le milieu de la ligne CD une perpendiculaire indéfinie OZ, sur laquelle on prendra différens points R, T, V, &c. car si de ces points pris pour centres, & des intervalles RC, TC, VC, &c. on décrit des cercles, la ligne CD sera corde de chacun d'eux.

## SECTION XI.

### *De la maniere d'inscrire & de circonscrire les Figures autour d'un Cercle.*

### DEFINITION LX.

323. Une figure est dite *inscrite au cercle*, lorsque tous les som-

mets de ſes angles ſont à la circonference, & on l'appelle *circonſcrite*, lorſque tous ſes côtez ſont tangentes du cercle.

## PROBLEME LXXIII.

324. *Un triangle ABC étant donné* (Fig. 168.), *trouver le cercle dans lequel il peut être inſcrit, ou circonſcrire un cercle autour de ce triangle.*

Diviſez chaque côté du triangle en deux parties égales aux points E, I, F, d'où vous éleverez des perpendiculaires qui ſe couperont au point O, & de ce point O pris pour centre, & de l'intervalle OA, decrivez le cercle ABC, qui paſſera par les autres ſommets B, C; & par conſéquent le triangle ſera inſcrit au cercle ABC.

### DEMONSTRATION.

Les trois ſommets A, B, C, du triangle ABC, ne ſont point en ligne droite (*n.* 179.); donc on peut par ces trois ſommets faire paſſer une circonference (*n.* 88.), & cette circonference ne peut être differente de la circonference ABC, que nous venons de décrire; car autrement deux circonferences differentes, ſe couperoient en trois points, ABC; ce qui eſt impoſſible (*n.* 110.).

### COROLLAIRE I.

325. *Si un triangle équilateral ABC* (Fig. 169.), *eſt inſcrit dans un cercle, les perpendiculaires élevées ſur le milieu de chaque côté, diviſent les angles oppoſés en deux angles égaux, & le triangle en ſix autres triangles égaux & équiangles.* Premierement la perpendiculaire FB ayant tous ſes points également éloignés des extrêmitez A, C, du côté AC paſſe néceſſairement par le ſommet B, qui eſt auſſi également éloigné des points A, C, puiſque les lignes AB, BC, ſont égales par la ſuppoſition; ainſi les deux triangles ABF, FBC, ayant le côté BF commun, le côté AB, égal au côté BC, & le côté AF, égal au côté FC, ſont égaux & équiangles, & l'angle ABF eſt égal à l'angle FBC. On prouvera la même choſe des autres perpendiculaires. 2°. Les ſix triangles que ces trois perpendiculaires forment, ſont égaux & équiangles entr'eux; car en les comparant les uns & les autres, on trouvera aiſément qu'ils ont les côtez égaux chacun à chacun, à ſçavoir dans les deux triangles FOC, IOC, le côté OC commun, le côté FC, égal

égal au côté CI, puisqu'ils sont tous deux moitiez des côtez égaux AC, CB, & enfin le côté OF, égal au côté OI, parce qu'ils mesurent la distance des cordes égales AB, CB au centre O, & on prouvera la même chose des autres triangles.

## COROLLAIRE II.

326. *Si de l'un des angles B d'un triangle équilateral ABC, inscrit à un cercle* (Fig. 170.), *on tire un diametre BE, la partie DE de ce diametre qui se trouve hors du triangle, est le quart du diametre.* Tirez la ligne EC, vous aurez le triangle ECB, qui sera rectangle, l'angle ECB ayant son sommet à la circonference, & s'appuyant sur le demi-cercle; d'autre part le diametre BE ayant deux de ses points, B, O, également éloignés des extrêmitez A, C du côté AC, coupe ce côté perpendiculairement, & en deux parties égales; donc DC est perpendiculaire sur l'hypotenuse BE, du triangle BEC, & comme cette perpendiculaire passe par le sommet C de l'angle droit, il s'ensuit que le triangle BEC est divisé en deux triangles BDC, EDC semblables entr'eux, & au triangle total BEC (*n.* 273.). Comparant donc ensemble les triangles BDC, CDE, on a DC. CB :: DE. EC; mais DC est la moitié de CA ou de CB; donc DE est la moitié de EC: de même comparant ensemble les deux triangles BEC, CED, on a DE. EC :: EC. EB; mais DE, comme on vient de voir, est la moitié de EC; donc EC est la moitié du diametre EB, & par conséquent DE est le quart.

## COROLLAIRE III.

327. Il suit du Corollaire précedent, que *la partie OD du diametre comprise entre le centre O, & le côté du triangle équilateral, est aussi le quart du diametre*, puisque OE en étant la moitié, & ED étant la moitié de OE, la ligne OD doit être nécessairement l'autre moitié de OE, & de-là il suit encore que OD est la moitié de BO, & par conséquent le tiers de DB; c'est-à-dire, que dans un triangle équilateral inscrit au cercle, la distance OD du centre à l'un des côtez, est le tiers de la perpendiculaire BD, tirée du sommet opposé sur le même côté.

## COROLLAIRE IV.

328. *Dans un triangle équilateral, le quarré de la perpendiculaire BD, tirée d'un angle B au côté opposé AC, est égal aux trois quarts du*

*quarré du côté BC.* Le triangle BDC étant rectangle, & l'hypotenuse BC étant double du côté DC, le quarré de l'hypotenuse vaut par conséquent quatre quarrez du côté DC (*n.* 290.); or le quarré de la même hypotenuse vaut le quarré de DC, plus le quarré de DB; donc le quarré de DB vaut trois quarrez de DC, & par conséquent il est les trois quarts du quarré de l'hypotenuse.

## COROLLAIRE V.

329. *Dans un triangle équilateral inscrit à un cercle, le côté BC est incommensurable au diametre BE.* Dans le triangle rectangle BEC, le côté EC est la moitié du diametre BE (*n* 326.); donc le quarré de BE est quadruple du quarré de EC: or le même quarré de BE est égal au quarré de CE, plus le quarré de BC; donc le quarré de BC vaut trois quarrez de CE, & par conséquent il est les trois quarts du quarré de BE, c'est-à-dire que le quarré de BC est à celui de BE comme 3 est à 4; ainsi BC. BE, sont entr'eux comme les racines quarrées de 3 & 4; mais 3 n'est pas un quaraé dont on puisse exprimer la racine en nombres; donc la raison de BC à BE, est sourde, & ces deux lignes sont incommensurables; d'où l'on voit qu'il y a des lignes incommensurables entr'elles, & commensurables en puissance, puisque les quarrez de BC, BE, sont commensurables, étant entr'eux comme 3 & 4.

## PROBLEME LXXIV.

330. *Dans un cercle donné ABCE* (Fig. 170.), *inscrire un triangle équilateral.*

Tirez le diametre BE, & divisant le rayon OE en deux parties égales OD, DE, tirez par le point D la corde AC perpendiculaire au diametre; puis des extrêmitez A, C de cette corde, tirez les droites AB, BC à l'extrêmité B du diametre, ce qui vous donnera le triangle équilateral ABC inscrit au cercle.

### DEMONSTRATION.

Dans tout triangle équilateral inscrit à un cercle, la partie DC du diametre qui se trouve hors du triangle, est le quart du diametre (*n.* 326.), & la partie OD, c'est-à-dire la distance du centre à l'un des côtez, est le tiers de la perpendiculaire BD, tirée de l'un des angles sur le côté opposé (*n.* 327.). Or ces deux

choſes ſe trouvent ici par la conſtruction; donc le triangle ABC, eſt équilateral & inſcrit au cercle.

## PROBLEME LXXV.

331. *Un cercle FEI* (Fig. 169.), *étant donné, trouver le triangle équilateral dans lequel il peut être inſcrit, ou circonſcrire un triangle équilateral autour d'un cercle donné.*

Tirez un diametre FX, & prolongez-le de X en B, en ſorte que XB ſoit égal au rayon XO, du centre O & de l'intervalle OB, décrivez le cercle ABC, puis du point F, tirez la corde AB perpendiculaire au diametre, & des extrêmitez A, C, tirez les droites AB, CB, ce qui vous donnera le triangle équilateral ABC, dans lequel le cercle donné ſera inſcrit.

### DEMONSTRATION.

Par la conſtruction le diametre BS du cercle ABC, eſt double du diametre XF du cercle FEI; donc la partie FS du diametre BS, laquelle eſt hors du triangle ABC, eſt le quart de ce diametre, & la partie OF eſt le tiers de BF, donc le triangle ABC, eſt équilateral (*n.* 326, 327.), & par conſéquent les trois cordes AB, BC, AC du cercle ABC, étant égales, ſont également éloignées du centre O (*n.* 97.); or par la conſtruction la perpendiculaire OF, qui eſt la diſtance de la corde AC, eſt égale au rayon du cercle EFI; donc les deux autres diſtances OE, OI des deux autres cordes, ſont auſſi égales chacune au rayon du même cercle, & par conſéquent les trois cordes ou côtez AB, BC, AC du triangle, touchent le cercle aux trois points E, F, I, & le cercle eſt inſcrit au triangle, comme on le demandoit.

### COROLLAIRE I.

332. *Si l'on joint par des lignes droites les trois points E, F, I, où le cercle touche le triangle équilateral dans lequel il eſt circonſcrit, on aura un autre triangle équilateral EFI, qui ſera inſcrit dans le cercle.* Le triangle EBI, eſt égal & équiangle au triangle AEF, parce que l'angle EBI eſt égal à l'angle EAF, & que les côtez EB, EI, qui comprennent l'angle EBI, ſont égaux aux côtez EA, AF, ſous leſquels l'angle EAF eſt compris; ainſi le troiſiéme côté EI, eſt égal au troiſiéme côté EF; on prouvera de même que le côté FI du triangle FCI, eſt égal au côté EI du triangle EBI; d'où il

suit que les trois lignes EI, EF, FI, sont égales, & le triangle EFI équilateral.

### COROLLAIRE. II.

333. *Le côté d'un triangle équilateral ABC circonscrit au cercle, est double du côté du triangle équilateral inscrit dans le même cercle.* Les triangles équilateraux étant des polygones semblables, sont entr'eux comme leurs rayons; mais le rayon OB du triangle ABC, est double du rayon OF du triangle EFI; donc le côté AB est double du côté EF.

## PROBLEME LXXVI.

334. *Inscrire un cercle dans un triangle ABC* (Fig. 171.).

Divisez les angles A, B, C, chacun en deux parties égales par les lignes AO, BO, CO, & du point O, où elles se rencontrent, tirez des perpendiculaires OI, OF, OG, sur les côtez du triangle, puis du centre O, & du rayon OG, décrivez le cercle IFG, lequel passera par les extrêmitez F, I, des deux autres perpendiculaires, & sera inscrit au triangle ABC.

### DEMONSTRATION.

Les deux triangles CGO, CFO, ont le côté OC commun, l'angle droit OFC égal à l'angle droit OGC, & l'angle GCO égal à l'angle FCO par la construction; donc ces deux triangles sont égaux & équiangles, & par conséquent la perpendiculaire OF est égale à la perpendiculaire OG; on prouvera de même en comparant le triangle AOG au triangle AOI, que la perpendiculaire OI est égale à la perpendiculaire OG; donc les trois perpendiculaires OI, OF, OG, étant égales, le cercle IFG, qui a pour rayon la perpendiculaire OG, passe par l'extrêmité des deux autres, & ce cercle est inscrit au triangle ABC, puisque les côtez de ce triangle étant perpendiculaires aux rayons OI, OG, OF, sont tangentes du cercle.

### COROLLAIRE.

335. Quand le triangle est équilateral (*Fig.* 169.), il est visible que les lignes AI, BF, CE, qui divisent les angles A, B, C, en deux parties égales, sont perpendiculaires aux côtez opposés; d'où il suit que ces lignes étant tirées, il n'y a qu'à prendre pour centre le point O où elles se coupent, & pour rayon la partie OE

de l'une d'entre-elles compriſe entre le point O & le côté oppoſé, & le cercle qu'on décrira, ſera le cercle inſcrit au triangle.

## PROBLEME LXXVII.

336. *Inſcrire dans un cercle ABC* (Fig. 172.), *un triangle équiangle à un triangle donné* abc.

Tirez une tangente DE au cercle, & du point d'attouchement C, tirez deux cordes CA, CB, dont l'une faſſe avec la tangente l'angle ACD égal à l'angle *b*, & l'autre faſſe l'angle BCE égal à l'angle *a*. Tirez la droite AB, & le triangle ABC inſcrit au cercle, ſera équiangle à l'angle *abc*.

### DÉMONSTRATION.

L'angle CAB dans le grand ſegment CAB, eſt égal à l'angle ECB du petit ſegment CXE; or l'angle ECB a été fait égal à l'angle *a*; donc l'angle CAB eſt auſſi égal à l'angle *a*, de même l'angle ABC dans le grand ſegment ABC, eſt egal à l'angle ACD du petit ſegment AZD; or l'angle ACD eſt égal à l'angle *b* par la conſtruction; donc l'angle ABC eſt égal à l'angle *b*. Puis donc que les deux triangles ABC, *abc*, ont deux angles A, B, égaux à deux angles *a b*, chacun à chacun, il s'enſuit que le troiſiéme angle C, eſt égal au troiſiéme *c*, & que par conſéquent les deux triangles ſont équiangles.

## PROBLEME LXXVIII.

337. *Autour d'un cercle EHI, circonſcrire un triangle équiangle à un triangle donné* acb (Fig. 173.).

Prolongez la baſe *ab* du triangle donné de part & d'autre en *d* & en *r*, enſuite du centre O du cercle, tirez un rayon OI ſur lequel vous ferez d'un côté l'angle HOI égal à l'angle exterieur *bcr*, & de l'autre l'angle EOI égal à l'angle exterieur *bad*; enfin aux points E, H, I, où les jambes de ces angles coupent le cercle, tirez des tangentes indéfinies, leſquelles venant à s'entrecouper, formeront le triangle ABC équiangle au triangle *abc*.

### DEMONSTRATION.

Les quatre angles du quadrilatere IOHC, valent enſemble quatre angles droits; or les deux angles OIC, OHC, valent deux droits, puiſque l'un & l'autre ſont formés par un rayon & une tangente; donc les deux autres angles IOH, ICH, pris en-

ſemble, valent deux droits: mais dans le triangle *abc*, l'angle *bca* & l'angle exterieur *bcr* valent auſſi deux droits, & l'angle *bcr* eſt égal à l'angle IOH; donc l'angle *bca* eſt égal à l'angle ICH. De même dans le quadrilatere AEOI, les deux angles AEO, AIO étant droits, les deux autres EOI, EAI pris enſemble, valent deux droits; mais dans le triangle *abc* l'angle *bac* & l'exterieur *bad*, valent auſſi deux deux droits, & l'angle *bad* eſt égal à l'angle EOI; donc l'angle EAI eſt égal à l'angle *bac*. Puis donc que les deux triangles ABC, *abc*, ont deux angles A, C, égaux aux deux angles *a*, *c*, chacun à chacun, il s'enſuit que le troiſiéme angle B, eſt égal au troiſiéme *b*, &, & que les deux triangles ſont équiangles.

## PROBLEME LXXIX.

338. *Inſcrire un quarré dans un cercle donné ABCD* (Fig. 174.). Tirez deux diametres AC, BD perpendiculaires l'un ſur l'autre, & joignez leurs extrêmitez par les droites AB, BC, CD, DA, qui formeront le quarré demandé.

### DEMONSTRATION.

Par la nature du cercle les deux diametres AC, BD, ſe coupent mutuellement en deux parties égales, & comme AC eſt perpendiculaire ſur BD, il s'enſuit que ſes extrêmitez A, C, ſont également éloignées des extrêmitez B, D, du diametre BD, & que les quatre lignes AB, BC, CD, DA, ſont égales; mais les angles ABC, BCD, CDA, DAB, faits par ces quatre lignes ſont droits, puiſqu'ils ont leurs ſommers à la circonference, & qu'ils s'appuyent ſur le diametre; donc la figure ABCD, inſcrite au cercle, a ſes quatre côtez égaux & ſes quatre angles droits, & par conſéquent cette figure eſt un quarré.

### COROLLAIRE I.

339. *Le côté AB d'un quarré inſcrit dans un cercle, eſt incommenſurable au diametre AC.* Le triangle ABC étant rectangle, le quarré de l'hypotenuſe AC, vaut le quarré de AB, plus le quarré de BC, c'eſt-à-dire deux quarrez de AB; ainſi le quarré de AC, eſt au quarré de AB, comme 2 eſt à 1, & les lignes AC, AB, ſont entr'elles comme la racine quarrée de 2 eſt à la racine de 1. Mais la racine de 2 ne peut s'exprimer par aucun nombre; donc le rap-

port de AC à AB est sourd, & ces deux lignes sont incommensurables entr'elles.

### COROLLAIRE II.

340. *Dans tout quarré ABCD, la diagonale AC, & le côté AB, sont incommensurables entr'eux, & commensurables en seconde puissance.* Ce qui est clair par le Corollaire précedent, où l'on a vû que le quarré de AC est double du quarré de AB.

### PROBLEME LXXX.

341. *Autour d'un cercle ABCD* ( Fig. 174. ) *circonscrire un quarré.*

Tirez deux diametres AC, BD, perpendiculaires entr'eux, & à leur extrêmitez A, B, C, D, élevez des perpendiculaires indéfinies, lesquelles venant à s'entrecouper, formeront le quarré requis RSPQ.

### DEMONSTRATION.

Les trois lignes RS, BD, PQ, étant perpendiculaires au diametre AC par la construction, sont paralleles entr'elles, & comme elles sont compriſes entre les lignes PR, QS, qui sont aussi paralleles entr'elles, parce qu'elles sont perpendiculaires au diametre BD, il s'ensuit que ces trois lignes sont égales; par la même raison les trois PR, AC, QS, sont égales entr'elles, & aux trois premieres, le diametre BD, qui est l'une des trois premieres étant égal au diametre AC, qui est l'une des trois autres; ainsi la figure circonscrite PRSQ, a quatre côtez égaux, & de plus ses quatre angles droits, attendu que les deux côtez RS, PQ, étant perpendiculaires au diametre AC, sont aussi perpendiculaires aux côtez PR, QS, paralleles au même diametre AC. Donc cette figure est un quarré.

### COROLLAIRE I.

342. *Le quarré circonscrit au cercle est double du quarré inscrit au même cercle.* Le côté RP étant égal au diametre AC, son quarré est égal au quarré de AC; mais à cause du triangle rectangle isoscele ABC, le quarré de AC est double du quarré de AB, c'est-à-dire, du quarré inscrit ABCD; donc le quarré de PR, ou le quarré circonscrit PRSQ, est double de l'inscrit ABCD.

### COROLLAIRE II.

343. *Le côté du quarré circonscrit est incommensurable au côté du quarré inscrit.* Le diametre AC est incommensurable au côté AB du quarré inscrit (*n.* 339.) ; mais le côté RP du quarré circonscrit, est égal au diametre AC ; donc il est aussi incommensurable au côté AB du quarré inscrit.

## PROBLEME LXXXI.

344. *Inscrire un cercle dans un quarré donné ABCD* (Fig. 175.). Coupez chaque côté du quarré en deux parties égales, aux points I, E, G, H ; du point I tirez la droite IG au point opposé G, & du point E, la droite EH au point opposé H ; après quoi prenant pour centre le point O où ces deux lignes se coupent, & pour rayon la droite OI, décrivez un cercle dont la circonference passera par les trois autres points E, G, H, & qui par conséquent sera inscrit au quarré donné.

### DEMONSTRATION.

Les lignes AI, BG, étant égales entr'elles, & perpendiculaires au côté AB, la ligne IG, qui passe par leurs extrêmitez, est par conséquent égale & parallele au côté AB, & au côté DC parallele à AB. Par la même raison la ligne EH, est égale & parallele à chacun des côtez AD, BC : or la ligne IG coupant le côté AD en deux parties égales, coupe l'espace parallele AB, DC en deux également ; donc elle coupe aussi la ligne EH en deux parties égales, par la même raison la ligne EH coupe la ligne IG en deux également ; mais ces deux lignes IG, EH, sont égales entr'elles, étant égales au côté du quarré, comme nous venons de voir ; donc leurs moitiés, OI, OG, OE, OH, sont aussi égales, & par conséquent le point O étant également éloigné de leurs extrêmitez I, E, G, H, le cercle qui a pour centre le point O, & pour rayon la ligne OI, passe par les autres points E, G, H, & ce cercle est inscrit au quarré, les côtez de ce quarré étant perpendiculaires aux rayons OI, OG, &c.

## PROBLEME LXXXII.

345. *Circonscrire un cercle autour d'un quarré donné ABCD* (Fig. 175.).

Tirez les deux diagonales AC, DB, qui se couperont en un point

point O, duquel point pris pour centre, & de l'intervalle OA, vous décrirez un cercle qui sera le cercle demandé.

### DEMONSTRATION.

Les deux diagonales AC, BD, sont égales & se coupent mutuellement en deux parties égales; donc les quatre lignes OA, OB, OC, OD, sont égales, & par conséquent le cercle qui a pour centre le point O, & pour rayon la ligne OA, passera nécessairement par les trois autres points B, C, D, & sera circonscrit au quarré.

## PROBLEME LXXXIII.

346. *Inscrire un pentagone regulier dans un cercle donné ABCDE* (Fig. 176.).

Faites un triangle isoscele *ace*, dont chaque angle de la base soit double de l'angle du sommet (*n.* 303.), puis inscrivez dans le cercle ABCDE, un triangle ACE, équiangle au triangle *ace* (*n.* 336.), & divisez les deux angles A, E, de la base en deux parties égales par les lignes AD, EB, enfin des extrêmitez D, B, de ces deux lignes, tirez au sommet C, & aux angles A, E de la base les lignes DC, DE, BC, BA, qui formeront avec la base AE une figure de cinq côtez & de cinq angles égaux, qui par conséquent sera un pentagone inscrit dans le cercle.

### DEMONSTRATION.

Par la construction l'angle DAE est la moitié de l'angle CAE, & l'angle ACE est aussi la moitié du même angle CAE; donc l'angle DAE est égal à l'angle ACE: or ces deux angles ont leurs sommets à la circonference; donc ils valent la moitié des arcs ED, AE, & par conséquent ces arcs sont égaux entr'eux, d'où il suit que les cordes ED, AE, sont égales (*n.* 99.), on prouvera de même que les cordes DC, CB, BA, sont chacune égales à la corde AE: de plus, les angles faits par ces cordes, sont égaux; car l'angle EAB, par exemple, vaut la moitié de l'arc BCDE, sur lequel il s'appuye, & l'angle AED vaut la moitié de l'arc ABCD; or l'arc BCDE, & l'arc ABCD, sont égaux entr'eux, étant composés l'un & l'autre de trois arcs égaux; donc l'angle EAB est égal à l'angle AED: on prouvera la même chose pour les autres angles; donc la figure ABCDE, ayant ses côtez & ses angles égaux, est un pentagone regulier inscrit au cercle.

### COROLLAIRE I.

347. *Les lignes AD, EB, qui coupent les angles A, E en deux parties égales, ſont égales entr'elles, & aux côtez AC, EC du triangle ACE.* L'arc AED que la corde AD ſoutient, eſt égal à l'arc CDE, qui eſt ſoutenu par la corde CE, l'un & l'autre de ces arcs étant compoſés de deux arcs égaux; donc les cordes AD, CE, ſont auſſi égales, & on prouvera de même que la corde AC, eſt égale à la corde BE, & que par conſéquent les quatre cordes AD, BE, AC, CE, ſont égales entr'elles.

### COROLLAIRE II.

348. *Les côtez AC, CE du triangle iſoſcele ACE, ſont coupez en moyenne & extrême raiſon aux points R, S.* Ce triangle ayant chacun de ſes angles double de l'angle du ſommet C, l'angle du ſommet vaut 36 degrez, & chacun des angles ſur la baſe, en vaut 72. Or dans un tel triangle la ligne qui diviſe l'un des angles de la baſe en deux angles égaux, coupe le côté oppoſé en moyenne & extrême raiſon (*n.* 300.); donc AD coupe le côté CE au point S, en moyenne & extrême raiſon. On prouvera de même que AC eſt coupé au point R de la même maniere.

### COROLLAIRE III.

349. *La mediane CS de la ligne CE, eſt égale au côté AE du pentagone.* Ce côté eſt la baſe du triangle iſoſcele ACE, & cette baſe eſt égale à la médiane (*n.* 300.).

### COROLLAIRE IV.

350. *Les lignes AD, EB, ſont coupées en moyenne & extrême raiſon au point O.* Dans le triangle ODE, l'angle DOE fait entre le centre X du cercle & ſa circonference, vaut la moitié de l'arc EC ſur lequel il s'appuye, plus la moitié de l'arc AB, ſur lequel s'appuyeroient ſes jambes prolongées au-delà du ſommet (*n.* 147.), & l'angle DEO ayant ſon ſommet à la circonference, vaut la moitié de l'arc BCD, ſur lequel il s'appuye, ou la moitié des arcs BC, CD; or les deux arcs BC, CD, ſont égauz aux deux ED, AB; donc l'angle DEO eſt égal à l'angle DOE, & comme le troiſiéme angle ne vaut que la moitié de l'arc AE, il s'enſuit qu'il eſt moindre que chacun des deux autres, & que le triangle ODE, eſt iſoſcele; donc ſon côté OD, eſt égal au côté DE, & par con-

séquent à AE, ou à son égal CS (*n.* 349.). Mais la ligne AD est égale à la ligne CS; donc puisque sa partie OD, est égale à la partie CS, il faut nécessairement que son autre partie AO, soit égale à l'autre partie SE, d'où il est aisé de conclure que CE étant divisée en moyenne & extrême raison, AD doit être divisée de la même maniere. On prouvera de même que BE est coupée au point O, en moyenne & extrême raison.

### COROLLAIRE V.

351. Le côté AE d'un pentagone regulier étant donné, si l'on veut décrire ce pentagone (*Fig.* 176.), on coupera ce côté en moyenne & extrême raison au point I, puis ajoûtant à la ligne entiere sa médiane EI de A en T, la ligne entiere ET, sera encore coupée en moyenne & extrême raison au point A, & sa médiane sera la ligne EA. Prenant donc deux lignes égales chacune à ET, on décrira sur le côté AE, un triangle isoscele ACE, dont les angles de la base seront chacun double de l'angle du sommet, puisque la médiane CS du côté, sera égale à la base; enfin divisant les angles de la base chacun en deux angles égaux par les lignes CD, BE, que l'on fera égales chacune au côté CE, on tirera les lignes CD, DE, CB, BA, qui seront égales chacune au côté donné AE, & formeront avec ce côté le pentagone requis, ce qui est clair par les Corollaires précedens.

### PROBLEME LXXXIV.

352. *Circonscrire un pentagone regulier autour d'un cercle donné ABCDE* (Fig. 172.).

Inscrivez dans le cercle un pentagone regulier par le Probleme précedent, puis du centre O du cercle, tirez OA, OB, OC, OD, OE, aux angles de ce pentagone, & à l'extrêmité de ces rayons, tirez des tangentes indéfinies, qui venant à s'entrecouper, formeront un pentagone regulier HIFGR, qui sera circonscrit au cercle.

### DEMONSTRATION.

Du centre O du cercle, tirez les droites OI, OF, aux angles I, F, de la figure circonscrite, ces lignes couperont les côtez CD, DE, du polygone inscrit en deux parties égales; car du point exterieur I, on ne peut mener au cercle que deux tangentes IC, ID, lesquelles sont égales entr'elles (*n.* 102. 103.), & par

conséquent si on tire la ligne IO, cette ligne divisera en deux parties égales, l'arc compris entre les tangentes, & sa corde CD aussi (*n.* 104.). On démontrera de même que la corde DE, est coupée en deux parties égales par la ligne OF. Cela posé, les deux triangles IOD, FOD, ayant le côté OD commun, l'angle droit IDO égal à l'angle droit FDO, & l'angle IOD égal à l'angle FDO, l'un & l'autre de ces angles étant la moitié de l'angle au centre du poligone inscrit, sont par conséquent égaux & équiangles; donc ID est égal à DF, & la ligne IF de la figure circonscrite, est coupée en deux parties égales au point d'attouchement D, ce qui arrive de même à l'égard des autres côtez FG, GR, &c. de cette figure, comme il est facile de le prouver par le même raisonnement; or la tangente IC, moitié du côté IH, étant égale à la tangente ID, moitié du côté IF, les deux côtez IH, IF, sont par conséquent égaux; de même la tangente FD, moitié du côté FI, étant égale à la tangente FE, moitié du côté FG, les deux côtez FI, FG, sont aussi égaux, & continuant le même raisonnement, on trouvera que les côtez de la figure circonscrite sont tous égaux entr'eux; mais les angles que ces côtez forment, sont aussi égaux, à cause que les triangles CID, DFE, EGA, &c. ayant les trois côtez égaux chacun à chacun, sont égaux & équiangles; donc la figure circonscrite est un pentagone regulier, circonscrit au cercle donné.

## PROBLEME LXXXV.

353. *Inscrire un cercle dans un pentagone donné ABCDE* (Fig. 178.).

Du milieu de chaque côté du pentagone, élevez des perpendiculaires, & prenant pour centre le point O où elles se coupent, décrivez un cercle qui ait pour rayon la perpendiculaire OH, & ce cercle sera inscrit au pentagone.

### DEMONSTRATION.

Divisez les angles du pentagone en deux parties égales par les lignes AO, BO, &c. elles partageront le pentagone en cinq triangles isoceles, égaux & équiangles, dont les sommets seront tous en un point O, également éloigné des angles A, B, C, &c. (*n.* 206.); donc si de ce point O, on abaisse des perpendiculaires OH, OI, OQ, &c. sur les côtez du pentagone, elles couperont ces côtez en deux parties égales, parce qu'elles ont chacune un

point O également éloigné des extrêmitez de ces côtez ; d'où il suit que ces perpendiculaires ne differeront point de celles que nous avons élevées sur le milieu des côtez, attendu que d'un même point on ne peut élever sur une ligne qu'une seule perpendiculaire. Or les lignes OH, OI, OQ, &c. sont égales entr'elles, à cause que les triangles sont semblables & égaux. Donc le cercle qui a le point O pour centre, & l'une des perpendiculaires OH pour rayon, passe par les extrêmitez des autres perpendiculaires OI, OQ, &c. & est par conséquent inscrit au pentagone.

## PROBLEME LXXXVI.

354. *Circonscrire un cercle autour d'un pentagone donné ABCDE* (Fig. 178).

Partagez le pentagone en ses cinq triangles isosceles égaux & équiangles, puis du centre O, décrivez un cercle qui ait pour rayon le côté OA de l'un des triangles, & ce cercle passera par tous les angles du pentagone, ce qui n'a pas besoin de démonstration.

## REMARQUE.

355. Ce que nous venons d'enseigner dans ce Probleme, &. dans les deux précedens, touchant la maniere de circonscrire un pentagone autour d'un cercle, d'inscrire un cercle dans un pentagone, & de circonscrire un cercle autour de cette figure, peut s'appliquer à toutes sortes de figures regulieres, & être démontré de la même façon. C'est pourquoi nous n'en parlerons plus, pour ne pas allonger inutilement cet ouvrage.

## PROBLEME LXXXVII.

356. *Inscrire un exagone dans un cercle donné* (Fig. 179.).

Portez le rayon OA du cercle, six fois autour de la circonference de A en B, de B en C, &c. & vous aurez l'exagone demandé.

## DEMONSTRATION.

La circonference du cercle contenant 360 degrez, si on la divise en six arcs égaux, chacun de ces arcs vaudra 60 degrez ; tirant donc les cordes de ces arcs, & menant des points de division des droites au centre, on aura six triangles, dans chacun desquels l'angle au sommet O, sera de 60 degrez ; donc les deux angles.

ſur la baſe pris enſemble, vaudront 120 degrez, qui eſt le complément de 60 à 180 degrez, ou à deux angles droits; or les triangles étant iſoſceles, les deux angles ſur la baſe de chacun d'eux ſeront égaux; donc ces angles vaudront 60 degrez chacun, & par conſéquent les triangles ſeront équilateraux, & leurs baſes ſeront égales à leur côté, c'eſt-à-dire au rayon du cercle; donc le rayon porte ſix fois autour de la circonference, forme une figure de ſix côtez. Mais les angles de cette figure étant compoſés chacun de deux angles égaux, ſont égaux; donc le rayon porté ſix fois ſur la circonference, forme une figure de ſix côtez & de ſix angles égaux, & par conſéquent un exagone regulier.

## REMARQUE.

357. On n'a pas encore trouvé le moyen d'inſcrire dans le cercle les polygones de 7 côtez de 11, de 13, ni des autres ſuperieurs, dont le nombre des côtez eſt impair, par la ſeule regle & le compas, à l'exception du *pentadecagone*, ou du polygone de quinze côtez, comme on verra ci-deſſous. Ainſi le plus court dans ces occaſions, eſt de diviſer le cercle en tâtonnant, ou de ſe ſervir du compas de proportion pour les polygones qui ſont au-deſſous du dodécagone, ainſi que nous l'enſeignerons dans la ſuite. Au reſte, ceux qui voudront ſçavoir ce que la Géometrie compoſée enſeigne là-deſſus, pourront conſulter les Auteurs qui traitent de cette matiere, & en particulier le Commentaire du Pere Rabuel ſur la Géometrie de Monſieur Deſcartes, & le Traité des Sections Coniques de Monſieur le Marquis de l'Hopital.

## PROBLEME LXXXVIII.

358. *Inſcrire un octogone dans un cercle donné ABCDEFGH* (Fig. 180.).

Inſcrivez dans ce cercle un quarré, puis diviſant chacun des arcs ſoutenus par les côtez du quarré en deux parties égales, tirez des angles du quarré aux points de diviſion les lignes AB, BC, CD, &c. qui formeront l'octogone demandé.

## DEMONSTRATION.

Les côtez AB, BC, CD, &c. de la figure inſcrite, ſont égaux, puiſqu'ils ſoutiennent des arcs égaux par la conſtruction, & les angles ABC, BCD, &c. formés par ces côtez, ſont auſſi égaux,

parce que leurs sommets étant à la circonference, ils embrassent chacun un arc composé de six arcs égaux ; donc la figure inscrite ayant huit côtez & huit angles égaux, est un octogone.

## PROBLEME LXXXIX.

359. *Inscrire un décagone dans un cercle donné ABCDE* (Fig. 181.).

Du centre O tirez un rayon OB, que vous diviserez en moyenne & extrême raison en R, puis portant la médiane OR, dix fois autour de la circonference, & joignant les points de division par des cordes, vous aurez le décagone demandé.

### DEMONSTRATION.

Ayant tiré la ligne OA à l'extrêmité A de la corde AB, le triangle AOB sera isoscele, & sa base AB, étant égale à la médiane du côté OB, l'angle du sommet sera de trente-six degrez ; or 36 degrez est la dixiéme partie de la circonference : donc la corde AB, qui soutient l'arc de 36 degrez, étant portée dix fois autour de la circonference, formera une figure de dix côtez égaux ; or les angles de cette figure seront aussi égaux, parce que chacun d'eux ayant son sommet à la circonference, embrassera un arc composé de huit arcs égaux ; donc la figure inscrite sera un décagone regulier.

### COROLLAIRE I.

360. *Le côté du décagone est incommensurable au rayon du cercle dans lequel il est inscrit.* Ce côté est égal à la médiane du rayon, & la médiane d'une ligne divisée en moyenne & extrême raison, est incommensurable avec cette ligne (*n.* 296.).

### COROLLAIRE II.

361. *Le quarré du côté du pentagone est égal aux quarrez du côté de l'exagone, & du côté du décagone inscrit dans le même cercle.* Soit AB (*Fig.* 182.), le côté du pentagone, & AO le rayon du cercle, lequel est par conséquent égal au côté de l'exagone (*n.* 356.), après avoir divisé l'arc AB en deux parties égales en C, tirez les cordes AC, CB, qui feront côtez du décagone, coupez ensuite la corde AC en deux parties égales en D, & du centre O, tirez la ligne ODE, qui coupera l'arc AC en deux parties égales en E, & sera perpendiculaire sur la corde EC ; enfin du point C,

tirez la ligne CR au point R, où la ligne OE coupe le côté du pentagone, ce qui vous donnera un triangle isoscele ARC, parce que DO étant perpendiculaire sur AC, son point R est également éloigné des extrêmitez A, C de la corde AC, d'où il suit que AR est égal à RC. Cette préparation étant faite, dans le triangle isoscele AOB, l'angle O du sommet vaut 72 degrez, puisqu'il est l'angle au centre du pentagone, & par conséquent les deux angles OAB, OBA sur la base, valent chacun 54 degrez. De même dans le triangle BRO, l'angle RBO, vaut 54 degrez, & l'angle ROB en vaut aussi 54, parce qu'il s'appuye sur l'arc EB, qui en vaut 54, cet arc étant composé de l'arc CB du décagone qui en vaut 36, & de l'arc EC, qui étant la moitié de l'arc AC, égal à CB, en vaut 18, ce qui fait ensemble 54; donc le troisiéme angle ORB, en vaut 72, & les deux triangles AOB, BRO, sont par conséquent semblables. Donc AB. AO :: OB. BR; & mettant AO, au lieu de OB, qui lui est égal, on a :: AB. AO. BR, d'où l'on tire $\overline{AO}^2 = AB \times BR$.

D'autre part, les deux triangles isosceles ACB, CRA, ayant l'angle CAB sur la base commune, sont aussi semblables entr'eux; donc :: AB. AC. AR, d'où l'on tire $\overline{AC}^2 = AB \times AR$. Ajoûtant ces deux produits égaux aux deux égaux ci-dessus $\overline{AO}^2 = AB \times BR$, le premier au premier, & le second au second, on aura $\overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 = AB \times AR + AB \times BR$; mais AR & BR, étant les deux parties de la ligne AB, les deux rectangles $AB \times AR + AB \times BR$, sont ensemble égaux au quarré $\overline{AB}^2$ (*n.* 234.); donc $\overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 = \overline{AB}^2$, c'est-à-dire les quarrez du côté AC du décagone, & du côté AO de l'exagone, sont égaux au quarré du côté AB du pentagone.

## COROLLAIRE III.

362. Un cercle étant donné (*Fig.* 183.), si on veut trouver les côtez du pentagone & du décagone qu'on peut leur inscrire, autrement que nous l'avons enseigné ci-dessus, on tirera le diametre AB, sur le milieu duquel on élevera le rayon perpendiculaire OC, puis partageant AO en deux également au point E, on tirera EC, & faisant ER, égal à EC, on tirera CR, qui sera le

le côté du pentagone, & OR sera celui du décagone. Car AO, étant partagé en deux parties égales en E, on aura $AR \times RO + \overline{EO}^2 = \overline{ER}^2$ (*n.* 238.); mais par la construction ER = EC; donc $\overline{ER}^2 = \overline{EC}^2$, & comme à cause du triangle rectangle ECO, on a $\overline{EC}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{EO}^2$, il s'ensuit que $\overline{ER}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{EO}^2$; mettant donc $\overline{CO}^2 + \overline{EO}^2$, au lieu de $\overline{ER}^2$ dans la premiere égalité que nous avons trouvée ci-dessus, on aura $AR \times RO + \overline{EO}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{EO}^2$, & retranchant de part & d'autre $\overline{EO}^2$, on aura $-AR \times RO = \overline{CO}^2$; mais CO étant égal à AO, le quarré $\overline{CO}^2$, est égal au quarré $\overline{AO}^2$; ainsi $AR \times RO = \overline{AO}^2$, d'où l'on tire :: AR. AO. RO; donc la ligne AR est divisée en O en moyenne & extrême raison. Si donc on porte sa petite partie OR sur la médiane AO, ou OB, son égale, cette médiane OB, sera encore divisée en moyenne & extrême raison en R, & OR sera sa médiane (*n.* 287.); mais OB est le rayon du cercle : donc sa médiane OR, est le côté du décagone; or dans le triangle rectangle COR, le côté OR est le côté du décagone, & le côté OC est le côté de l'exagone; donc le quarré de l'hypotenuse CR, est égal au quarré de l'exagone, plus au côté du décagone, & par conséquent l'hypotenuse CR, est le côté du pentagone (*n.* 361.)

## COROLLAIRE IV.

363. *Le quarré du côté AB d'un pentagone* (Fig. 184.), *plus le quarré de la corde BE, qui soutient l'angle EAB du même pentagone, valent ensemble cinq fois le quarré du rayon* OB. Tirez le diametre BF, perpendiculaire au côté ED du pentagone, & le diametre coupera ED en deux également. C'est pourquoi tirant la ligne EF, elle sera le côté du décagone. Or le triangle BEF, étant rectangle, on a $\overline{BF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EF}^2$; & comme BF est double du rayon OB, on a $\overline{BF}^2 = 4\overline{OB}^2$; c'est pourquoi mettant $4\overline{OB}^2$ au lieu de $\overline{BF}^2$, on aura $4\overline{OB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EF}^2$; mais par le Corollaire précedent, on a $\overline{OB}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AB}^2$; ajoûtant donc ces deux rec-

tangles égaux aux deux précedens chacun à chacun, on aura $4\overline{OB}^2+\overline{OB}^2+\overline{EF}^2=\overline{BE}^2+\overline{EF}^2+\overline{AB}^2$, & retranchant $\overline{EF}^2$ de part & d'autre, il restera $4\overline{OB}^2+\overline{OB}^2=\overline{BE}^2+\overline{AB}^2$, ou $5\overline{OB}^2=\overline{BE}^2+\overline{AB}^2$, c'est-à-dire cinq fois le quarré du rayon, est égal au quarré de BE, plus le quarré de AB.

## PROBLEME XC.

364. *Inscrire un* pentadécagone, *c'est-à-dire une figure de 15 côtez dans un cercle donné ABCDE* (Fig. 185.).

Inscrivez dans le cercle donné un pentagone ABCDE, puis de l'un de ses angles D, tirez par le centre O, le diametre OH, & inscrivez un triangle équilateral DFG, dont l'un de ses angles ait son sommet au point D, l'excès FA de l'arc FH sur l'arc AH, sera la quinziéme partie de la circonference; ainsi portant quinze fois FA sur la circonference, & tirant des lignes par les points de division, on aura le pentadécagone demandé.

### DEMONSTRATION.

L'arc AED étant égal à l'arc BCD, à cause que l'un & l'autre sont composés de deux arcs égaux du pentagone, le point D du diametre DH, est également éloigné des extrêmitez A, B, de la corde AB, & comme ce diametre passe par le centre O, qui est aussi également éloigné des points A, B, il s'ensuit que DH coupe l'arc AHB du pentagone en deux parties égales en H; & par la même raison l'arc FHG, est aussi coupé en H en deux parties égales: or l'arc AHB, étant la cinquiéme partie de la circonference, vaut 72 degrez, & par conséquent sa moitié AH, en vaut 36. De même l'arc FHG, étant la troisiéme partie de la circonference, vaut 120 degrez, & sa moitié FH, en vaut 60. Donc si l'on retranche l'arc AH de l'arc FH, ou 36 de 60, le reste FA, vaut 24 degrez, ou la quinziéme partie de la circonference. Donc cet arc est l'arc du pentadécagone demandé.

## PROBLEME XCI.

365. *Trouver quels sont les poligones reguliers de même espece, qui ayant chacun le sommet de l'un de leurs angles à un même point, ne laissent aucun vuide entr eux.*

Puisque les polygones qu'on demande, ne doivent laisser au-

cun vuide entr'eux, il eſt évident que ſi autour du point qui leur eſt commun, on décrit un cercle, les angles des polygones qui ont leur ſommet à ce point, doivent embraſſer la circonference entiere, & que par conſéquent la ſomme de ces angles doit valoir 360 degrez, ou quatre angles doits. Or de tous les polygones reguliers il n'y a que les triangles, les quarrez & les exagones, dont les angles rangés, comme nous venons de dire, puiſſent valoir quatre angles droits; car l'angle du triangle étant de 60 degrez, ſix de ces angles font 360, l'angle du quarré étant droit, quatre de ces angles font auſſi 360; enfin l'angle de l'exagone étant de 120, trois de ces angles font encore 360, & les angles des autres polygones pris tant qu'on voudra, ne peuvent jamais avoir cette juſte valeur, comme on peut voir aiſément en prenant, par exemple, l'angle du pentagone, lequel étant de 104, ne fait que 312, ſi on le prend trois fois, & fait 416, c'eſt-à-dire plus de 360, ſi on le prend quatre fois, & ainſi des autres; donc il n'y a que les triangles, les quarrez, & les exagones qui puiſſent réſoudre la queſtion.

## PROBLEME XCII.

366. *Un polygone ABCD* (Fig. 186.), *étant donné, fermer ſes angles par des baſes, leſquelles avec les reſtes des côtez, forment un polygone d'un nombre double de côtez.*

Du centre O du polygone, tirez ſur le milieu de l'un des côtez BC, la perpendiculaire OF, puis circonſcrivez un cercle autour du polygone, & inſcrivez à ce cercle un polygone d'un nombre double de côtez; ſur le milieu de l'un de ſes côtez BE, tirez du centre O, la perpendiculaire OG, cherchez une quatriéme proportionnelle aux trois lignes GO, FO, BE, & prenant la moitié de cette proportionnelle, portez-la de F en H, & de H en I, la ligne HI ſera le côté du polygone demandé; de ſorte que ſi vous portez la même moitié de part & d'autre du milieu de chaque côté du polygone donné, & que vous joigniez les points de diviſion voiſins par des lignes droites MH, IL, QR, PN, vous aurez un polygone regulier PNMHIRQ, qui aura un nombre double de côtez.

### DEMONSTRATION.

La ligne BE étant le côté du polygone inſcrit au cercle, la ligne OG, qui eſt perpendiculaire ſur le milieu de cette

ligne, est l'apoteme de ce polygone, & il est évident que la ligne OF doit être l'apoteme du polygone demandé, parce que les parties qu'on doit retrancher de part & d'autre du côté BC, & des autres côtez du polygoue donné, doivent être égales, afin que les triangles MBH, ICL, RDQ, PAN, qu'on doit retrancher de ce polygone, soient isosceles, égaux & équiangles, sans quoi les angles restans MHI, HIL, LRQ, &c. ne seroient pas égaux, comme ils doivent l'être, pour rendre regulier le polygone demandé; d'où il suit que les points H, I, de la ligne HI, qui restera, seront encore également éloignés du milieu F, du côté BC, & que par conséquent la perpendiculaire OH, sera l'apoteme du polygone qu'on demande. Or le polygone inscrit au cercle & le polygone demandé, étant semblables, à cause qu'ils ont un même nombre de côtez, leurs côtez seront entr'eux comme leurs apotemes; donc puisqu'on a l'apoteme du polygone inscrit, son côté & l'apoteme du polygone demandé, la quatriéme proportionnelle à ces trois lignes, sera nécessairement le côté du polygone qu'on cherche. Donc portant de part & d'autre du point F, la moitié de cette proportionnelle, la ligne entiere HI, sera le côté requis. Le reste de la construction est évident par lui-même, & n'a pas besoin d'une plus grande explication.

## PROBLEME XCII.

367. *Deux polygones reguliers étant donnés, dont l'un a un plus grand nombre de côtez que l'autre, & dont cependant les circuits sont égaux, trouver lequel des deux a un plus grand circuit par rapport à son apoteme.*

Soit AB (*Fig.* 187.), le côté d'un exagone, *ab* celui d'un triangle, & les points O, *o*, les centres des cercles ausquels ces polygones sont inscrits, tirez les apotemes OD, *od*, & considerez que l'angle au centre du triangle étant de 120 degrez, & celui de l'exagone de 60, l'angle *aob* est double de l'angle AOB, & que par conséquent l'angle *dob*, qui est la moitié de l'angle *aob*, est aussi double de l'angle DOB, qui est la moitié de l'angle AOB; c'est pourquoi divisant en deux parties égales l'angle *dob* par la ligne *co*, l'angle *doc* est égal à l'angle DOB, & le triangle *doc* est semblable au triangle DOB, l'un & l'autre de ces triangles ayant un angle droit, & l'angle *doc* égal à l'angle DOB; ainsi on a DB. DO :: *dc*. *do*. & multipliant les deux antecedens par 12, à cause que DB étant la moitié du côté de l'exagone, le circuit de ce polygone contient par conséquent 12 fois DB, on a 12DB.

DO :: 12*dc*. *do*. (*n*. 250.); de sorte que si 12*dc*, étoit égal au circuit du triangle, le circuit de l'exagone qui est 12DB seroit à son apoteme DO, comme le circuit du triangle qui seroit 12*dc* à son apotême *do*; mais 12*dc* est moindre que le circuit du triangle; car dans le triangle rectangle *dob*, l'angle aigu *dob*, étant divisé en deux parties égales par la ligne *oc*, la partie *dc* du côté opposé *db*, est moindre que la partie *cb* du même côté, parce qu'elle est plus proche de l'angle droit (*n*. 299.); d'où il suit que *dc* est moindre que le quart du côté *ab* du triangle, & qu'il faut par conséquent plus de 12*dc* pour faire le circuit de ce polygone, lequel étant composé de trois côtez égaux à *ab*, vaut par conséquent 12 quarts de ce côté. Puis donc que le circuit du triangle est plus grand que 12*dc*, il est clair que ce circuit est plus grand par rapport à l'apoteme *do*, que 12*dc* par rapport à ce même apoteme; & comme 12DB. DO :: 12*dc*, *do*, il est encore clair que le circuit 12DB de l'exagone, est moindre par rapport à son apoteme DO, que le circuit du triangle par rapport à son apoteme *do*. D'où l'on tire cette regle, *que de deux polygones de différente espece, qui ont les circuits égaux, l'apoteme de celui qui a un plus grand nombre de côtez, est plus grand que l'apoteme de celui qui en a un moindre nombre, puisque un même circuit est plus grand par rapport à l'un que par rapport à l'autre.*

## REMARQUE.

368. La regle que nous venons de donner est vraye pour toutes sortes de polygones, quoique l'angle de l'un ne soit pas double de l'angle de l'autre. Car supposé que AB soit le côté d'un quarré, & *ab* celui d'un triangle, l'arc AB, sera le quart de sa circonference, & l'arc *ab* sera le tiers de la sienne. C'est pourquoi divisant ces deux circonferences en un nombre de parties égales, dont on puisse prendre le tiers & le quart, comme par exemple, en 12, l'arc AB vaudra trois parties de sa circonference, parce que 3 est le quart de douze, & l'arc *ab* vaudra 4 parties de sa circonference, parce que 4 est le tiers de douze. Ainsi l'angle AOB, sera à l'angle *aob* comme 3 est à 4, & par conséquent l'angle DOB, moitié de AOB. sera encore à l'angle *dob*, moitié de *aob*, comme 3 est à 4. Donc divisant l'angle *dob* par une ligne *oc*, en sorte que l'angle *doc* soit à l'angle *dob*, comme 3 est à quatre, on aura l'angle *doc* égal à l'angle DOB, & le triangle DOB, semblable au triangle *doc*, d'où l'on tirera DB. DO :: *dc*. *do*, &

multipliant les deux antecedens par 8, à cauſe que DB étant la moitié du côté du quarré, il faut 8DB, pour faire le circuit de ce polygone, on aura 8DB. DO :: 8*dc*. *do*. de ſorte que ſi 8*dc*, étoit égal au circuit du triangle, les circuits des deux polygones auroient même raiſon à leurs apotemes; mais 8*dc* eſt moindre que le circuit du triangle; car diviſant l'angle *doc* en trois angles égaux, l'angle *dob* ſeroit diviſé en 4; & ſi la ligne *db*, étoit auſſi coupée en quatre parties égales par les jambes de ces angles, le circuit du triangle contiendroit 24 de ces parties, & par conſéquent trois de ces parties priſes 8 fois; ſeroient égales au circuit; or les trois parties de la ligne *db*, qui ſont plus proches de l'angle droit, étant plus petites chacune que la quatriéme qui en eſt plus éloignée, ſont par conſéquent moindres que les trois parties égales dont nous venons de parler; donc ces parties priſes 8 fois, c'eſt-à-dire 8*dc*, ſont moindres que le circuit du triangle, & comme l'on a 8DB. DO :: 8*dc*. *do*, on concluëra de même que ci-deſſus, que le circuit 8DB du quarré, eſt moindre par rapport à ſon apoteme DO, que le circuit du triangle par rapport à *do*, qui eſt le ſien.

## SECTION XII.

### *De la Trigonometrie.*

### DEFINITION LXI.

369. La *Trigonometrie* eſt la ſcience qui apprend à connoître tous les côtez & les angles d'un triangle par la connoiſſance de quelques-unes de ces choſes.

### DEFINITION LXII.

370. Soit le cercle ABCDEF (*Fig.* 188.), avec ſon diametre AE, & un rayon OC perpendiculaire ſur le diametre. Si dans le quart de cercle CDEO, on fait l'angle aigu DOE, & qu'on éleve à l'extrêmité E de l'une de ſes jambes la perpendiculaire ER, qui coupe l'autre jambe OD prolongée en R, la ligne ER, s'appelle la *tangente* de l'angle DOE, ou de ſon arc DE; OR en eſt la *ſecante*, la ligne DI, tirée de l'extrêmité de l'une des jambes perpendiculairement ſur l'autre, ſe nomme le *ſinus*, la partie IE

que ce sinus coupe sur la jambe OE vers la circonference ; en est *le sinus verse*, le rayon OD, ou OE, est le *sinus total*, ou simplement *rayon*, enfin la ligne DH perpendiculaire sur l'autre rayon OC du quart du cercle, s'appelle *sinus du complément*, parce que cette ligne est le sinus de l'angle DOC, lequel est le complément de l'angle DOE à l'angle droit, où il faut observer que si l'on prolonge le sinus DI, jusqu'à l'autre côté de la circonference en L, la ligne entiere DL, sera coupée en deux parties égales par la perpendiculaire OE, qui part du centre, & que par conséquent son arc DEL, étant aussi coupé en deux parties égales en E, on a raison de dire que *le sinus DI d'un arc DE, est la moitié de la corde DL, qui soutient un arc double DEL.*

## REMARQUE I.

371. Le sinus d'un angle aigu est situé entre les deux jambes du côté de l'angle, celui d'un angle droit COB, n'est pas different de l'une des jambes CO, ou OE, puisque ces jambes étant perpendiculaires entr'elles, on ne peut pas tirer de l'extrêmité C, d'autres perpendiculaires sur OE, que le côté même CO, enfin le sinus BS d'un angle obtus BOE, tombe nécessairement sur l'autre jambe OE, prolongée de l'autre côté de l'angle ; & comme cette jambe prolongée fait un angle aigu AOB, qui est le complément de l'angle obtus BOE à deux angles droits, il arrive que le sinus de l'angle obtus, est le même que celui de son complément ; sur quoi il est bon de remarquer qu'on peut encore dire que le sinus d'un angle obtus est la moitié de la corde qui soutient un arc double ; car si l'on prolonge le sinus BS en T, la corde BT double de BS, soutiendra l'arc BET, lequel est double de l'arc BE.

## REMARQUE II.

372. Il y a donc deux sortes de complémens, l'un qu'on appelle *complément à l'angle droit*, & qui est pour les angles aigus, & l'autre qu'on appelle *complément à deux angles droits*, & qui est pour les angles obtus. Il y a de même deux sortes de secantes, l'une qui partant d'un point exterieur, coupe le cercle en deux points, & l'autre qui partant du centre, va couper une tangente ; nous avons parlé de la premiere en deux ou trois endroits des sections précedentes : mais dans la Trigonometrie, il n'est question que de la seconde, qu'on doit bien éviter de confondre avec l'autre.

## REMARQUE III.

373. Les ſinus, tangentes, & ſecantes, étant d'une grande utilité dans la Trigonometrie, on a calculé des Tables qui marquent le rapport que ces lignes ont avec le rayon depuis l'angle d'une minute juſqu'à l'angle de 45 degrez, & vis-à-vis on a marqué les ſinus, tangentes & ſecantes des complémens à l'angle droit; ainſi vis-à-vis le ſinus, la tangente, & la ſecante d'une minute, on a écrit le ſinus, la tangente & la ſecante de 89 degrez 59 minutes, & ainſi des autres; ce qui eſt d'une grande utilité, parce qu'on a ſouvent beſoin des complémens. Or comme on ne peut trouver les rapports de ces lignes que par la regle de proportion, autrement dite regle de trois, qui laiſſe ſouvent des fractions, ou par l'extraction des racines quarrées qui ne ſont pas toujours exactes & ſans reſte, on a ſuppoſé le rayon diviſé en cent millions de petites parties égales, afin de pouvoir négliger les fractions ou les reſtes des extractions, qui étant toujours moindres qu'une unité, ainſi que nous l'avons fait voir dons notre Arithmetrique des Géometres, ne ſont pas par conſéquent un cent millionieme du rayon, ce qui peut être regardé pour rien, vû ſon extrême petiteſſe. Nous allons ſuivre ici le Pere Tacquet, qui a traité cette matiere d'une façon beaucoup plus nette, & plus courte que les autres Auteurs, dans ſon Traité de Trigonometrie, qu'on trouve à la fin de ſes Elemens de Géometrie, imprimés en Hollande, & commentés par Wiſton. Le mérite de ce célebre Géometre eſt connu de tout le monde, & ceux qui n'entendent pas le Latin, ne ſeront pas fachez de trouver ici ce qu'il enſeigne la-deſſus. Nous commencerons par trois Problemes généraux, qui ſeront ſuivis de ſix autres, par le moyen deſquels on trouvera les ſinus, tangentes & ſecantes depuis une minute juſqu'à 90 degrez. De-là nous paſſerons à la maniere de trouver les ſinus des ſecondes, & des arcs compoſés de minutes & ſecondes. Après quoi nous viendrons à la réſolution des triangles, ſoit rectangles, ſoit non rectangles, qui eſt le principal objet de cette Section.

## PROBLEME XCIII.

374. *Le ſinus DI d'un angle DOE, étant donné* (Fig. 188.), *trouver le ſinus DH de ſon complément à l'angle droit.*

Faites le quarré du rayon OD, retranchez-en le quarré du ſinus DI,

DI, le reſte ſera le quarré du ſinus DH ; & par conſéquent la racine de ce quarré ſera la valeur du ſinus DH.

### DEMONSTRATION.

Les deux lignes HD, OI, étant perpendiculaires ſur le rayon CO, ſont paralleles entr'elles ; donc les deux lignes HO, DI, qui ſont perpendiculaires à OE, ſont auſſi perpendiculaires à HD, & ſont égales entr'elles. Ainſi HO eſt égal au ſinus DI ; or le triangle OHD, étant rectangle en H, on a $\overline{OD}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HD}^2$, & retranchant de part & d'autre $\overline{OH}^2$, on aura $\overline{OD}^2 - \overline{OH}^2 = \overline{HD}^2$, c'eſt-à-dire, le quarré du rayon OD, moins le quarré de OH, ou du ſinus DI, eſt égal au quarré du ſinus DH du complément ; retranchant donc du quarré $\overline{OD}^2$, le quarré $\overline{DI}^2$, & tirant la racine quarrée du reſte, cette racine ſera la valeur de DH.

### COROLLAIRE.

375. HD eſt égal à OI, comme on vient de voir ; donc ſi du rayon ou ſinus total OE, on retranche la valeur du ſinus du complément HD, le reſte ſera égal au ſinus verſe IE de l'angle DOE, & de même HO étant égal au ſinus DI, ſi du rayon CO, on ôte la valeur de DI, le reſte ſera égal au ſinus verſe HC du complement.

## PROBLEME XCIV.

376. *Connoiſſant le ſinus BC d'un angle AOB* (Fig. 189.), *connoître le ſinus de la moitié de cet angle.*

Tirez la corde AB, & du centre O, tirez ſur cette corde la perpendiculaire DO, qui la coupera en deux parties égales en E, & ſon arc auſſi au point D ; d'où il ſuit que l'angle DOB, ſera la moitié de l'angle AOB, & que BE ſera ſon ſinus. Cherchez donc par le Probleme précedent le ſinus BH du complément, puis retranchant ce ſinus du rayon AO, faites le quarré du reſte, & l'ajoûtant au quarré du ſinus BC, tirez la racine quarrée de la ſomme, & la moitié de cette racine ſera égale au ſinus BE.

### DEMONSTRATION.

Les lignes BH, CO, ſont égales, à cauſe des paralleles BC, HO : c'eſt pourquoi ſi de AO, on retranche BH, ou ſon égal CO,

dont la valeur eſt connuë par le Probleme précedent, le reſte ſera la valeur de AC; mais le triangle ABC étant rectangle en C, on a $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$, & par conſéquent le quarré $\overline{AB}^2$, ſera auſſi connu; donc tirant la racine quarrée de $\overline{AB}^2$, cette racine ſera la valeur de la corde AB, & la moitié de cette racine ſera égale à la moitié BE de la corde, c'eſt-à-dire au ſinus de la moitié de l'angle AOB.

## PROBLEME XCV.

377. *Connoiſſant les ſinus AI, BH, de deux arcs AC, BC* (Fig. 190.), *dont la difference eſt moindre que 45. minutes, connoître le ſinus DV d'un arc moindre que l'arc AC, & plus grand que l'arc BC.*

De l'extrêmité B du ſinus BH, tirez la perpendiculaire BE ſur le ſinus AI, laquelle coupera auſſi perpendiculairement le ſinus DV en R, & la ligne AE ſera la difference du ſinus AI, au ſinus BH, de même que la ligne DR ſera la difference du ſinus DV au même ſinus BH; or la difference AB, de l'arc AC à l'arc BC, étant moindre que 45 minutes, cet arc AB, eſt petit, & peut être regardé comme étant une ligne droite, ſans craindre que l'erreur puiſſe être de quelque conſideration; donc on aura deux triangles rectangles ſemblables ABE, DBR, qui donneront AB. DB :: AE. DR, c'eſt-à-dire la difference AB des arcs AC, BC, eſt à la difference des arcs DC, BC, comme la difference AE des ſinus AI, BH, eſt à la difference DR des ſinus DV, BH; or les trois premieres de ces choſes ſont connuës, faiſant donc une regle de trois ou de proportion, on trouvera la quatriéme DR, laquelle étant ajoûtée au ſinus BH, donnera la valeur cherchée de DR.

## REMARQUE.

378. Ce que nous venons de dire dans ces trois Problemes, & ce que nous dirons dans les ſuivans, & dans tout le cours de cette Section, ſuppoſe qu'on ſçache la regle de trois, & l'extraction de la racine quarrée; c'eſt pourquoi ceux qui ignorent ces calculs, pourront s'en inſtruire dans notre Arithmetique des Géometres, où nous les avons amplement expliquez.

## PROBLEME XCVI.

379. *Trouver le ſinus FC, d'un angle ABC, de 45 degrez* (Fig. 191.).

Tirez le ſinus CR du complément, lequel ſera égal au ſinus FC, parce que l'angle CBD du complément, vaut auſſi 45 degrez, & vous aurez CR égal à FB, & par conſéquent FB, égal à FC; or le triangle rectangle BFC, donne $\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{FC}^2$, mettant donc $\overline{FC}^2$ au lieu de $\overline{BF}^2$, on aura $\overline{BC}^2 = 2\overline{FC}^2$. c'eſt-à-dire le quarré du rayon BC eſt double du quarré du ſinus FC. Ainſi prenant la moitié du quarré $\overline{BC}^2$, & tirant la racine quarrée, cette racine eſt la valeur de FC.

Le rayon étant de 10000000, ſi l'on fait le quarré de ce nombre, & qu'on tire la racine quarrée de ſa moitié, cette racine 7071068 ſera la valeur du ſinus FC.

## PROBLEME XCVII.

380. *Trouver les ſinus des arcs AC de 60 degrez, & AE de 30* (Fig. 192.).

Tirez la corde AC, qui ſera égale au rayon BC, parce que la corde de 60 degrez, eſt égale au rayon (*n.* 356.), & les trois angles du triangle BAC, ſeront chacun de 60 degrez; c'eſt pourquoi les triangles rectangles BAR, CAR, ſeront égaux & équiangles, à cauſe que le côté AR, leur eſt commun, & qu'ayant chacun un angle droit, ils ont encore l'angle ABR, égal à l'angle ACR; d'où il ſuit que BR, eſt la moitié du rayon. Or dans le triangle rectangle ARC, on a $\overline{AC}^2$, ou $\overline{BC}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RC}^2$; donc ſi du quarré $\overline{BC}^2$ du rayon, on ôte le quarré $\overline{RC}^2$ de ſa moitié, le reſte ſera la valeur du quarré $\overline{AR}^2$, du ſinus AR, & par conſéquent la racine quarrée de ce reſte ſera la valeur de AR, laquelle en faiſant le calcul ſe trouve être 8660254.

Quand au ſinus FC de 30 degrez, il eſt évident qu'il eſt égal à BR, moitié du rayon, & que par conſéquent il vaut 5000000.

## PROBLEME XCVIII.

381. *Trouver le ſinus de 36 degrez* (Fig. 193.).

Décrivez un demi-cercle ABC ſur ſon diametre AC, au mi-

lieu duquel vous éleverez le rayon DB perpendiculaire ; diviſez DC en deux parties égales en E, tirez EB, & portez la grandeur EB, de E en H, par où vous tirerez la ligne HB, qui ſera le côté du pentagone, ou la corde d'un arc de 72 degrez (*n.* 362.).

Cela fait, le triangle BDE, donne $\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2$ ; ainſi ajoûtant au quarré du rayon BD, le quarré de ſa moitié DE, la ſomme ſera le quarré de BE, ou de EH, qui lui eſt égal par la conſtruction ; tirant donc la racine quarrée, & ôtant de cette racine la valeur de DE, le reſte ſera la valeur de HD. Or le triangle rectangle HDB, donne $\overline{HB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{HD}^2$. Si donc au quarré du rayon BD, on ajoûte celui de HD, la ſomme ſera le quarré de la corde HB de 72 degrez ; ainſi tirant la racine quarrée, & prenant la moitié de cette racine, on aura la valeur de la moitié de HB, laquelle moitié eſt le ſinus de 36 degrez, puiſque la moitié d'une corde eſt le ſinus de la moitié de l'arc que cette corde ſoutient (*n.* 370.). Or en faiſant le calcul, ce ſinus ſera 5877853.

## PROBLEME XCIX.

382. *Trouver le ſinus de* 12. *degrez* (Fig. 194.).

Soit DX le ſinus de l'arc AD de 30 degrez, SE celui de l'arc AE de 54 ; DR ſera par conſéquent celui de 60, qui eſt le complément de l'arc AD, & EQ, ſera celui de 36, qui eſt le complément de 54 ; enfin l'arc DE, étant la difference de l'arc AD à l'arc AE, vaudra 24. & ſa corde ſera la droite DE.

Cela poſé, du ſinus DR de 60 degrez qu'on a trouvé (*n.* 380.), ôtez le ſinus EQ de 36, qui eſt connu par le Probleme précedent, le reſte ſera la valeur de DO. Cherchez (*par n.* 374.), le ſinus SE de 54 degrez, lequel eſt le complément du ſinus EQ de 36 degrez, & de ce ſinus SE, ôtez le ſinus DX de 30 degrez, le reſte ſera la valeur de OE ; ainſi DO, OE, étant connus, le triangle rectangle DOE, donnera $\overline{DO}^2 + \overline{OE}^2 = \overline{DE}^2$, & tirant la racine quarrée, on connoîtra la corde DE, qui ſoutient l'arc de 24 degrez ; donc la moitié de cette corde ſera le ſinus de 12 degrez ; & ce ſinus en faiſant le calcul, ſera 2079217.

## PROBLEME C.

383. *Trouver les ſinus de tous les arcs depuis une minute juſqu'à* 90 *deg.*

En premier lieu, connoiſſant le ſinus de l'arc de 45 degrez

(*n.* 379.), cherchez (*par n.* 376.) le sinus de 22 degrez 30 minutes, qui est la moitié de cet arc, puis la moitié de 11 degrez 15 minutes, moitié de ce ce nouvel arc; & comme celui-ci ne peut plus se diviser par la moitié sans trouver une fraction de secondes, dont il n'est pas encore question, n'allez pas plus loin de ce côté-là; mais cherchez (*par n.* 374.), les sinus de complémens des arcs de 45, de 22 degrez 30 minutes, & de 11 degrez 15 minutes, ce qui vous donnera seulement les sinus de 67 degrez 30 minutes, & de 78 degrez 45 minutes: car le sinus du complément de 45 degrez, est le même que le sinus de 45 degrez; ensuite cherchez le sinus de 33 degrez 45 minutes, qui est la moitié du complément de 67 degrez 30 minutes, & ne pouvant plus prendre la moitié de 33 degrez 45 minutes, non plus que la moitié du complément 78 degrez 45 minutes, prenez le sinus de complément de 33 degrez 45 minutes, qui est 56 degrez 15 minutes, après quoi ne pouvant plus prendre ni moitié, ni complément, tenez-vous-en aux sept sinus trouvés, lesquels seront de 45 degrez, de 22 degrez 30 minutes, de 11. degrez 15 minutes, de 67 degrez 30 minutes, de 78 degrez 45 minutes, de 33. degrez 45 minutes, & de 56 degrez 15. minutes.

En second lieu, le sinus de 60 degrez étant connu (*n.* 380.), si vous prenez les sinus de sa moitié, de la moitié de cette moitié, & ainsi de suite tant que vous pourrez, puis les sinus de complémens de 60, & ceux de sa moitié & des moitiés de moitiés; ensuite la moitié des complémens, & les moitiés de ces moitiés, & enfin les complémens de ces moitiés, & les moitiés de ces nouveaux complémens, & ainsi de suite, vous trouverez 16 nouveaux sinus en y comprenant celui de 60, & ces sinus ajoutés aux 7 premiers, feront 23.

En troisiéme lieu, agissant de même à l'égard du sinus de 36 degrez, qui est connu (*par n.* 381.), vous trouverez 32 sinus, qui ajoûtés aux 23 précedens, feront 55. Enfin faisant la même chose à l'égard du sinus de 12 degrez qu'on trouve par le Probleme précedent, vous aurez 64 autres sinus, qui avec les 55 cidessus, feront 119, ausquels ajoûtant le sinus de 90 degrez, qui est le rayon, vous aurez 120 sinus, & ces sinus rangés par ordre, iront en se surpassant de 45 minutes, de sorte que le premier sera de 45 minutes, le second d'un degré, le troisiéme d'un degré 45 minutes, & ainsi de suite jusqu'à 90.

Maintenant pour trouver les sinus moyens entre ceux-ci, met-

tez un zero devant le premier, que vous regarderez comme étant le sinus d'un arc infiniment petit, puis entre le sinus de chacun de ces arcs, & son sinus immédiatement superieur, cherchez (*par n.* 377.), deux sinus de deux arcs, dont la difference soit de 15 minutes, en sorte que les quatre sinus aillent en se surpassant de 15. degrez, & vous aurez par-là 240 sinus, qui avec les 120 précedens, feront 360, dont la difference des uns aux autres, sera de 15 minutes.

Cherchez de même entre chacun de ceux-ci & son superieur, deux sinus, dont la difference soit de 5 minutes, & vous aurez 720 autres sinus, qui ajoûtés aux 360 précedens, feront 1080, dont la difference entr'eux sera de 5 minutes.

Enfin entre chacun de ceux-ci & son superieur, cherchez-en quatre, dont les arcs ne different entr'eux que d'une minute, & vous aurez 4320 sinus, qui avec les 1080 ci-dessus, feront 5400, dont la difference entr'eux, sera 1 minute.

## PROBLEME CI.

384. *Trouver les tangentes & les secantes des arcs, dont les sinus ont été trouvés par les Problemes précedens.*

Les sinus étant connus, les tangentes & les secantes se trouvent très-aisément; soit par exemple, l'angle DOE (*Fig.* 188.), dont DI est le sinus, & DH, celui de son complément. Les triangles rectangles OID, OER, donnent OI. ID :: OE. ER, & comme OI est égal à HD, mettant HD au lieu de OI, on aura HD. ID :: OE. ER, c'est-à-dire le sinus HD du complément, est au sinus DI de l'arc proposé, comme le rayon OE est à la tangente ER; c'est pourquoi les trois premiers termes de cette proportion étant connus, on trouve aisément le troisiéme par une regle de trois.

De même les deux triangles rectangles OID, OER, donnent OI, OD :: OE. OR, & mettant au lieu de OI, le sinus HD du complément, on aura HD. OD :: OE. OR, c'est-à-dire le sinus HD du complément est au rayon OD, comme OE, qui est encore le rayon, est à la secante OR, que l'on trouvera de même par la regle de trois, & ainsi des autres.

## PROBLEME CII.

385. *Trouver le sinus d'une ou de plusieurs secondes.*

Supposons que l'arc BC (*Fig.* 190.), soit de 40 secondes, & qu'on propose de trouver son sinus BH, prenez l'arc AC d'une minute, c'est-à-dire de 60 secondes, & son sinus AI; ensuite comme ces arcs sont fort petits, regardez-les comme s'ils étoient des lignes droites, & vous aurez deux triangles rectangles semblables, qui vous donneront AC. BC :: AI. BH, c'est-à-dire, l'arc AC de 60 secondes, est à l'arc BC de 40 secondes, comme le sinus AI de 60 secondes, est au sinus BH de 40, & par conséquent les trois premiers termes étant connus, le quatriéme le sera aisément.

## PROBLEME CIII.

386. *Trouver le sinus d'un arc qui comprend des degrez, des minutes & des secondes.*

Supposons que l'arc DC (*Fig.* 190.), soit de 20 degrez 29 minutes & 31 secondes, & qu'on demande la valeur de son sinus DV, prenez les arcs immédiatement voisins, l'un inferieur & l'autre superieur, c'est-à-dire l'arc BC de 20 degrez 29 minutes, & l'arc AC de 20 degrez 30 minutes; prenez aussi leurs sinus BH, AI, les arcs BC, AC, ne differant entr'eux que de 60 secondes, leur difference AB est petite, & peut passer par une ligne droite; ainsi de l'extrêmité B du sinus BH, tirant la perpendiculaire BE, la ligne AE, sera la difference du sinus AI au sinus BH, & DR, la difference du sinus DV, au sinus BH : or les triangles rectangles semblables ABE, DBR, donnent AB. DB :: AE. DR. c'est-à-dire la difference de l'arc AC à l'arc BC, est à la difference de l'arc DC à l'arc BC, comme la difference du sinus AI au sinus BH, est à la difference du sinus DV au sinus BH. Cherchant donc cette difference DR, par la regle de trois, & l'ajoûtant au sinus BH, vous aurez la valeur du sinus DV.

## PROBLEME CIV.

387. *La valeur d'un sinus étant donnée, trouver à quel arc il appartient.*

Cherchez ce sinus dans les Tables, & s'il s'y trouve exactement, la colonne des degrez & des minutes, vous indiquera quel est son arc; mais s'il ne s'y trouve pas, prenez dans ces mêmes Tables les sinus immédiatement voisins, l'un au-dessous & l'autre au-dessus, que je suppose être l'un le sinus de 20 degrez 29 minutes, & l'autre le sinus de 20 degrez 30 minutes, prenez

la difference de ces sinus, & la difference 60 minutes de leurs arcs, prenez de même la difference du sinus proposé au moindre de ces deux sinus; ensuite dites par regle de trois, la difference du grand sinus au petit, est à la difference du sinus proposé au petit, comme la difference du grand arc au petit, est à la difference de l'arc moyen au petit, & cette derniere ajoûtée au petit arc, la somme sera l'arc du sinus proposé; ce qui est évident par la Figure 190 du Probleme précedent, où l'on voit que AE. DR:: AB. DB.

## *De la Résolution des Triangles.*

### DEFINITION LXIII.

388. Un triangle s'appelle *obliquangle*, lorsqu'il n'a point d'angle qui soit droit, parce qu'alors ses côtez sont obliques les uns sur les autres, au lieu que le triangle rectangle a deux côtez perpendiculaires entr'eux.

Nous allons résoudre séparément les triangles rectangles, & les obliquangles; mais auparavant nous donnerons le Probleme suivant, qui peut s'appliquer également à tous.

### PROBLEME CV.

389. *Un triangle ABC étant donné* (Fig. 195.), *connoître le rapport de ses côtez.*

Inscrivez le triangle donné dans un cercle, l'angle A étant à la la circonference, vaut la moitié de l'arc BC; or le sinus de la moitié de cet arc, est la moitié de la corde BC (*n.* 370.); donc le sinus de l'angle A, est la moitié de BC. Par la même raison le sinus de l'angle B, est la moitié de la corde AC, & le sinus de l'angle C, est la moitié de la corde AB; or ces cordes sont les côtez opposés aux angles A, B, C, & ces côtez sont entr'eux comme leurs moitiés; donc *dans tout triangle les côtez sont entr'eux comme les sinus des angles opposés à ces côtez.*

## *De la Résolution des Triangles rectangles.*

### PROBLEME CVI.

390. *Connoissant l'hypotenuse CB d'un triangle rectangle ACB* (Fig. 196.), *& l'angle aigu B, connoître ses deux autres côtez AC, AB.*

Puisque dans tout triangle les sinus sont proportionnels aux côtez

côtez (*n.* 389), faites cette analogie ou proportion ; le sinus de l'angle droit A, est au côté opposé CB, comme le sinus de l'angle B, est au côté opposé AC. Or le sinus de l'angle droit A, & celui de l'angle B, étant connus, de même que le côté BC, les trois termes de cette proportion, sont par conséquent connus ; donc la regle de trois fera connoître le quatriéme.

De même pour connoître le côté AB, faites cette proportion : le sinus de l'angle droit A, est au côté opposé CB, comme le sinus de l'angle C, qui est le complément de l'angle B (à cause que les deux angles C & B, pris ensemble, valent un droit) est au côté opposé AB, qu'on trouvera comme ci-dessus.

Supposant donc que l'hypotenuse CB, soit de 37 toises, & l'angle B de 54 degrez, le sinus de l'angle droit A, pris dans les Tables vaut 10000000, parce qu'il est égal au rayon, celui de 54 degrez vaut 8090170. & par conséquent les trois termes de la premiere proportion ci-dessus sont :

| | |
|---|---|
| *Comme le Sinus* | 10000000 |
| *Est à l'Hypotenuse CB* | 37 |
| *Ainsi le Sinus* | 8090170 |
| *Au côté AC* | |

Faisant donc la regle de trois, vous trouverez environ 30 toises pour le côté AC. De même cherchant dans la Table le sinus de complément de l'angle B, c'est-à-dire le sinus de 36 degrez, la seconde proportion sera ;

| | |
|---|---|
| *Comme le Sinus* | 10000000 |
| *Est à l'Hypotenuse CB* | 37 |
| *Ainsi le Sinus* | 5877853 |
| *Au côté AB* | |

Et la regle de trois donnera pour le côté AB, environ 21 toises $\frac{1}{4}$.

## PROBLEME CVII.

391. *Connoissant le côté AB d'un triangle rectangle ABC* (Fig. 196.), *& l'angle opposé C, connoître l'autre côté & l'hypotenuse.*

Faites cette analogie : Comme le sinus de l'angle C, marqué

dans les Tables, est au côté opposé & connu AB, ainsi le sinus de l'hypotenuse, qui est toujours la valeur du rayon, est à l'hypotenuse CB, que la regle de trois vous donnera.

L'hypotenuse étant trouvée, faites-en le quarré, & ce quarré étant égal aux quarrez des deux autres côtés, si vous en retranchez le quarré du côté connu CB, le reste sera le quarré du côté AC, & par conséquent la racine quarrée de ce reste, sera le côté AC. Ou bien faites comme le sinus de l'angle droit est à l'hypotenuse CB, qu'on vient de connoître; ainsi le sinus de l'angle B, qui est le complément de l'angle C, est au côté opposé AC.

## PROBLEME CVIII.

392. *Le côté AB* (Fig. 196.), *étant connu, & l'angle aigu B, adjacent à ce côté, connoître l'hypotenuse, & l'autre côté.*

Comme l'angle aigu d'un triangle rectangle est toujours le complément de l'autre, faites cette analogie, le sinus de l'angle C, qui est le complément de l'angle B, est au côté connu AB, comme le sinus de l'angle B, est au côté opposé AC, & ce côté étant connu, ajoûtez ensemble le quarré de AC, & celui de AB, & la somme sera le quarré de l'hypotenuse CB, que vous trouverez en tirant la racine quarrée de cette somme; ou bien vous ferez cette analogie: le sinus de l'angle B, est au côté opposé AC, comme le sinus de l'angle droit est à l'hypotenuse.

## PROBLEME CIX.

393. *Connoissant l'hypotenuse AC, & l'un des côtez AB* (Fig. 197.), *connoître l'autre côté & les angles.*

Prenez BC pour rayon d'un cercle, & du centre C, décrivez l'arc BE, & tirez EH perpendiculaire sur BC, l'hypotenuse AC, sera la secante de l'angle C, le côté BC en sera le rayon, le côté AB, sera la tangente, la ligne EH, le sinus, & la ligne HC, le sinus du complément, c'est-à-dire le sinus de l'angle A; car nous avons vû (*n.* 376, 377.), que le sinus du complément est toujours égal à la partie HC du rayon compriſe entre le centre C & le sinus EH. Or à cause des triangles semblables BAC, HEC, vous aurez AC. BC :: EC. HC, faites donc cette analogie: la secante est au rayon, comme le rayon est au sinus de l'angle A, & trouvant les trois premiers termes de cette proportion par les Tables, la regle de trois vous donnera le quatriéme, lequel étant cherché dans les Tables, vous indiquera la valeur de l'angle A, après

quoi vous trouverez le reste par les deux Problemes précedens.

Ou bien du quarré de l'hypotenuse AC, retranchez le quarré du côté AB, & le reste sera le quarré du côté BC; ainsi tirant la racine quarrée de ce reste, vous aurez le côté BC. Ensuite vous ferez cette proportion: l'hypotenuse AC, est au sinus de l'angle droit comme le côté AB est au sinus de l'angle opposé C, & cet angle étant connu, vous connoîtrez le reste comme dans les 2. Problemes précedens.

## PROBLEME CX.

394. *Connoissant les deux côtez AB, BC* (Fig. 197.), *connoître l'hypotenuse BC, & les angles.*

Ayant décrit l'arc BE, le côté AB sera la tangente de l'angle C, & le côté BC en sera le rayon; ainsi vous direz: comme le côté BC, est au côté BA, ainsi le rayon est à la tangente, laquelle étant trouvée par la regle de trois, la Table vous indiquera la valeur de l'angle C, à qui elle appartient; après quoi tout le reste se connoîtra facilement.

Ou bien ajoûtez ensemble le quarré du côté AB, & celui du côté AC, la somme sera le quarré de l'hypotenuse; ainsi tirant la racine quarrée, vous aurez l'hypotenuse, & par conséquent vous connoîtrez les angles par les Problemes précedens.

## REMARQUE.

395. Les Commençans doivent observer ici que pour pouvoir résoudre un triangle rectangle, il faut nécessairement connoître quelqu'un des côtez, parce qu'on peut faire une infinité de triangles rectangles, qui ayent les trois angles égaux chacun à chacun, sans que pour cela leurs côtez soient égaux; d'où il suit que connoissant les trois angles de l'un de ces triangles, on ne peut pas déterminer la grandeur de ses côtez.

## *De la Résolution des Triangles obliquangles.*

## PROBLEME CXI.

396. *Connoissant les trois côtez AB, BC, AC, d'un triangle obliquangle ABC* (Fig. 198.), *connoître les segmens AE, EC, faits par la perpendiculaire BE, tirée du plus grand angle B, sur le plus grand côté AC.*

Du sommet B, décrivez un cercle dont le rayon soit le moindre côté AB, & prolongez le côté BC jusqu'à la circonference en D. Le rayon DB étant égal au côté AB, qui est aussi rayon,

il eſt évident que la ligne CD, ſera égale à la ſomme des côtez BC, BA, & que la ligne CH ſera la difference de ces mêmes côtez, à cauſe que BH eſt égal à AB; & comme BE étant perpendiculaire à la corde AR, la coupe en deux également, la ligne ER eſtpar conſéquent égale au petit ſegment AE, & la ligneRC, eſt la difference du grand ſegment EC, au petit AE, ou ER.

Cela poſé, les deux lignes CD, CA, partant d'un même point exterieur C, & coupant chacune la circonference en deux points, vous aurez AC. CD :: CH. CR (*n.* 319.), c'eſt-à-dire la baſe AC, eſt à la ſomme des côtez AB, BC, comme la difference HC de ces côtez, eſt à la difference CR des ſegmens AE, EC. Or les trois premiers termes de cette proportion ſont connus; donc la regle de trois vous ſera trouver la quatriéme. Retranchant donc RC de la baſe AR, le reſte ſera la valeur de la ligne AR, & prenant la moitié de cette valeur, vous aurez celle du petit ſegment AE; ainſi l'un & l'autre ſegment vous ſeront connus, puiſqu'il n'y a qu'à retrancher le petit ſegment AE de la baſe AC, pour avoir le grand ſegment EC.

## PROBLEME CXII.

397. *Les trois côtez AB, BC, AC, étant connus* (Fig. 198.); *connoître les trois angles.*

Tirez du plus grand angle B, la perpendiculaire BE, ſur le plus grand côté AC, puis cherchez par le Probleme précedent, les ſegmens AE, EC, & alors connoiſſant dans le triangle rectangle BEC, l'hypotenuſe BC, & le côté EC, vous connoîtrez aiſément la perpendiculaire BE, & l'angle C (*n.* 393.). Ainſi l'angle C, étant connu, vous ferez cette analogie: comme le côté AB, du triangle ABC, eſt au ſinus de l'angle C, qui lui eſt oppoſé, ainſi le côté BC, eſt au ſinus de l'angle A, qui lui eſt oppoſé. Ayant donc trouvé par la regle de trois la valeur de ce ſinus, les Tables vous indiqueront l'angle A, à qui il appartient; & l'angle A étant connu, l'angle B le ſera auſſi, puiſqu'il eſt le complément des deux A, C, à deux angles droits.

## PROBLEME CXIII.

398. *Deux côtez AB, BC, d'un triangle obtuſangle ABC* (Fig. 199.), *& l'angle compris B, étant connus, connoître le troiſiéme côté & les deux autres angles.*

Du ſommet B de l'angle compris, décrivez un cercle, dont le

rayon soit l'un des côtez BC, prolongez l'autre côté AB, de part & d'autre jusqu'à la circonference en E, D; prolongez aussi la base AC en O, & tirez les lignes CE, CD, qui formeront un angle droit ECD, à cause que cet angle étant à la circonference, s'appuye sur le diametre ED. Du point E, pris pour centre, & du rayon EC, décrivez l'arc CH, dont la ligne DC, sera la tangente, & du point C, pris pour centre, décrivez avec le même rayon EC l'arc ER, dont vous tirerez la tangente EI perpendiculaire sur EC, laquelle sera par conséquent parellele à la tangente CD, l'une & l'autre étant perpendiculaire sur EC. Cela posé.

En premier lieu, BD, étant égal à BC, la ligne AD, est égale à la somme AB+BC des côtez, & la ligne BE, étant aussi égale à BC, la ligne EA, est la difference des mêmes côtez.

En second lieu, l'angle CBD, étant exterieur au triangle ABC, vaut les deux angles internes opposés BAC, BCA (*n.* 182.). Or l'angle à la circonference BEC, ne vaut que la moitié de l'angle DBC, parce que celui-ci étant au centre, embrasse le même arc; donc l'angle BEC, vaut la moitié des angles BAC, BCA, pris ensemble, & par conséquent la ligne DC est tangente de la moitié de la somme de ces deux angles.

En troisiéme lieu, l'angle BAC, ayant son sommet entre la circonference & le centre, vaut la moitié de l'arc DC, plus la moitié de l'arc EO (*n.* 147.), & l'angle AEC, ne vaut que la moitié de l'arc DC; donc l'angle BAC, surpasse l'angle AEC, de la moitié de l'arc EO, c'est-à-dire du petit angle ECO, qui vaut la moitié de cet arc; or à cause du triangle isoscele EBC, l'angle BEC, ou AEC, est égal à l'angle BCE; donc l'angle AEC, surpasse aussi BCA, du petit angle ECO. Puis donc que l'angle BAC, surpasse AEC du petit angle ECO, & que l'angle AEC, surpasse l'angle BCA, du même petit angle ECO, il s'ensuit que la difference des angles BAC, BCA, du triangle proposé, est double de l'angle ECO, & que par conséquent la ligne EI est tangente de la moitié de cette difference.

En quatriéme lieu, les triangles IAE, CAD, ayant l'angle IAE égal à l'angle CAD, qui lui est opposé au sommet, & l'angle EIC égal à l'angle alterne ICD, à cause des paralleles IE, DC, sont semblables; donc AD. AE :: DC. IE, c'est-à-dire *la somme AD, des deux côtez connus du triangle ABC, est à leur difference AE, comme la tangente DC, de la moitié de la somme des angles BAC,*

*BCA, opposés à ces côtez, est à la tangente IE de la moitié de la difference de ces mêmes angles*, ce qui est une regle pour tous les triangles obtusangles.

Maintenant l'angle ABC, étant connu par la supposition, la somme des deux autres BAC, BCA, est par conséquent connuë, puisqu'elle est le complément de l'angle ABC, à deux droits. Ainsi prenant la moitié de cette somme, on trouvera dans les Tables la tangente de cette moitié; donc les trois premiers termes de la proportion étant connus, la regle de trois donnera le quatriéme, & les Tables indiqueront à quel arc il appartient. C'est pourquoi comme nous venons de voir que l'angle BAC, surpasse l'angle BEC, du petit angle ECO, & que ces deux derniers angles sont connus par la proportion que nous avons faite, si l'on ajoûte ces deux angles ensemble, leur somme sera la valeur de l'angle BAC, du triangle, & l'on connoîtra aisément le troisiéme BCA, puisqu'il est le complément des deux angles ABC, BAC à deux angles droits.

Enfin pour connoître le côté AC, vous ferez cette analogie. Le sinus de l'angle ACB, est au côté AB, comme le sinus de l'angle ABC, est au côté AC.

## REMARQUE.

399. La résolution de ce Probleme est un des plus beaux endroits de la Géometrie; mais comme la démonstration en est difficile, quelque clarté que nous lui ayons donnée, nous allons enseigner ici une façon plus aisée de le résoudre.

Soient AB, AC, les deux côtez connus du triangle obtusangle ABC (*Fig.* 200.), & A l'angle compris & connu; de l'un des angles inconnus B, tirez la perpendiculaire BE, sur le côté opposé AC, & vous aurez le triangle rectangle AEB, dans lequel l'hypotenuse AB, & l'angle aigu étant connus, vous direz: Le sinus de l'angle droit AEB, est à l'hypotenuse comme le sinus de l'angle A, est au coté opposé BE, & ce côté étant alors connu, vous connoitrez aisément le troisiéme AE (*n.* 393.), après quoi retranchant AE, du côté connu AC, le reste sera la valeur de la partie EC; c'est pourquoi dans l'autre triangle rectangle BEC, les côtez BE, EC, étant connus, vous connoitrez l'hypotenuse & l'angle aigu C, ainsi qu'il a été dit ci-dessus (*n.* 394.), d'où il suit que le troisiéme angle ABC, du triangle proposé, sera aussi connu, puisqu'il est le complément des deux A, C, à deux angles droits.

## PROBLEME CXIV.

400. *Connoissant le côté AC d'un triangle obtusangle ABC, & les angles A, C, adjacens à ce côté* (Fig. 200.), *connoître les deux autres côtez.*

Comme le troisiéme angle ABC, est le complément des angles A, C, a deux droits, & qu'il est par conséquent connu, faites cette analogie : Le sinus de l'angle ABC, est au côté opposé AC, comme le sinus de l'angle A, est au côté opposé BC. De même pour trouver le côté AB, dites : Le sinus de l'angle ABC, est au côté opposé AC, comme le sinus de l'angle C, est au côté opposé AB.

## PROBLEME CXV.

401. *Connoissant le côté AC, & deux angles A, ABC, dont l'un n'est pas adjacent au côté AC, connoître les deux autres côtez AB, BC* (Fig. 200.).

Faites cette analogie : Le sinus de l'angle ABC, est au côté opposé AC, comme le sinus de l'angle A, est au côté opposé BC, & pour connoître le côté AB, dites : Le sinus de l'angle A, est au côté opposé BC, comme le sinus de l'angle C, qui est le complément des deux autres angles à deux droits, est au côté opposé AB.

## REMARQUE.

402. Pour abreger le calcul dans ces analogies, on se sert des *logarithmes*, c'est-à-dire, de certains nombres qu'on met à la place des sinus, ou des tangentes, & par le moyen desquels on fait par la simple addition, soustraction, & division, ce qu'on est obligé de faire ici par la multiplication, la division, & l'extraction des racines, qui sont des operations beaucoup plus difficiles. Ces nombres se trouvent dans les Tables, où on ne les a calculés que pour les sinus & les tangentes, à cause qu'on peut aisément se passer des secantes dans les calculs Trigonometriques : mais comme j'en ai parlé fort au long dans mon Arithmetique des Géometres, où j'ai expliqué leur formation, leurs proprietés & l'usage qu'on en peut faire, j'y renvoye le Lecteur pour ne pas charger cet ouvrage de ce que j'ai déja dit ailleurs.

Au reste, de tous les Livres où l'on trouve les Tables des sinus, il n'y en a point de plus commode que celui de Monsieur

Ozanam, qui se vend chez Jombert, Libraire ruë Saint Jacques à Paris, à cause qu'on y trouve non-seulement les sinus, tangentes, secantes, & leurs logarithmes, mais encore une Table de logarithmes pour les nombres naturels 1. 2. 3. 4. &c. jusqu'à 10000. avec une explication qui apprend à continuer cette Table si loin que l'on voudra, ce qui est souvent d'un grand secours.

## SECTION XIII.

### *De la Longimetrie.*

#### DEFINITION LXIII.

403. La Longimetrie apprend à mesurer sur le terrein les longueurs ou les lignes droites, soit que ces longueurs soient *accessibles*, c'est-à-dire qu'on puisse en approcher, soit qu'elles soient *inaccessibles* en tout ou en partie, soit qu'elles soient *horisontales*, ou couchées sur le terrein, soit qu'elles soient *verticales* ou perpendiculaires sur la terre, soit enfin qu'elles soient *inclinées*, ou qu'elles fassent avec le terrein un angle obtus d'une part, & aigu de l'autre, & cette mesure peut se faire ou par le calcul, ou sans calcul, ainsi qu'on verra ci-dessous.

#### DEFINITION LXIV.

404. On appelle *graphometre* un grand demi-cercle de cuivre ou de laiton ABC (*Fig.* 201.), sur le bord duquel sont marqués les degrez de A en C, & de C en A, de même que dans le demi-cercle ou rapporteur, dont nous avons parlé (*n.* 126.). Au centre O de cet instrument est attachée une regle HD, faites comme on voit dans la figure, & dont la ligne RS, s'appelle *ligne de foy*, parce qu'à ses extrêmitez R, S, on éleve perpendiculairement deux petites plaques de cuivre nommées *pinules*, qui ont chacune un petit trou immédiatement au-dessus de la ligne RS, à travers lesquels on vise les objets, ce qui sert à prendre la quantité des angles, comme nous dirons dans la suite. Sous ce graphometre on attache un *genoüil* de cuivre, pour pouvoir le tourner à son gré, & au bas du genoüil est un tuyau dans lequel on enchasse un bâton, qui en a trois autres petits vers son autre extrêmité, lesquels se meuvent autour d'un point fixe, & servent non-seulement à tenir le graphometre élevé sur le terrein, mais encore à le hausser ou le baisser selon le besoin.

DEFIN;

## DEFINITION LXV.

405. On se sert pour mesurer les angles sur la terre d'un *recipiangle* (*Fig.* 202.), c'est-à-dire d'un instrument composé de deux regles AB, AC, qui tournent autour d'un point fixe A, par le moyen d'une charniere. Dans l'épaisseur de l'une de ces regles, on enchasse par son extrêmité une lame de cuivre faite en quart de cercle, & sur laquelle sont marqués les degrez, & l'épaisseur de l'autre regle, est percée par un trou à jour dans lequel cette lame passe, de sorte qu'en ouvrant ou en fermant la regle AC, son extrêmité interieure marque sur la lame le nombre de degrez compris entre les deux regles.

## PROBLEME CXVI.

406. *Mesurer sur le terrein une ligne AB* (Fig. 203.), *qui n'est accessible que par ses extrêmités A, B.*

Premierement, si le terrein est uni, & qu'on puisse s'étendre de tous côtez, prenez un point C dans la campagne, d'où vous puissiez voir les extrêmitez A, B, & tirez les lignes AC, BC, que vous prolongerez en E & D, jusqu'à ce que CE soit égal à AC, & CD égal à CB; ensuite tirant la ligne DE, vous aurez deux triangles ACB, DCE, égaux & équiangles, puisqu'ils ont deux côtez égaux chacun à chacun, & l'angle compris DCE, égal à l'angle compris ACB, ces angles étant opposés au sommet, ainsi le troisiéme côté DE, sera égal au troisiéme côté AB, & par consequent mesurant la ligne DE, sa valeur sera la valeur de AB qu'on demande.

En second lieu, si vous n'avez pas assez d'étenduë pour faire CE, égal à CA, faites CI, égal au tiers ou au quart, &c. de CA, & CH, égal au tiers ou quart, &c. de CB, & la ligne HI, que vous tirerez, sera aussi le tiers ou le quart, &c. de la ligne AB demandée; car les triangles ACB, HCI, ayant deux côtez AC, CB proportionnels aux deux côtez CI, CH, & l'angle compris ACE, égal à l'angle compris ECD, sont semblables.

En troisiéme lieu, si vous ne pouvez pas absolument prolonger les lignes AC, BC, ouvrez le recipiangle, de sorte que son sommet tombe sur le sommet C de l'angle ACB, & que l'une de ses regles soit le long de la ligne AC, que vous aurez tracé sur la terre, & l'autre le long de la ligne BC, puis comptez le nombre de degrez que l'arc XZ, de la lame de cuivre contient, & ce nom-

bre sera la mesure de l'angle ACB. Cela fait, prolongez la ligne AB en M, en cherchant un point M dans la campagne, qui soit en ligne droite avec les points A, B, ainsi que nous avons déja enseigné (*n.* 33.), & mesurant l'angle MBC, avec le recipiangle, le complément de cet angle à deux droits, sera la valeur de l'angle ABC; c'est pourquoi connoissant dans le triangle ACB, deux côtez AC, CB, & deux angles ACB, CBA, vous direz: Comme le sinus de l'angle CBA, est au côté opposé AC, ainsi le sinus de l'angle ACB, est au côté opposé AB qu'on demande.

Si vous ne voulez pas employer la Trigonometrie, construisez une échelle sur le papier (*n.* 314.), puis faisant sur ce même papier avec le rapporteur un angle égal à l'angle ACB. Donnez aux jambes AC, CB, autant de toises de votre échelle, que ces lignes comprennent de toises sur le terrein, & tirez la ligne AB, laquelle étant portée sur l'échelle, le nombre de toises qu'elle comprendra, marquera celui que contient la ligne AB que l'on cherche. Car les toises de l'échelle étant égales entr'elles, de même que celles qui sont sur le terrein, les unes sont proportionnelles aux autres, & comme les lignes AC, CB, sur le papier, contiennent autant des unes que les lignes AC, CB, du terrein, contiennent des autres, & que l'angle ACB, est égal de part & d'autre, il s'ensuit que le triangle ACB, sur le terrein, est semblable au triangle ACB, sur le papier, & que par conséquent la ligne AB, qu'on cherche, contient autant de toises que la ligne AB, en contient sur le papier.

En quatrieme lieu, si le terrein est extrêmement inégal, & qu'on ne puisse se servir d'aucune des manieres précedentes, on prendra un point C dans la campagne (*Fig.* 204.), où l'on mettra le graphometre, en sorte que son pied soit à plomb sur le terrein, ce qu'on connoîtra par le moyen d'une balle de plomb suspendue à un long fil; car si en tenant cette balle suspenduë, le bâton suit la direction du fil, il sera perpendiculaire sur le terrein. Cela fait, on tournera la partie circulaire vers la ligne AB, qu'on veut mesurer, & on le haussera ou baissera par le moyen du genoüil, jusqu'à ce qu'on ait trouvé une situation dans laquelle tournant l'alidade autour du centre, on puisse viser aux points A, B de la ligne A, B; alors laissant le graphometre toujours dans la même situation, on mettra l'alidade dans la direction du diametre, & visant à travers les pinnules, on fera planter un piquet dans la direction du rayon

visuel à une distance raisonnable, ayant soin d'observer le point E de ce piquet, où le rayon visuel va aboutir; ensuite visant en A, & puis en B, on écrira la grandeur des angles AFE, BFE, marqués sur le graphometre par les arcs *ab*, *cb*, de-là on transportera l'instrument à la place du piquet DE, sans toucher à sa situation, & le posant en sorte que sa hauteur réponde précisément au point marqué E, on mettra le diametre dans la direction de la ligne F, E, & visant aux points A, B, on prendra la valeur des angles BEF, AEF, après quoi l'on mesurera la ligne FE.

Toutes ces préparations étant faites, la base FE, du triangle FAE, & les angles AFE, AEF, sur cette base étant connus, on connoîtra aisément le côté AE. De même la base FE, du triangle BFE, & les deux angles BFE, BEF, étant connus, le côté BE, sera facilement connu; ainsi dans le triangle AEB, vous connoîtrez les côtez AE, EB, & l'angle compris AEB, puisqu'il est la difference des angles connus BEF, AEF, & par conséquent vous connoîtrez aussi le côté cherché AB, par l'une des deux manieres que nous avons enseignée (*n.* 398, 399.).

Que si vous ne voulez pas employer la Trigonometrie, vous ferez une échelle, puis rapportant sur le papier par le moyen de l'échelle & du rapporteur, le côté FE, & les angles que nous avons mesurés, les jambes de ces angles venant à s'entrecouper, formeront les triangles FAE, FBE, dont vous joindrez les sommets par la ligne AB, laquelle étant portée sur l'échelle, vous fera connoître le nombre de toises de la ligne qu'on cherche. Cela n'a pas besoin de démonstration, étant évident que les triangles faits sur le papier, seront semblables à ceux que les angles visuels formeront.

Mais ce qui demande une grande attention dans cette pratique, c'est de bien observer tout ce que nous avons dit. Car si en transportant le graphometre à la place du piquet DE, il se trouvoit plus haut, ou plus bas que le point E, marqué par le rayon visuel FE, il est évident que visant en B, le rayon EB, tomberoit ou en-dessus ou en-dessous de FE, & ne pourroit plus faire un angle: de même si on inclinoit plus ou moins le demi-cercle par le moyen du genoüil, la ligne EB, pancheroit plus ou moins vers la terre que la ligne FB, & par conséquent ces deux lignes ne pourroient plus faire un angle en B, au lieu que faisant, comme nous avons dit, c'est la même chose que si on faisoit glisser le

graphometre de F en E, le long de la ligne FE, en gardant toujours sa même inclination, auquel cas il est visible que ce graphometre formeroit une surface plane, & comme les commencemens des lignes FA, FB, EA, EB, seroient sur cette surface, elles ne changeroient pas de direction, puisqu'elles sont droites, & qu'ainsi si l'on concevoit une surface plane, étenduë entre les points A, B, E, F, les lignes FA, FB, EA, EB, seroient étenduës sur cette surface, & ne manqueroient pas de faire des angles en venant à se rencontrer.

Il faut encore observer que lorsque le terrein est extrêmement inégal, la hauteur CF, ne se trouve pas toujours égale à la hauteur DE, de façon que la ligne CD, n'étant pas parallele à la ligne EF, ne lui est pas par conséquent égale; & comme alors il n'est pas possible de mesurer la ligne FE, par le moyen d'une corde, à cause qu'une corde dès qu'elle n'est pas soutenuë dans tous ses points, forme une ligne courbe, quelque effort que l'on fasse pour la tendre, il faut dans ce cas mettre le demi-cercle verticalement ou à plomb, & visant au point E, mesurer l'angle EFD; puis mesurer aussi l'angle FED, après quoi connoissant dans le triangle FED, le côté ED, & deux angles, on connoîtra aisément le côté FE.

## PROBLEME CXVII.

407. *Mesurer une ligne AB* (Fig. 205.), *qui n'est accessible que par l'une de ses extrêmitez A.*

Prenez dans la campagne un point C, qui soit en ligne droite avec les points B, A, de la ligne AB, & un autre point D, qui ne soit pas en ligne droite, & tirez les lignes CD, DB; cette derniere ne pourra être tirée toute entiere, puisqu'on suppose qu'on ne peut approcher du point B; mais il suffit d'en avoir une partie, comme par exemple DR, que vous trouverez en prenant un point R, qui soit en ligne droite avec les points D, B; cela fait, vous aurez un triangle CDB, duquel mesurant la ligne CD, & les angles BCD, BDC, vous connoîtrez aisément le côté CB, par la Trigonometrie, ou en rapportant les lignes & les angles sur le papier par le moyen d'une échelle & du rapporteur; & ce côté étant connu, si vous en retranchez la partie CA, le reste sera la valeur de la ligne cherchée AB.

Cette pratique n'est bonne que lorsqu'on peut prendre les angles sur le terrein même avec le recipiangle; mais lorsqu'on est

obligé de se servir du graphometre: comme en ce cas l'instrument se trouve élevé sur le terrein, le rayon visuel OB, n'est plus en ligne droite avec la ligne AB, & par conséquent on n'en peut rien tirer; c'est pourquoi il faut alors choisir deux points C, D (*Fig.* 206.), qui ne soient ni l'un ni l'autre en ligne droite avec AB, puis de chacun de ces points visant aux points A, B, en se servant du graphometre avec les précautions dont nous avons parlé dans le Probleme précedent, & mesurant les angles faits sur la base CD, & la longueur de cette base, on trouvera aisément soit par la Trigonometrie, soit par le moyen d'une échelle sur le papier, le côté AD, du triangle CDA, & le côté BD, du triangle CBD, & ces deux côtez étant connus, de même que l'angle BDA, le troisiéme côté BA, du triangle BDA, se trouvera facilement.

## PROBLEME CXVIII.

408. *Tirer par un point donné sur le terrein une ligne parallele à une autre ligne AC, soit qu'elle soit accessible, ou qu'elle ne le soit pas.*

Lorsqu'on n'a besoin que d'un seul point de station pour trouver la valeur de la ligne AB (*Fig.* 203.), prenez le point donné C, pour le point de station, puis cherchant l'angle CAB, comme il a été enseigné, faites au point C, un angle ACR, égal à l'angle CAB, & la ligne CR sera parallele à la ligne AB, puisque les angles alternes sont égaux.

Que si on a besoin de deux points de station pour trouver la ligne AB, prenez le point donné C (*Fig.* 206.), pour l'un de ces points, puis cherchant l'angle CBA, faites l'angle BCR, égal à CBA, & CR sera parallele à AB, & ainsi des autres.

## PROBLEME CIX.

409. *Mesurer une ligne inaccessible AB* (Fig. 207.), *dans le cas où il n'est pas possible de trouver deux points C, D, de chacun desquels on puisse voir les deux extrêmités A, B.*

Soient les points de station C, D, en sorte que de C, on ne puisse voir que le point A, & de D, on ne puisse voir que le point B. Mesurez la distance CD, puis prenez du côté de C, un autre point R, duquel vous puissiez voir le point A, & ayant pris la grandeur CR, & la quantité des angles ARC, ACR, vous connoîtrez aisément dans le triangle ACR, le côté AC. Ainsi concevant le rayon visuel AD, vous aurez dans le triangle ACD, les deux côtez AC, CD, connus, & l'angle compris ACD, aussi

connu, rien n'empêchant de le mesurer; donc il vous sera facile de connoître le rayon visuel AD, & l'angle ADC. Cela fait, vous prendrez du côté de D, un autre point O, d'où vous puissiez voir le point B, & mesurant la ligne DO, & les angles BDO, BOD, vous connoîtrez sans peine dans le triangle BDO, le côté BD. Ainsi dans le triangle ADB, les côtez AD, DB, étant connus, & l'angle ADB aussi, puisqu'il est la difference de l'angle CDB, qu'on peut mesurer, & de l'angle CDA, que vous aurez connu, comme je viens de dire, le côté AB, se trouvera facilement.

## PROBLEME CXX.

410. *Mesurer la hauteur AB, d une ligne perpendiculaire sur le terrein* (Fig. 208.).

Prenez dans la campagne un point R, où vous poserez le graphometre, en sorte que le plan du demi-cercle soit perpendiculaire sur le terrein, & que le diametre soit horizontal; ce que vous connoîtrez en laissant pendre un à plomb à l'extrêmité du diametre; puis mettant la jambe d'une équerre à angles droits le long de ce même diametre; car si l'autre jambe suit la direction de l'aplomb, le diametre sera horisontal. Cela fait, prenez la grandeur de l'angle AHO, puis laissant le graphometre dans sa situation, transportez-le à un autre point S, qui soit en ligne droite avec les points H, O, & prenant la grandeur de l'angle AXH, mesurez la distance XH; cela fait, vous connoîtrez dans le triangle AXH, la base XH, l'angle AXH, & l'angle AHX, puisqu'il est le complément de l'angle AHO à deux droits; ainsi vous connoîtrez sans peine le côté HA, soit par la Trigonometrie, soit par le moyen d'une échelle & du rapporteur, & ce côté étant connu, vous connoîtrez aussi dans le triangle rectangle AHO, l'hypotenuse AH, & l'angle aigu AHO; d'où il vous sera aisé de connoître le côté AO, auquel côté ajoûtant la hauteur HR, égale à la hauteur OB, vous aurez la valeur de la ligne entiere AB.

Si quelque chose empêche que la seconde station soit en ligne droite avec les points H, O, prenez deux points C, D (*Fig 209.*), dans la campagne, à l'un desquels vous planterez un piquet de la hauteur du graphometre, & portant l'instrument à l'autre, vous le situerez de façon que le diametre soit dans la direction de la ligne CD, & que vous puissiez, en tournant l'alidade, voir le point A, & vous mesurerez l'angle ADC, puis vous mettrez un piquet

de la hauteur du graphometre à cette ſtation, & tranſportant l'inſtrument en C, vous mettrez le diametre dans la direction de la ligne CD, & viſant en A, vous prendrez l'angle ACD; ainſi meſurant la diſtance CD, vous connoîtrez dans le triangle CAD, la baſe CD, & les deux angles à la baſe: c'eſt pourquoi les côtez AC, CD, vous deviendront bien-tôt connus. Cela fait, laiſſant toujours le diametre dans la direction de la ligne CD, vous pancherez le plan du demi-cercle de façon que vous puiſſiez voir le point B, & vous meſurerez l'angle BCD, vous tranſporterez enſuite l'inſtrument en D, & vous meſurerez l'angle BDC, ce qui vous donnera dans le triangle BCD, la baſe CD, & les deux angles à cette baſe connus, ainſi vous connoîtrez aiſément les côtez BC, BD, & par conſéquent vous aurez dans le triangle ABD, deux côtez AD, BD, & vous pourrez meſurer l'angle compris en inclinant le plan de l'inſtrument, de façon que vous puiſſiez en tournant l'alidade, voir les points A & B; donc vous pourrez connoître le troiſiéme côté AB, & trouver la hauteur qu'on demande.

On ſe ſervira de la même pratique pour meſurer d'un lieu élevé une ligne perpendiculaire ſur la terre, & auſſi pour meſurer une ligne inclinée ſur le terrein, comme on peut voir dans les figures 210, 211, qui n'ont pas beſoin d'une plus grande explication.

## REMARQUE.

411. Les pratiques qu'on vient d'enſeigner, ſont ſuffiſantes pour réſoudre une infinité de cas differens auſquels je ne m'arrêterai pas davantage, pour laiſſer aux commençans la ſatisfaction de les trouver eux-mêmes. J'ajoûterai ſeulement ici la maniere de trouver la hauteur & le talud d'une montagne par la méthode qu'on appelle *Cultellation*, & celle de trouver la hauteur d'une choſe qui ſeroit dans l'air ſans porter ſur la terre, comme par exemple, la hauteur d'une nuë.

## PROBLEME CXXI.

412. *Meſurer la hauteur & le talud d'une montagne* (Fig. 212.) *par* Cultellation.

Mettez le graphometre au pied de la montagne, en ſorte que le plan du demi-cercle ſoit vertical ou perpendiculaire au terrein, & ſon diametre horizontal; puis viſant le long du diametre, ob-

ſervez le point B, où le rayon viſuel aboutit, & tranſportez-y le graphometre toujours dans la même ſituation, prenant ſeulement garde de le poſer de façon qu'en tournant l'alidade, vous puiſſiez voir l'extrêmité C, d'un piquet AC, égal à la hauteur du graphometre, lequel piquet il faut mettre à la place de l'inſtrument, lorſque vous le tranſportez de A en C. Cela fait, vous viſerez le long du diametre au point D, où vous tranſporterez le graphometre, & continuant ainſi juſqu'à ce que vous ſoyiez parvenu au ſommet G, vous ajoûterez enſemble les hauteurs AC, BO, DL, EI, FH, & leur ſomme ſera égale à la hauteur GR de la montagne; meſurant de même les diſtances CB, OD, LE, IF, HG, leur ſomme ſera égale au talud AR, c'eſt-à-dire à la diſtance du point A, au pied de la perpendiculaire GR.

### DEMONSTRATION.

Concevez que les diſtances CB, OD, &c. ſoient prolongées juſqu'à ce qu'elles rencontrent la perpendiculaire GR, aux points X, V, T, P, ces lignes étant horizontales, ſeront paralleles entr'elles, & perpendiculaires à la ligne GR, & comme FH, eſt perpendiculaire à IP, de même que GP, il s'enſuit que FH, GP, ſont égales, puiſqu'elles ſont perpendiculaires entre deux paralleles. On prouvera de même que IE, eſt égal à PT, LD, égal à TV, & ainſi des autres; d'où il ſuit que toutes les hauteurs AC, BO, &c. priſes enſemble, ſont égales aux parties RX, XV, &c. & par conſéquent à toute la ligne RG.

Concevez de même que les hauteurs BO, DL, EI, &c. ſoient prolongées juſqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne horizontale AR, aux points 1, 2, 3, 4, & vous prouverez aiſément que les diſtances CB, OD, LE, &c. priſes enſemble, ſont égales aux parties AI, 12, 23, &c. priſes enſemble, & par conſéquent à la ligne entiere AR.

### REMARQUE.

413. Il faut obſerver ſoigneuſement que les points de ſtation A, B, D, &c. prennent le plus court chemin entre le pied & le ſommet de la montagne, parce qu'autrement les diſtances CB, OD, &c. n'étant plus dans un même plan, leur ſomme ſe détourneroit du droit chemin entre les points A & G, & deviendroit par conſéquent plus grande que la ligne AR. Or les points de ſtation ſeront toujours en ligne droite, en agiſſant comme nous

nous avons enseigné, parce que les lignes droites ZC, OD, ayant chacune une de leurs parties dans le plan du demi-cercle, ne s'écartent point de leur direction; & par conséquent leurs points A, O, D, sont dans un même plan : d'où il est visible qu'en faisant la même chose aux autres points de station, ils seront tous dans le plus court chemin entre le pied & le sommet.

## PROBLEME CXXII.

414. *Trouver la hauteur de l'aiguille d'un clocher élevé sur un toict* (Fig. 213.).

Prenez un point de station C, où ayant mis le graphometre de façon que le plan du demi-cercle soit vertical & le diametre horizontal, vous prendrez l'angle AER, puis ayant marqué le point R, & mis en C, un piquet, dont la hauteur soit égale à celle du graphometre, cherchez un autre point D, qui soit en ligne droite avec les points C, R, & mesurez l'angle AFR, & la distance FE, ainsi vous connoîtrez dans le triangle FEA, la base FE, & les deux angles sur la base; c'est pourquoi il vous sera facile de connoître le côté EA, & l'angle AER, qui est le complément de l'angle AEF à deux droits; concevant donc la perpendiculaire tirée du sommet A, sur la ligne ER prolongée, vous aurez un triangle rectangle dans lequel vous connoîtrez l'hypotenuse AE, & l'angle aigu AEF, & par-là vous connoîtrez la perpendiculaire tirée du sommet A, à laquelle ajoûtant la hauteur CE du graphometre, la somme sera la hauteur du point A sur le terrein. C'est de la même façon qu'on peut mesurer la hauteur d'une nuë, en prenant deux points de station fort éloignés les uns des autres.

Si on ne peut pas prendre les deux points de station d'un même côté, voici comme on fera : Soit ABCD (*Fig.* 214.), le Plan d'une Eglise sur laquelle est un Dôme R, dont on veut mesurer la hauteur, que je suppose égale à la ligne RH, laquelle doit être conçuë élevée à plomb sur le papier. On prendra d'abord un point de station X, de façon qu'en y mettant le graphometre verticalement, & le diametre horizontalement, on puisse voir le sommet H du Dôme, & alors on marquera sur la muraille le point A, où le rayon visuel le long du diametre va aboutir; on tracera sur la terre la ligne XA, à l'extrêmité de laquelle on fera un angle AXO, de 60 degrez, & prolongeant XO, jusqu'à ce qu'on puisse voir de l'extrêmité O, l'autre côté de la campagne, on

fera en O, un autre angle de 60 degrez, donc on fera la jambe OZ, égale à la jambe OX; enfin on fera en Z l'angle OZC, encore de 60 degrez, & alors si l'on conçoit les lignes XA, ZC, prolongées en-dedans de l'Eglise, elles se rencontreront & formeront une seule ligne droite XZ, par le moyen de laquelle on aura un triangle équilateral XOZ; ainsi XO étant connuë, XZ, qui lui est égal, sera connuë aussi. Prenant donc avec le graphometre l'angle AXH, & transportant ensuite l'instrument au point Z, on mettra le diametre dans la direction de la ligne ZC, & l'on prendra l'angle CZH, ce qui donnera dans le triangle XHZ, la base XZ, & les deux angles sur cette base connus; d'où il sera facile de connoître le côté HZ. Or si l'on conçoit la perpendiculaire HR, on aura le triangle rectangle HRZ, dans lequel on connoîtra l'hypotenuse HZ, & l'angle aigu RZH, & par ce moyen la hauteur HR.

Comme le graphometre est élevé sur le terrein, il est évident que la hauteur qu'on trouvera, ne sera pas la hauteur HR entiere; mais qu'il faudra y ajoûter la hauteur de l'instrument.

## SECTION XIV.

### *Du Nivellement.*

### DEFINITION LXVI.

404. Une ligne est dite *de niveau*, lorsque tous ses points sont également éloignés du centre de la terre; & comme la terre est de figure spherique, ou du moins peut être regardée comme telle, il s'ensuit qu'une ligne de niveau est une ligne courbe.

### DEFINITION LXVII.

416. Si l'on plante perpendiculairement & à plomb sur la terre un piquet AO (*Fig.* 215.), à l'extrêmité duquel on ait mis une lunette ou une alidade, 1, 5, qui lui soit perpendiculaire, & qu'on vienne à regarder à travers la lunette, ou par les pinules de l'alidade un objet éloigné D, le rayon visuel AD, étant une ligne droite, touchera la ligne de niveau ABC, au point A, à cause qu'elle est perpendiculaire à son rayon AV, & s'en éloignera ensuite d'autant plus qu'elle sera prolongée plus loin. Cependant comme cette ligne AD, nous paroît horizontale, on l'appelle

ligne de *niveau apparent*, & on la confond avec la ligne du vrai niveau AB, lorsque sa longueur AD, n'excede pas 100 ou 110 toises, parce que la circonference de la terre étant extrêmement grande à l'égard de 100 ou de 120 toises, le haussement BD, du point D, du niveau apparent au-dessus du point B, du vrai niveau est insensible; mais lorsque la ligne AB, devient plus grande, alors la difference BD, commence à se faire sentir, & l'on doit nécessairement la corriger par les voyes que nous enseignerons ci-dessous.

## DEFINITION LXVIII.

417. *Niveler* n'est donc autre chose que chercher si deux points pris sur la terre, sont également éloignés du centre de la terre, ou de combien l'un en est plus éloigné que l'autre. Ces deux points s'appellent *termes du nivellement*, & l'instrument dont on se sert, se nomme niveau.

## DEFINITION LXIX.

418. Il y a plusieurs sortes de niveaux, parmi lesquels celui qui est le plus en usage pour les coups de niveau qui ne s'étendent pas au-delà de 100 ou de 110 toises, est le niveau d'eau. Il est composé d'un tuyau de fer blanc ABCD (*Fig.* 216.), recourbé par les extrêmitez, à chacune desquelles on met un autre petit tuyau de verre, ainsi que la figure le représente. Au milieu O, est un autre petit tuyau qui lui est perpendiculaire, & dans lequel on enchasse un piquet qu'on plante perpendiculairement & à plomb sur le terrein. Quand on veut se servir de cet instrument, on le remplit d'eau, & alors la surface d'eau RS, qui paroît à travers le tuyau de verre en A, se met de niveau avec la surface d'eau TX, qui paroît en D, parce qu'on sçait par experience, que les liquides se mettent toujours dans cette situation lorsqu'ils agissent librement; ainsi si l'on met l'œil en R, le rayon visuel RX, a ses extrêmitez R, X, de niveau, & si on mire en Z, la ligne RZ, devient une ligne de *niveau apparent*.

Les autres niveaux qu'on peut employer pour les grands nivellemens, ont été inventés par Messieurs *Huguens*, *Picard*, *de la Hire*, &c. Mais comme ils sont extrêmement composez, & qu'après tout, on peut fort bien niveler par le moyen d'une simple lunette, ou d'une alidade mise perpendiculairement à l'extrêmité d'un piquet planté à plomb sur la terre, en observant ce que

nous dirons plus bas; je n'en donnerai point ici la description; pour laquelle je renvoye les Curieux au Traité du Nivellement de M. *Picard*, mis au jour par M. *de la Hire*, & à celui de M. *Bullet*.

## DEFINITION LXX.

419. Le nivellement s'appelle *simple*, lorsqu'on peut le faire d'un seul coup de niveau, & on l'appelle *composé*, lorsque les deux termes sont à une distance si grande, qu'il faut donner plusieurs coups de niveau pour achever l'operation.

## PROBLEME CXXIII.

420. *Deux points A, B, étant donnés sur la terre* (Fig. 217.); *trouver s'ils sont de niveau, ou lequel des deux s'éloigne plus du vrai niveau, & de combien.*

Mettez l'instrument au point A, & envoyez un homme au point B, où il tiendra d'une main une double toise divisée en pieds, pouces & lignes, laquelle il mettra à plomb sur la terre, & de l'autre main il aura un carton, où sera marquée une grande ligne noire, appellée *ligne de mire*, qu'il fera glisser le long de la toise, selon le signal que vous lui ferez. Alors appliquant l'œil au tuyau de verre E, précisément à l'endroit où est la surface d'eau, mirez par la surface d'eau qui est à l'autre tuyau, vers la double toise, qui doit être en ligne droite avec le niveau E, F, & lorsque l'homme qui fait glisser le carton, aura mis la ligne de mire au point I, où le rayon visuel va aboutir, faites-lui un signe afin qu'il s'arrête, & qu'il compte combien il y a de pieds, de pouces & de lignes, depuis l'endroit où est la ligne de mire, jusqu'au pied B, de la double toise; cependant vous mesurerez la hauteur RA, du rayon visuel au-dessus du point A; puis faisant approcher votre aide, vous retrancherez la hauteur IB, qu'il aura trouvée de la hauteur RA, le reste vous fera connoître de combien le point B, est plus éloigné du centre de la terre que le point A, ou de combien il est plus élevé sur l'horizon, en supposant que la distance des deux points A, B, ne soit pas au-delà de 100 ou de 110 toises, parce qu'alors la ligne EI, de niveau apparent, s'écarte si peu de la ligne du vrai niveau, quon peut regarder le point I, comme étant un point de cette ligne, ainsi que nous avons déja dit.

DEMONSTRATION.

Du point B, tirez BS, parallele au rayon visuel EI, ou RI, & concevez que les lignes RA, IB, soient prolongées jusqu'au centre de la terre, que j'appellerai O, & où elles iront se rencontrer, à cause que toutes les lignes qui sont perpendiculaires sur la circonference d'un cercle, vont aboutir au centre, comme on voit par la figure 215, & comme il est aisé de le démontrer en tirant dans la même figure 215, de l'extrêmité D, de l'une de ces perpendiculaires deux tangentes DA, DC, qui seront égales; car alors il est visible que la ligne DB, ayant un point BD également éloigné des extrêmitez de l'arc AC, sur lequel on la suppose perpendiculaire, coupera cet arc en deux parties égales au point B; d'où il suit qu'elle coupera aussi la corde en deux également; & par conséquent qu'elle ira aboutir au centre.

Cela posé, les points R, I (*Fig.* 217.), étant censés de niveau, les lignes RO, IO, seront égales; or à cause des paralleles RI, SB, la ligne IB est aussi égale à la ligne RS; donc retranchant des deux précedentes les deux RS, IB, les restes SO, BO, seront encore égaux; & si de SO, on retranche SA, le reste AO, sera plus près du centre de la terre de toute la ligne SA, qu'on lui aura retranchée; & par conséquent le point B, de la ligne BO, à laquelle on n'aura rien retranché, en sera plus éloigné d'autant.

REMARQUE.

421. Nous avons supposé que la distance des termes A, B, ne surpassoient pas 110 toises, & que la difference du point I, au vrai point de niveau, étoit nulle à cause de sa petitesse; mais si la distance devenoit plus grande, ou que demeurant la même, on voulût sçavoir au juste la difference du point de niveau apparent au vrai point de niveau, on agiroit comme nous allons dire dans le Problême suivant.

PROBLEME CXXIV.

422. *Corriger le défaut du niveau apparent* (Fig. 217.).

Supposons que la distance RI, soit de 500 toises, & qu'elle soit représentée par la tangente AB (*Fig.* 218.), l'arc AD représentera la ligne du vrai niveau, & la partie BD, de la secante BO, marquera le haussement du niveau apparent par-dessus le vrai. Pour trouver donc ce haussement, faites le quarré de la ligne AO,

c'eſt-à-dire du demi-diametre de la terre, & le quarré de la ligne AB, & ajoûtant enſemble ces deux quarrez, tirez la racine quarrée de leur ſomme, cè qui vous donnera la valeur de la ligne OB, à cauſe que le triangle OAB, eſt reſtangle. Retranchant donc de la valeur de OB celle de OD, qui eſt encore le demi-diametre de la terre, le reſte ſera la valeur de BD, ou du hauſſement du niveau apparent ſur le vrai niveau.

Le diametre de la terre, ſelon Meſſieurs Picard, & de la Hire, eſt de 653894 toiſes; & par conſéquent le demi-diametre eſt de 326947. Mais avant de faire le calcul, il faut réduire ce demi-diametre, & la tangente AB en lignes, afin de pouvoir négliger ce qui reſtera de l'extraction de la racine quarrée, ſuppoſé qu'il reſte quelque choſe; après quoi faiſant l'operation, vous trouverez 9 lignes pour le hauſſement DB, du niveau apparent ſur le vrai.

Quoique la méthode ſuivante ſoit moins géometrique que celle que nous venons de donner, elle doit cependant lui être préferée à cauſe d'un principe général qu'on en tire pour les differentes diſtances qui peuvent ſe trouver entre les deux termes du nivellement.

*Autre maniere.*

Prolongez par penſée la ligne BO, juſqu'à ce qu'elle rencontre la ſurface de la terre en un autre point I, & vous aurez $\overline{AB}^2 = BI \times BD$ (*n.* 282.), d'où vous tirerez :: BI. AB. BD; & comme la partie BD, de la ligne BI, eſt ſi petite à l'égard du diametre de la terre DI, qu'on peut la regarder pour rien, ſi vous mettez DI au lieu de BI, vous aurez :: DI. AB. BD; cherchant donc par la regle de trois la troiſiéme proportionnelle aux deux lignes connuës DI, AB, c'eſt-à-dire, faiſant le quarré de AB, & le diviſant par DI, vous aurez la valeur de BD, qui ſera de 9 lignes, comme ci-deſſus.

COROLLAIRE I.

423. Il ſuit de-là que ſi l'on a pluſieurs points de niveau apparent B, C, &c. les hauſſemens de ces points au-deſſus des points du vrai niveau, ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diſtances AB, AC, &c. car le hauſſement BD, eſt égal au quarré $\overline{AB}^2$,

divisé par le diametre de la terre, & le haussement EC, est égal au quarré $\overline{AC}^2$, divisé par le même diametre; or le diviseur est le même de part & d'autre; donc les quotiens, c'est-à-dire les haussemens DB, EC, sont encore entr'eux comme les nombres à diviser $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$ (*n.* 250.), c'est-à-dire, comme les quarrez des distances AB, AC.

## COROLLAIRE II.

424. Connoissant donc le haussement DB, d'un point B, de niveau apparent, on peut connoître le haussement de tout autre point C, pourvû qu'on connoisse sa distance AC; car si l'on cherche par la regle de trois une quatriéme proportionnelle à $\overline{AB}^2$. $\overline{AC}^2$, BD cette quatriéme proportionnelle sera la valeur de CE, haussement du point C, sur le point du vrai niveau. C'est en suivant cette méthode que Monsieur Picard a calculé les haussemens des points du niveau apparent au-dessus du vrai, depuis la distance de 50 toises jusqu'à celle de 4000, comme on voit dans la Table suivante, où la premiere colonne perpendiculaire à gauche, marque les distances des points de niveau apparent, & les trois autres marquent leurs haussemens en pieds, pouces & lignes.

*Table des Haussemens du Niveau apparent par-dessus le vrai, depuis la distance de 50 toises, jusqu'à celle de 4000.*

| Distance. | Haussemens. | | |
|---|---|---|---|
| Toises. | pieds. | pouces. | lignes. |
| 50 | 0 | 0 | 0 $\frac{1}{3}$ |
| 100 | 0 | 0 | 1 $\frac{1}{3}$ |
| 150 | 0 | 0 | 3 |
| 200 | 0 | 0 | 5 $\frac{1}{3}$ |
| 250 | 0 | 0 | 8 $\frac{1}{3}$ |
| 300 | 0 | 1 | 0 |
| 350 | 0 | 1 | 4 $\frac{1}{3}$ |
| 400 | 0 | 1 | 9 $\frac{1}{3}$ |
| 450 | 0 | 2 | 3 |
| 500 | 0 | 2 | 9 |
| 550 | 0 | 3 | 6 |
| 600 | 0 | 4 | 0 |
| 650 | 0 | 4 | 8 |
| 700 | 0 | 5 | 4 |

| Distance. | Haussemens. | | |
|---|---|---|---|
| Toises. | pieds. | pouces. | lignes. |
| 750 | 0 | 6 | 3 |
| 800 | 0 | 7 | 1 |
| 850 | 0 | 7 | 11 $\frac{1}{2}$ |
| 900 | 0 | 8 | 11 |
| 950 | 0 | 10 | 0 |
| 1000 | 0 | 11 | 0 |
| 1250 | 1 | 5 | 2 $\frac{1}{2}$ |
| 1500 | 2 | 0 | 9 |
| 1750 | 2 | 9 | 8 $\frac{1}{2}$ |
| 2000 | 3 | 8 | 0 |
| 2500 | 5 | 8 | 9 |
| 3000 | 8 | 3 | 0 |
| 3500 | 11 | 2 | 9 |
| 4000 | 14 | 8 | 0 |

## PROBLEME CXXV.

425. *Trouver si deux points A, B, pris sur la terre* (Fig. 219.); *sont de niveau, ou lequel des deux est plus élevé que l'autre, sans connoître leur distance, & sans avoir recours au calcul, ni à la Table précédente, pour corriger le défaut du niveau apparent.*

On peut employer pour cela deux differentes méthodes, qui ont chacune leur utilité; l'une pouvant servir dans des occasions où l'autre ne pourroit se pratiquer.

### *Premiere Méthode.*

Envoyez votre aide au point B, avec sa double toise & son carton, & mettant le niveau au point A, où vous mirerez vers B, faites le signal accoûtumé, afin que votre aide écrive la hauteur de la ligne de mire sur le point B; puis transportant l'instrument en B, tandis que l'aide viendra en A, mirez de B en A, & quand votre aide averti par le signal que vous lui ferez, aura écrit la hauteur de la ligne de mire sur le point A, retournez vers lui, & comparez ensemble les deux hauteurs trouvées. Si l'une & l'autre se trouvent au-dessus du niveau & à égale distance; c'est-à-dire, si après avoir retranché de chacune de ces hauteurs la hauteur du niveau, les restes sont égaux, les deux points A, B, seront de niveau; mais si les restes sont inégaux, retranchez le petit du grand, & la moitié de ce qui restera, marquera de combien l'un des points A, B, est plus élevé que l'autre; enfin si la hauteur de la ligne de mire d'un côté est au-dessus du niveau, & celle de l'autre côté est au-dessous, ajoûtez ensemble l'excès de l'une & le défaut de l'autre, & la moitié de la somme marquera de même la hauteur de l'un des points sur l'autre.

### DEMONSTRATION.

Supposons d'abord que les deux points A, B (*Fig.* 221.); soient de niveau, la hauteur du niveau étant la même de part & d'autre, les lignes CA, DB, seront égales, & par conséquent les points C, D, seront aussi de niveau; or la distance CD, étant égale à la distance DC, si l'on vient à mirer de C en D, puis de D en C, le haussement du niveau apparent sur le vrai, sera égal de l'un & l'autre côté. Ainsi EC sera égal à FD, & par conséquent les deux points E, F, seront aussi de niveau; & comme cela arrivera toujours toutes les fois que les points A, B, seront de

de niveau, il s'ensuit que toutes les fois qu'après avoir retranché des hauteurs EA, FB, des lignes de mire, les hauteurs CA, DB, c'est-à-dire la hauteur du niveau, les restes EC, FD, se trouvent égaux, les points A, B, sont parfaitement de niveau.

Supposons présentement qu'après avoir trouvé (*Fig.* 223.), que les hauteurs EC, FD, des lignes de mire par-dessus le niveau, étoient chacune de 6 pouces, le point A vienne à s'élever de trois pouces, il est sûr qu'afin que le point B fût encore de niveau avec le point A, il faudroit qu'il s'élevât aussi de trois pouces; si donc je fais voir qu'en retranchant la hauteur EL, du point de niveau apparent sur l'instrument L de la hauteur HD du point de niveau apparent H sur l'instrument D, le reste sera 3 pouces, le Probleme aura prescrit ce qu'il faut faire. Or il est visible que le point A, venant à s'élever de 3 pouces, le niveau qui étoit en C, s'éleve aussi de trois pouces en L, & que si l'on mire du point L, le rayon visuel LH, sera égal & parallele au rayon visuel CF; d'où il suit que HF, sera égal à LC; ainsi HD, sera de 9 pouces, puisque HF en vaut trois, & FD en vaut 6; ôtant donc de 9 pouces, la valeur de LC, qui en vaut 3, le reste sera 6, dont la moitié est effectivement 3, ce qui marque que le point A, est élevé de 3 pouces au-dessus de B.

Enfin supposant de même qu'ayant trouvé (*Fig.* 222.), que les hauteurs EC, FD, des points de niveau apparent E, F, étoient chacune de 6 pouces, le point A, vint à s'élever de deux pieds, le niveau qui étoit en C, s'éleveroit aussi de deux pieds en L, de sorte que la distance EL, seroit d'un pied 6 pouces, & le rayon visuel LH, étant égal & parallele au rayon visuel CF, HF, seroit égal à LC, & vaudroit par conséquent deux pieds, de façon que HD, vaudroit 2 pieds 6 pouces. Ajoûtant donc ensemble la hauteur HD, du point H, sur le niveau, & le baissement LE du point E, au-dessous du niveau, la somme seroit 4 pieds, dont la moitié 2 marqueroit que le point A, seroit élevé de deux pieds au-dessus de B, puisqu'il est visible qu'il faudroit élever B de 2 pieds, pour le mettre de niveau avec A, comme il étoit auparavant. Cette méthode est de l'invention de Monsieur Parent, & pour servir dans les cas où il se trouve une profondeur entre les deux termes qui empêche quon ne puisse employer la méthode suivante.

*Seconde Méthode.*

Soient les termes A, B (*Fig.* 220.), qu'il faut niveler, prenez

le point C entre ces deux points, & également éloigné de chacun d'eux; & y mettant le niveau, mirez d'abord de R en E, où votre aide marquera la hauteur EB du point de mire, puis faisant passer l'aide en A, mirez de S en D, où il marquera aussi la hauteur DA. Cela fait, vous retrancherez la hauteur EB, de la hauteur DA, & le reste marquera de combien le point B est élevé au-dessus du point A.

DEMONSTRATION.

Puisque la distance CA, est égale à la distance CB, le haussement du point E, du niveau apparent SE, au-dessus du vrai, est égal au haussement du point D, du niveau apparent RD; ainsi ces deux points sont de niveau: si donc du point B, on tire BI, parallele à DE, les points B, I, étant également éloignés des points ED, seront aussi de niveau, & par conséquent le reste IA, de la hauteur DA, se trouvant au-dessous, marquera de combien le point B, est au-dessus du point A.

Cette méthode de niveler est la plus commode de toutes à cause de sa brieveté, non-seulement dans le nivellement simple, mais encore dans le composé, comme nous allons voir dans les deux Problemes suivans.

PROBLEME CXXVI.

426. *Niveler deux termes A, B* (Fig. 224.), *qui sont extrêmement éloignés.*

Soit la distance AB, de 850 toises. Comme il arrive souvent dans ces grandes distances que l'un des termes B, est trop élevé au-dessus de A, pour qu'on puisse faire l'operation d'un seul coup de niveau, & que d'ailleurs le niveau d'eau, dont l'usage est le plus ordinaire, ne peut guere servir que pour des distances de 100 ou de 110 toises, à cause qu'on a peine à distinguer la ligne de mire sans lunettes d'approche, lorsqu'elle se trouve plus éloignée, il faut d'abord diviser 850 par 200, & le quotient 4, faisant voir qu'on peut partager cette distance en quatre parties égales, qui auront 212 toises & demi chacune, prenez 212 toises $\frac{1}{2}$ de A en D, & mettant le niveau au point du milieu C, envoyez un aide en A, & un autre en D, puis mirant de C en A, & de C en D, l'aide qui sera en A, écrira la hauteur AQ de la ligne de mire, & celui qui sera en D, se contentera de marquer le point I, avec un crayon, & restera à sa place. Cela fait, l'aide qui étoit en A, se transportera au point E, éloigné de 212 toises $\frac{1}{2}$ du point D, & vous mettant au point de milieu Z, vous

mirerez de Z en D, & de Z en E, alors l'aide qui est en D, écrira la hauteur GI, & celui qui est en E, marquera avec un crayon le point O. Faisant la même chose à l'égard des deux autres stations P, V, & les aides ayant écrit les hauteurs HO, RS, vous ajoûterez ensemble les hauteurs trouvées AQ, GI, OH, SR, & retranchant de leur somme la hauteur TB, le reste marquera la hauteur du point B, sur le point A.

DEMONSTRATION.

Les points Q, I, étant de niveau, la hauteur QA, qui marque l'élevation du point Q, sur le point A, marquera aussi l'élevation du point I, sur le point A; par la même raison la hauteur GI, marquera l'élevation du point O, sur le point I, de même que HO, marquera l'élevation de S sur O, & RS celle de T sur S; d'où il suit que l'élevation de T sur A, sera composée des élevations AQ, GI, HO, RS; or le point T, est plus haut que le point B, de la hauteur TB; donc si de l'élevation AQ+GI+HO +RS, on retranche la hauteur TB, le reste sera l'élevation du point B, sur le point A.

PROBLEME CXXVII.

427. *Niveler deux termes A, B, entre lesquels il se trouve des hauteurs & des profondeurs* (Fig. 225.).

Avant de faire l'operation, il faut marquer sur un papier deux colonnes, dans la premiere desquelles vous écrirez les hauteurs que vous trouverez en montant, & dans la seconde celles que vous trouverez en descendant; après quoi vous placerez un aide en A, & l'autre ira au point D, à la distance de 200 ou de 210 toises, si cela se peut, c'est-à-dire, si le niveau étant placé au milieu C de cette distance, le point D se trouve plus bas que la hauteur du niveau; car si ce point se trouvoit plus haut, il faudroit prendre une distance plus petite. Le niveau étant donc en C, vous mirerez de C en A, & de C en D, après quoi vous écrirez la hauteur *a*A à la premiere colonne, & l'aide qui est en D, marquera sur sa double toise le point *d*. Alors l'aide qui étoit en A, se transportera en F, & vous mettrez le niveau au milieu E, de la distance DF, où vous mirerez de E en D, & de E en F, écrivant la hauteur *hd* à la premiere colonne, & faisant marquer le point *e*, sur la double toise avec un crayon; vous trouverez de la même façon la hauteur *fe*, que vous écrirez à la premiere colonne.

Maintenant pour trouver les hauteurs en descendant de H en M, vous prendrez des distances comme vous aurez fait en mon-

tant, & mettant le niveau entre ces distances, vous écrirez à la seconde colonne les hauteurs *io*, *rs*, *tu*; mais vous n'écrirez pas la hauteur du niveau qui est en M, parce qu'il faudroit l'écrire aussi à la premiere colonne en allant de M en N. Vous ferez les mêmes operations en montant de M en N, & en descendant de N, où vous écrirez à la seconde colonne la hauteur 5B.

Le nivellement étant fini, vous ferez une somme de toutes les hauteurs que vous aurez écrites à la premiere colonne, & une autre de toutes celles que vous aurez écrites à la seconde, puis retranchant la moindre de la plus grande, le reste marquera la hauteur du point A, par-dessus le point B.

Supposant donc que les hauteurs de la premiere & de la seconde colonne, soient telles que nous les avons marquées dans la Table ci-jointe, la somme de la premiere sera 12 pieds 4 pouces, & celle de la seconde sera 19 pieds; c'est pourquoi retranchant 12 pieds 4 pouces de 19 pieds, le reste 6 pieds 8 pouces marquera la hauteur du point A au-dessus du point B.

| Colomne des hauteurs en montant. | | | Colomne des hauteurs en descendant. | |
|---|---|---|---|---|
| *aA* | 3 p. | 6 p. | *io* | 2 pieds. |
| *hd* | 3 | 3 | *rs* | 3 |
| *fe* | 2 | 7 | *tu* | 3 |
| *xz* | 3 | | 12 | 2 |
| | | | 34 | 4 |
| | | | 5B | 5 |
| | 12 p. | 4 p. | | 19 pieds. |
| | | | | 12 p. 4 pouc. |
| | | | | 6 8 |

## REMARQUE.

428. Il faut observer 1°. que si en prenant les distances on ne peut pas mettre le niveau précisément au milieu de ces distances, il ne faut pas s'en embarasser, pourvû qu'on tâche d'en approcher autant qu'il se pourra, parce que les coups de niveau portés de part & d'autre, étant toujours ou moindres de 100 toises, ou tout au plus égaux, les haussemens du niveau apparent ne sont pas sensibles. 2°. Que si lorsqu'on nivele en montant, la montée se trouve si rude qu'il faille donner des coups de niveau trop près les uns des autres, il faut alors se transporter au sommet de la hauteur, & faire le nivellement en descendant de part & d'autre, ce qui abrege beaucoup.

*Fin de la premiere Partie.*

# LA THEORIE ET LA PRATIQUE DU GEOMETRE.

## SECONDE PARTIE.

*Des proprietés des Surfaces planes.*

### SECTION I.

*De la* Planimetrie, *ou mesure des surfaces.*

DEFINITION I.

1. DE toutes les mesures que l'on employe pour mesurer l'étenduë, la *toise* est celle qui est la plus en usage en France. Il y en a de trois sortes, qui répondent aux trois dimensions du corps; longueur, largeur & profondeur. La premiere, que l'on appelle *toise courante*, & qui sert pour la mesure des lignes, est une longueur divisée en six

parties égales, qu'on nomme *pieds*, & qu'on conçoit comme n'ayant point de largeur; chaque *pied* se divise en 12 parties égales, nommées *pouces*; chaque pouce en 12 autres parties, nommées *lignes*, & chaque ligne en 12 parties, nommées *points*. La seconde, à qui l'on a donné le nom de *toise quarrée*, est un espace quarré, dont chaque côté contient une toise courante. Enfin la troisiéme, nommée *toise cubique*, est un solide en forme de dez à joüer, dont les trois dimensions valent chacune une toise. La toise quarrée & la cubique, peuvent se diviser ou en pieds, pouces & lignes quarrées ou cubiques, ou en pieds, pouces & lignes de toise quarrée, ou de toise cubique, & ces deux differentes especes de divisions ont chacune leur calcul, dont nous avons enseigné les regles dans notre Arithmetique des Géometres, où nous renvoyons le Lecteur, pour n'être pas obligé de répeter inutilement ce que nous avons déja dit. Nous ne traiterons donc dans cette Section, & dans tout le reste de cet Ouvrage, que de la mesure des surfaces & des corps en général, c'est-à-dire autant qu'elle peut être appliquée aux differentes mesures dont on se sert selon la diversité des Pays.

## DEFINITION II.

2. Mesurer une surface, c'est chercher combien son *aire*, c'est-à-dire l'espace renfermé entre ses extrêmitez, contient de petits quarrez, chacun desquels vaut une toise quarrée, ou tel autre mesure quarrée que l'on voudra.

## PROBLEME I.

3. *Mesurer un rectangle ABCD.* (Fig. 1.).

Multipliez la base BC, par la hauteur AB, ou la hauteur AB, par la base BC, & le produit sera la valeur du rectangle.

## DEMONSTRATION.

Concevez que la hauteur AB, soit divisée en parties égales, moindres chacune qu'aucune grandeur qu'on puisse assigner, & que sur ces parties soient élevées des perpendiculaires, qui aillent aboutir au côté opposé CD, ces perpendiculaires seront égales entr'elles, & à la base BC, puisqu'elles sont entre les paralleles AB, CD, & comme elles se toucheront dans toute leur longueur, elles rempliront exactement l'aire du rectangle, qui par conséquent sera égal à leur somme; or la somme de ces perpen-

diculaires est égale à la base BC, prise autant de fois qu'il y a de parties dans la hauteur AB, c'est-à-dire multipliée par la hauteur AB, puisqu'il y a autant de perpendiculaires que la hauteur AB contient de parties; donc le rectangle ABCD, est aussi égal à la base BC, multipliée par la hauteur AB; & comme c'est la même chose de multiplier BC par AB, ou AB par AC, on peut dire aussi que le rectangle ABCD, est égal au produit de la hauteur AB, par la base BC.

## AUTRE DEMONSTRATION.

Supposons que la hauteur AB (*Fig.* 2.), soit de 4 toises, & la base BC, de trois. Si par les divisions de la hauteur AB, vous tirez des paralleles à la base, le rectangle sera divisé en quatre rectangles égaux ADEH, EHFI, &c. qui auront une toise de hauteur, & trois toises de base; & si des divisions de la base BC, vous tirez des paralleles à la hauteur, chacun de ces quatre rectangles sera divisé en trois quarrez, dont les côtez vaudront une toise, & par conséquent le rectangle ABCD, contiendra quatre fois trois toises quarrées, c'est-à-dire douze, qui est le produit de trois par quatre.

## COROLLAIRE I.

4. *Les rectangles qui ont mêmes hauteurs & mêmes bases; ou qui ont les hauteurs égales & les bases aussi, sont égaux entr'eux.* Si la hauteur AB, & la base BC (*Fig.* 1.) sont égales à la hauteur AB, & à la base BC (*Fig.* 2), chacune à chacune, le rectangle ABCD, qui est le produit des deux premieres, doit être nécessairement égal au rectangle ABCD; qui est le produit des deux secondes.

## COROLLAIRE II.

5. *Les rectangles de même base, ou qui ont les bases égales & les hauteurs inégales, sont entr'eux comme leurs hauteurs, & ceux de même hauteur, ou qui ont les hauteurs égales & les bases inégales, sont entr'eux comme leurs bases.* Soient les rectangles ABCD (*Fig.* 1.) EBCH (*Fig.* 2.), qui ont les bases BC, BC égales, & les hauteurs AB, EB, inégales, par le Probleme présent, ces rectangles sont les produits de leurs hauteurs par leurs bases; ainsi les hauteurs inégales AB, EB, sont multipliées par une même grandeur BC; or lorsque deux grandeurs inégales sont multipliées par une même grandeur, les produits sont encore entr'eux comme

les deux grandeurs (*Partie* 1. *n.* 250.) donc les rectangles ABCD, EBCH, sont entr'eux comme leurs hauteurs AB, EB. On prouvera de même que les rectangles ABCD (*Fig.* 1.) ABSX (*Fig.* 2.), qui ont les hauteurs AB, AB, égales, & les bases BC, BS, inégales, sont entr'eux comme leurs bases.

## PROBLEME II.

*6. Mesurer un parallelograme ABDC*, (Fig. 3 & 4.).

D'un point quelconque D, de la base BD, élevez une perpendiculaire DS, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point S, le côté opposé AC, prolongé, s'il est nécessaire. Cette perpendiculaire sera la hauteur du parallelograme; ainsi multipliant la hauteur DS, par la base BD, ou la base BD, par la hauteur DS, le produit vous donnera la valeur du parallelograme.

## DEMONSTRATION.

Des extrêmitez B, D, de la base, élevez les perpendiculaires BH, DS, qui rencontrent aux points H, S, le côté opposé AC, prolongé, ce qui vous donnera un rectangle BHSD, & il arrivera ou que ni l'une ni l'autre de ces perpendiculaires ne coupe-ront l'un des côtez AB, CD, adjacens à la base du parallelograme (*Fig.* 3.), ou que l'une, comme DS, coupera un côté AB, (*Fig.* 4.).

Dans le premier cas (*Fig.* 3.), les triangles HBA, SDC, ayant le côté HB, égal au côté SD, le côté BA, égal au côté DC, à cause des paralleles, & l'angle HAB, égal à l'angle SCD, à cause des également inclinées BA, DC, sont égaux entr'eux; ajoûtant donc à chacun d'eux, la figure AFDS, on aura le rectangle HBDS, égal au parallelograme ABDC; mais le rectangle HBDS, est égal au produit de la hauteur HB, ou DS, par la base BD (*n.* 3.); donc le parallelograme ABDC, est aussi égal à ce produit.

Dans le second cas, les lignes HS, AC, étant égales, parce qu'elles sont chacune égales à la ligne BD, si on leur ajoûte de part & d'autre la ligne SA, on aura HA, égal à SC; ainsi les deux triangles HBA, SDC, ayant le côté HB, égal au côté SD, le côté BA, égal au côté DC, & le côté HA, égal au côté SC, sont égaux entr'eux; donc si on leur ôte à chacun le triangle SOA, le reste HBOS, sera égal au reste ODCA, & si à chacun de ces restes on ajoûte le triangle BOD, le rectangle HBDS, sera égal

au

*Figure I.re*

*Fig. 2.*

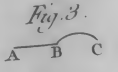



*Fig. 3.*




*Fig. 4.*

*Fig. 5.*

*Fig. 6.*

*Fig. 7.e*

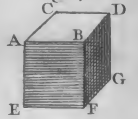



*Fig. 8.*

*Fig. 9.*

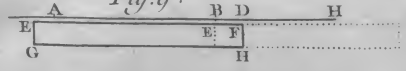



*Fig. 10.*

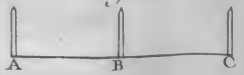



*Fig. 11.*

*Fig. 12.*

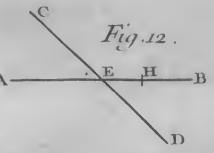



*Fig. 13.*

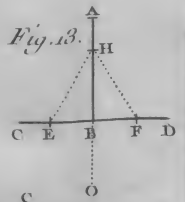



*Fig. 14.*

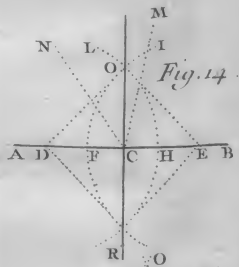



*Fig. 15.*

*Fig. 16.*

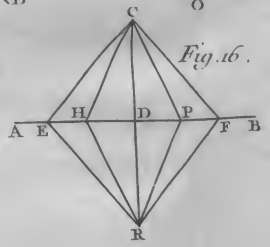



*Fig. 17.*

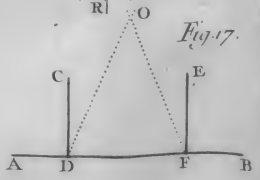



*Fig. 18.*

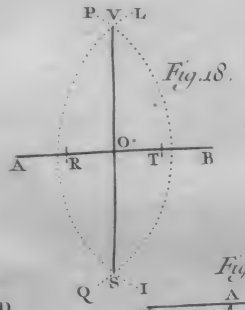



*Fig. 19.*

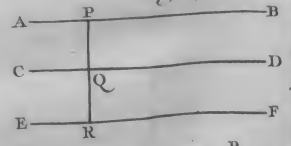



*Fig. 20.*

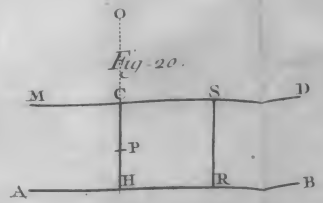



*Fig. 21.*

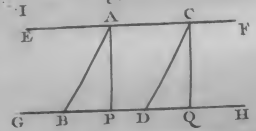



*Fig 22.*

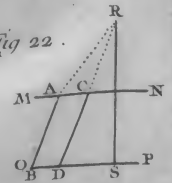


Fig. 23.

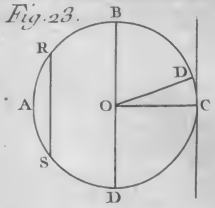



Fig. 24.

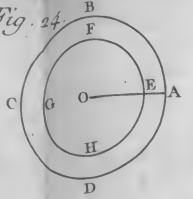



Fig. 25.

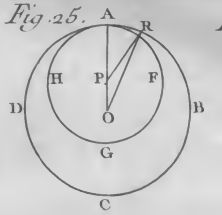



Fig. 26.

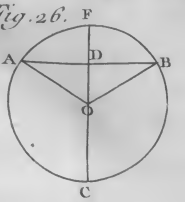



Fig. 27.

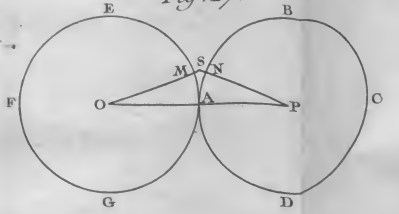



Fig. 28.

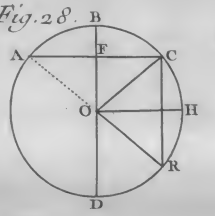



Fig. 29.

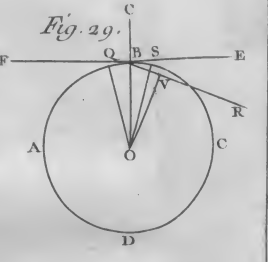



Fig. 30.

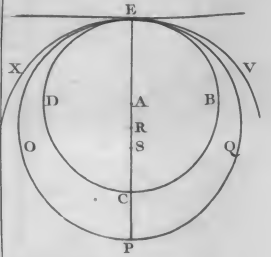



Fig. 31.

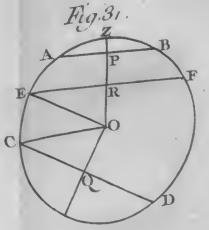



Fig. 32.

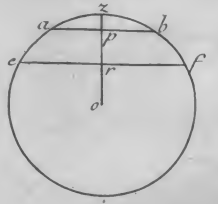



Fig. 33.

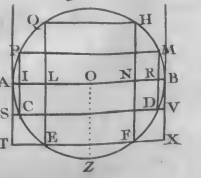



Fig. 34.

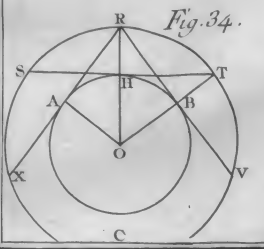



Fig. 35.

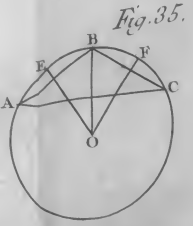



Fig. 36.

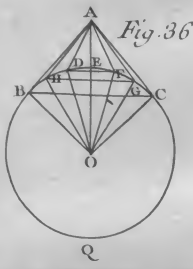
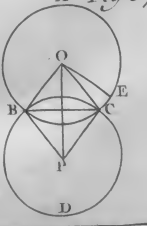



Fig. 37.



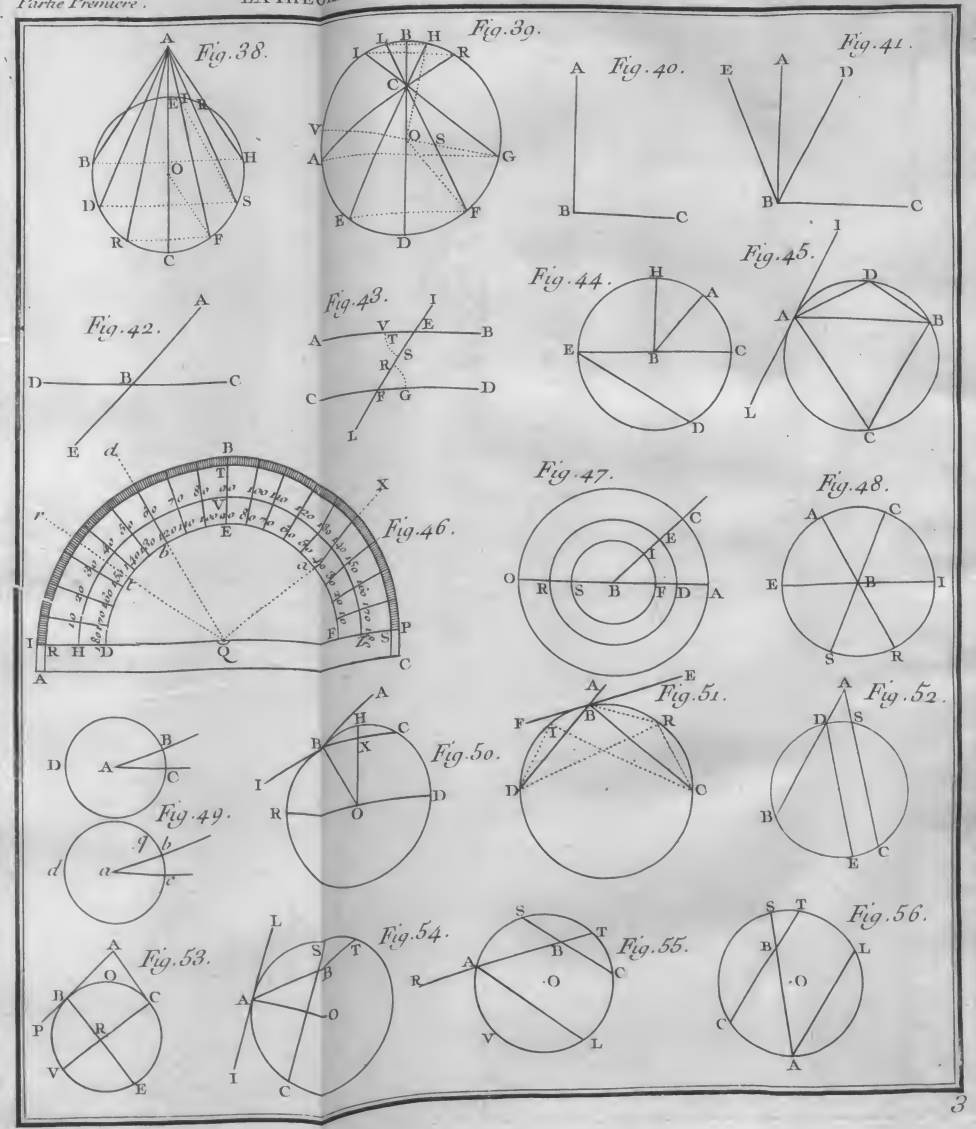


Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.

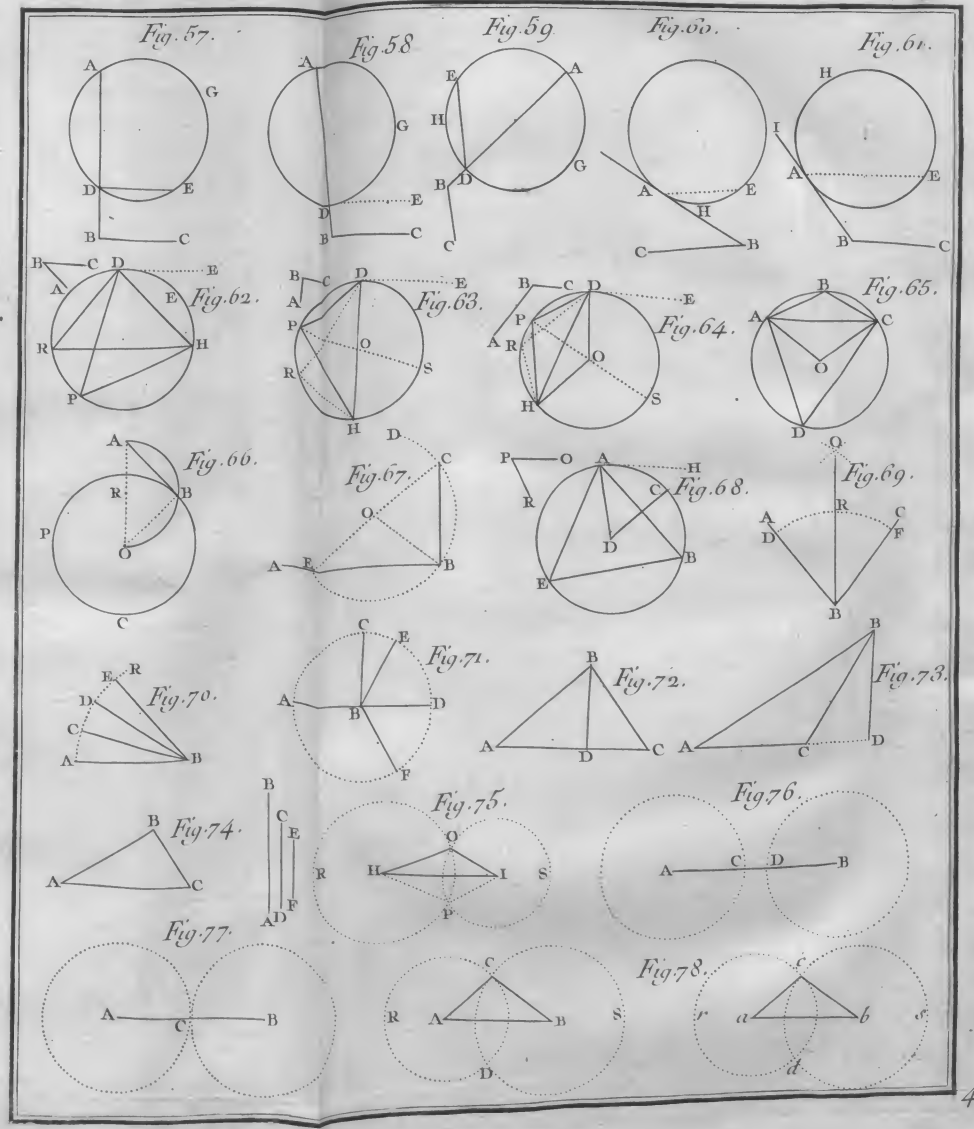


Fig. 57.
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.

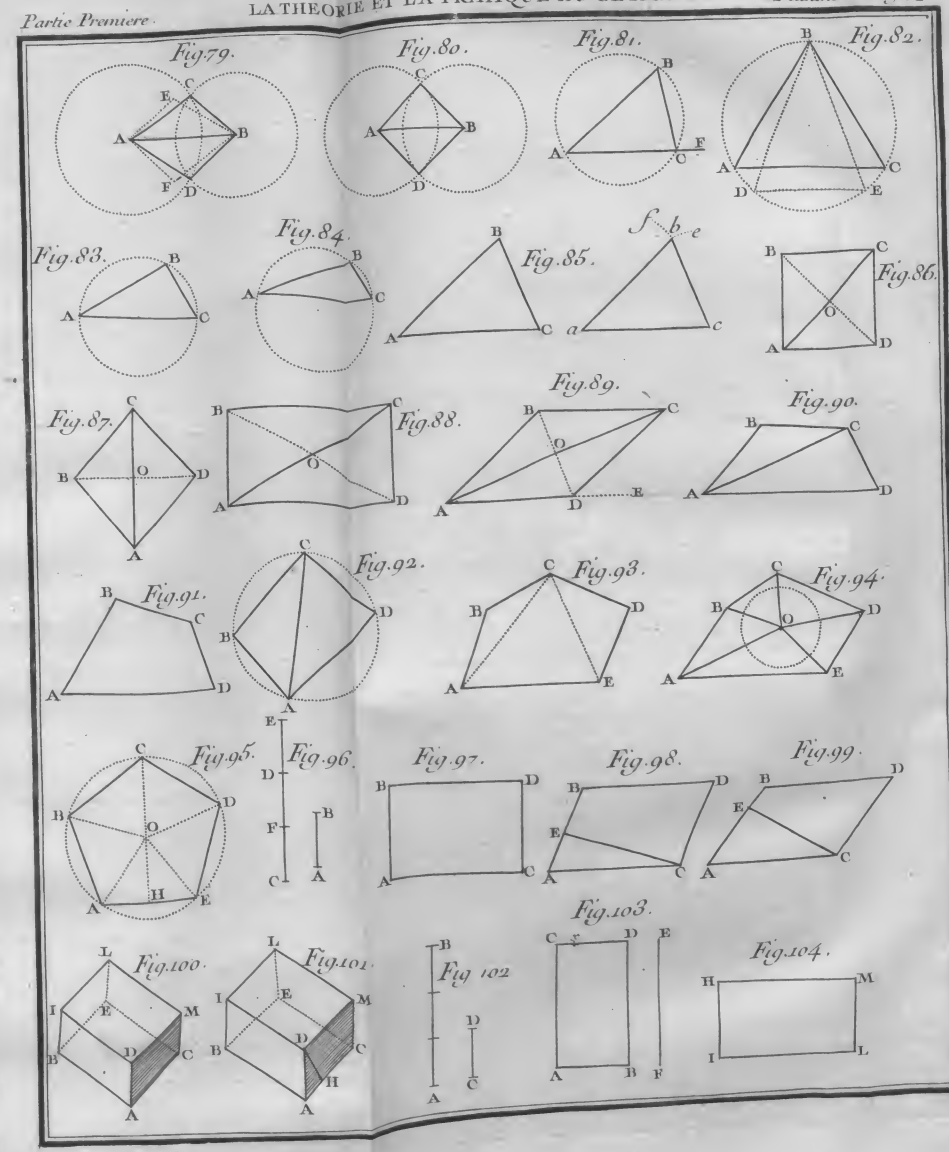


Fig.79.
Fig.80.
Fig.81.
Fig.82.
Fig.83.
Fig.84.
Fig.85.
Fig.86.
Fig.87.
Fig.88.
Fig.89.
Fig.90.
Fig.91.
Fig.92.
Fig.93.
Fig.94.
Fig.95.
Fig.96.
Fig.97.
Fig.98.
Fig.99.
Fig.100.
Fig.101.
Fig 102
Fig.103.
Fig.104.

Fig. 105.

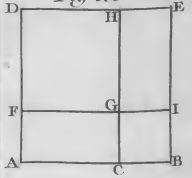



Fig. 106.

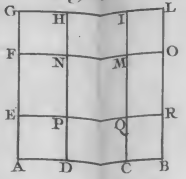



Fig. 107.

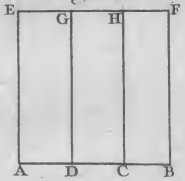



Fig. 108.

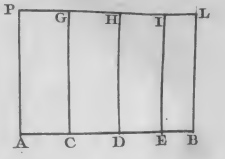



Fig. 109.

Fig. 110.

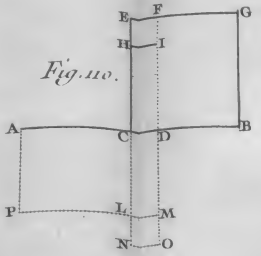



Fig. 111.

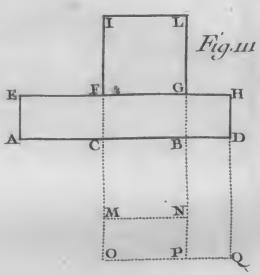



Fig. 112.

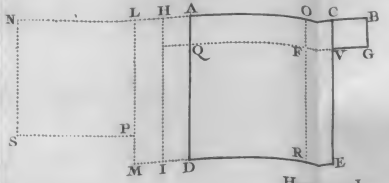



Fig. 113.

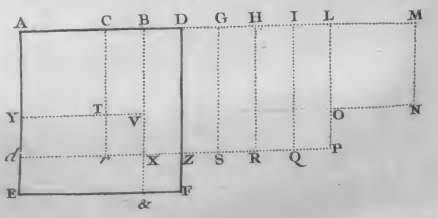



Fig. 114.

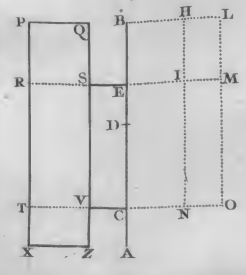



Fig. 115.

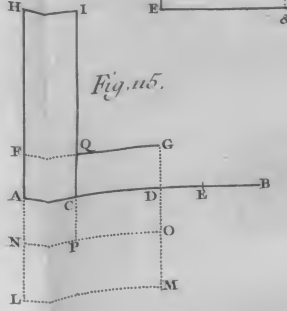



Fig. 116.

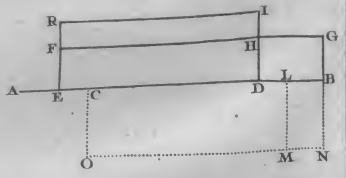


Fig.117.

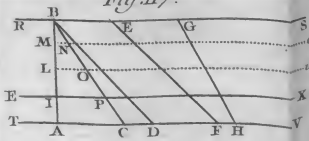


Fig.118.

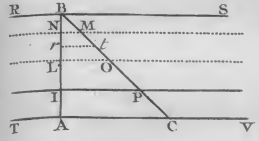


Fig.119.

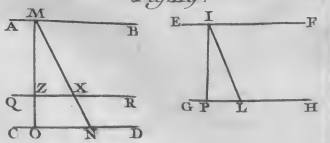


Fig.120.

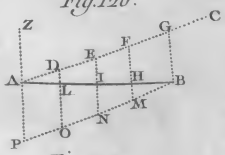


Fig.121.

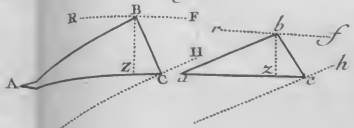


Fig.122.

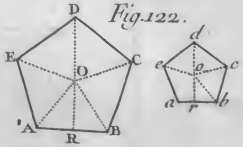


Fig.123.

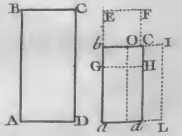


Fig.124.

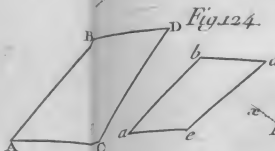


Fig.125.

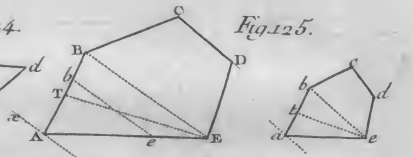


Fig.126.

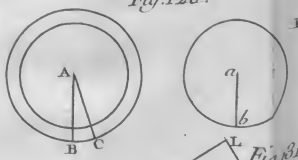


Fig.127.

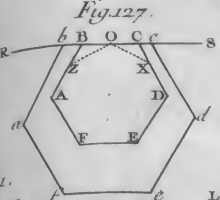


Fig.128.

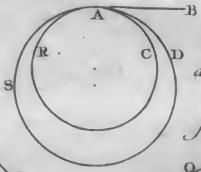


Fig.129.

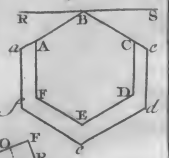


Fig.130.

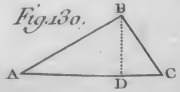


Fig.131.

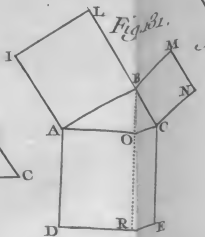


Fig.132.

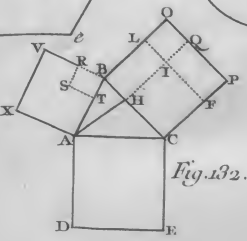


Fig.133.

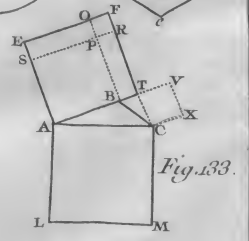


Fig.134.

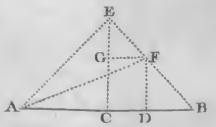


Fig.135.

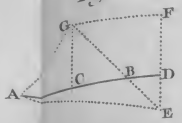


Fig.136.

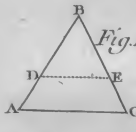


Fig.137.

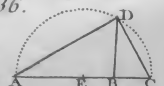
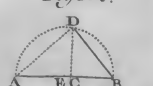


Fig.138.



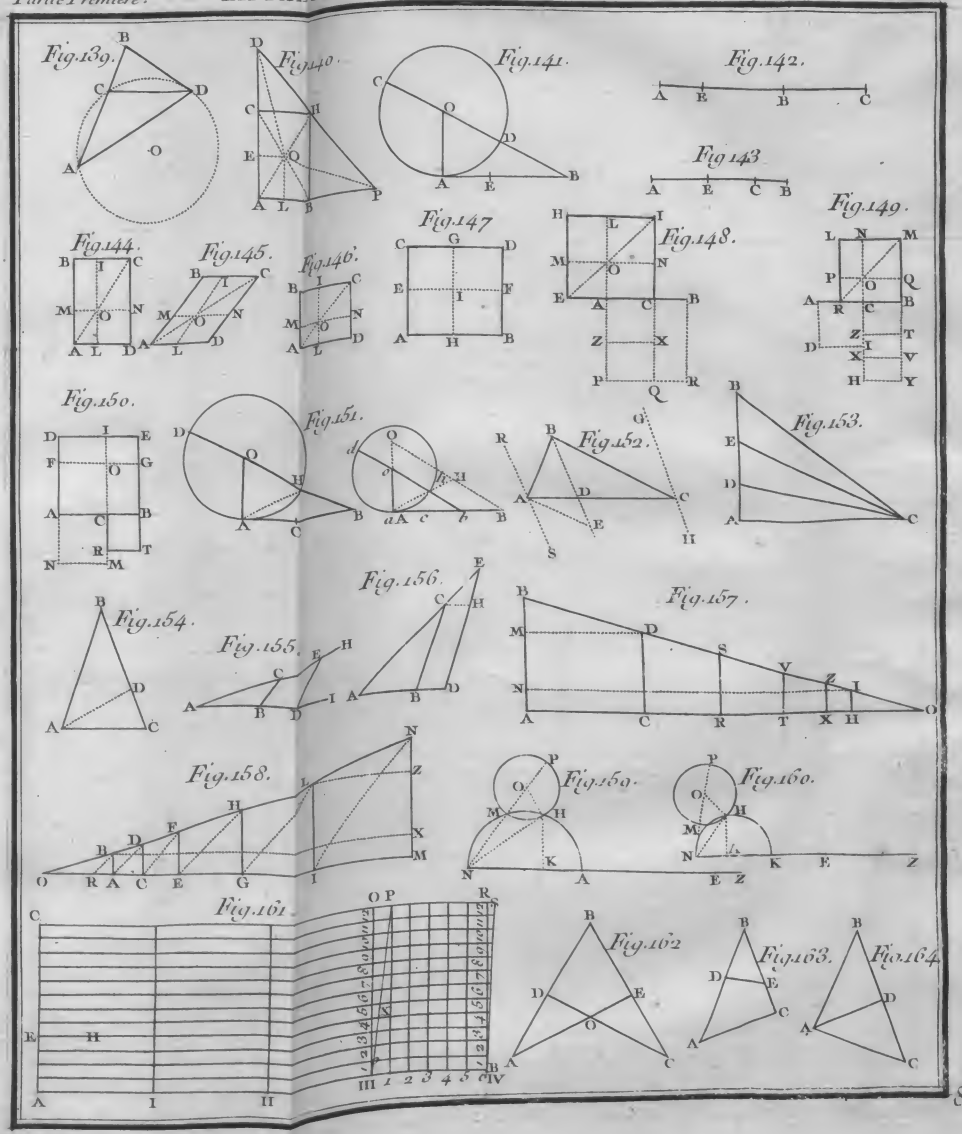


Fig.139.
Fig.140.
Fig.141.
Fig.142.
Fig.143
Fig.144.
Fig.145.
Fig.146.
Fig.147
Fig.148.
Fig.149.
Fig.150.
Fig.151.
Fig.152.
Fig.153.
Fig.154.
Fig.155.
Fig.156.
Fig.157.
Fig.158.
Fig.159.
Fig.160.
Fig.161.
Fig.162
Fig.163.
Fig.164

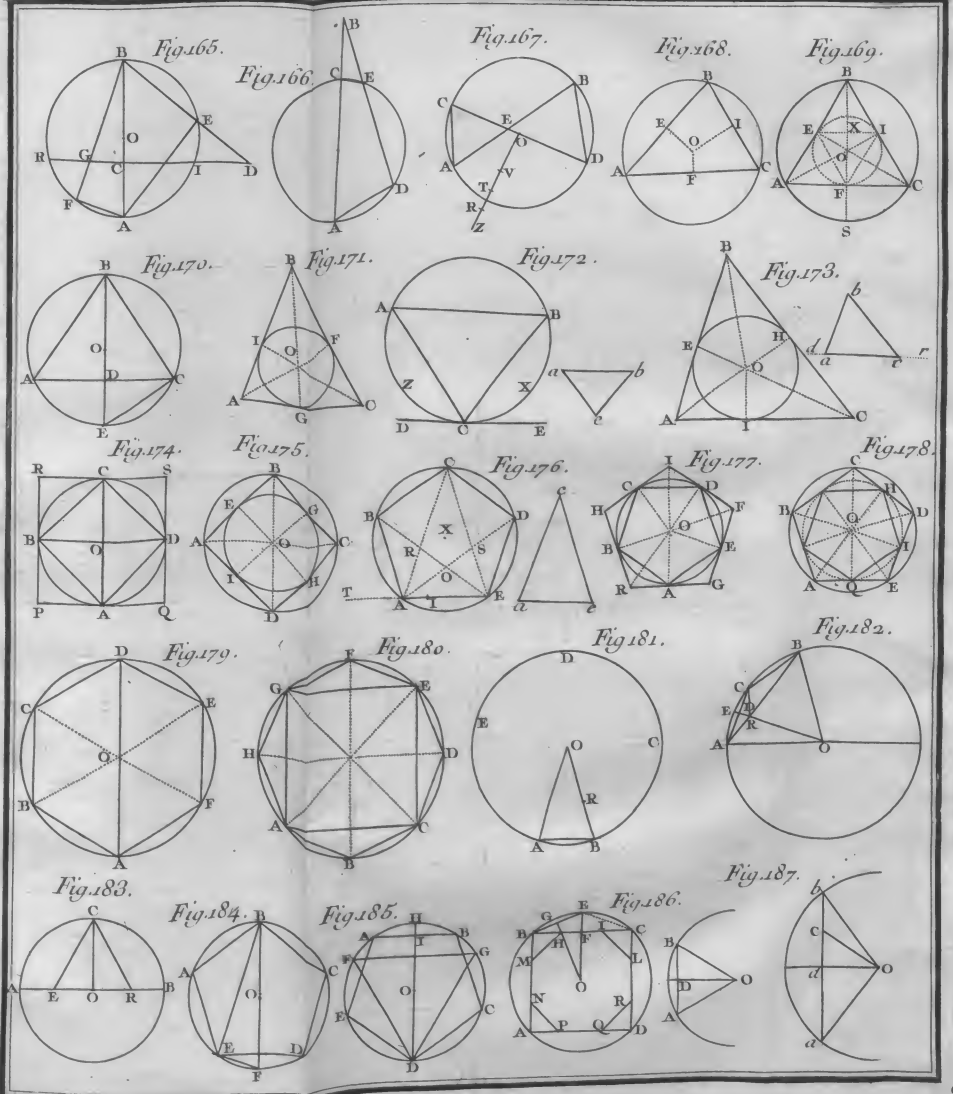


Fig.166.
Fig.166.
Fig.167.
Fig.168.
Fig.169.
Fig.170.
Fig.171.
Fig.172.
Fig.173.
Fig.174.
Fig.175.
Fig.176.
Fig.177.
Fig.178.
Fig.179.
Fig.180.
Fig.181.
Fig.182.
Fig.183.
Fig.184.
Fig.185.
Fig.186.
Fig.187.

Fig. 188.

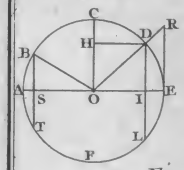



Fig. 189.

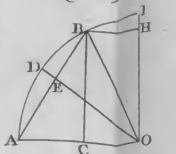



Fig. 190.

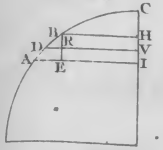



Fig. 191.

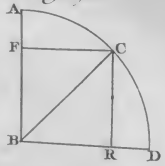



Fig. 192.

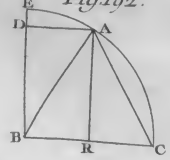



Fig. 193.

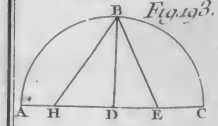



Fig. 194.

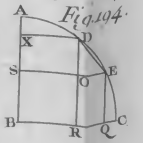



Fig. 195.

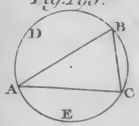



Fig. 196.

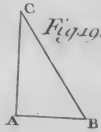



Fig. 197.

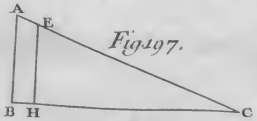



Fig. 198.

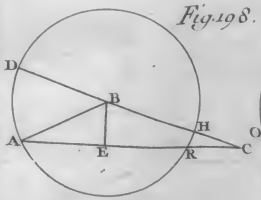



Fig. 199.

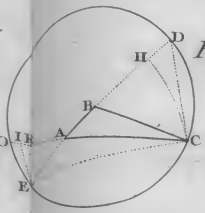



Fig. 200.

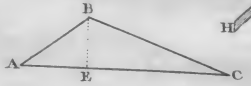



Fig. 201.

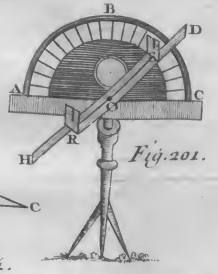



Fig. 202.

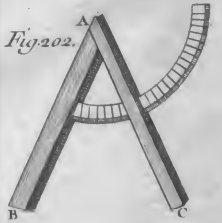



Fig. 203.

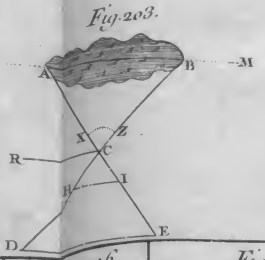



Fig. 204.

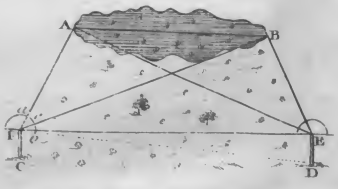



Fig. 205.

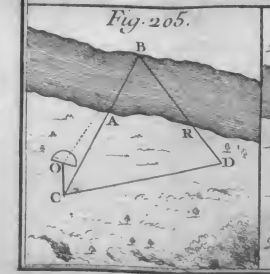
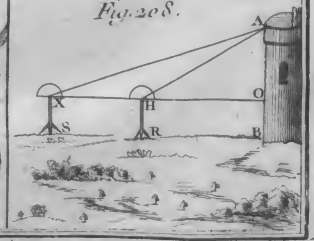
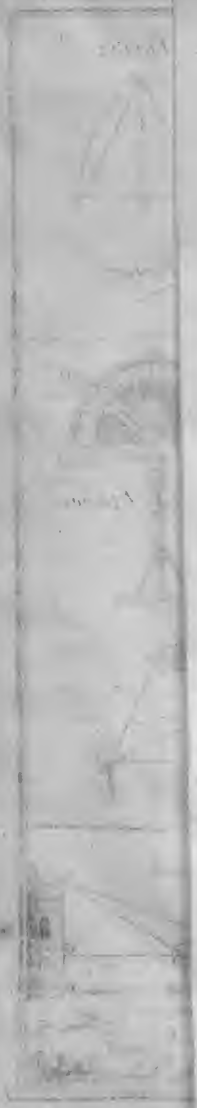



Fig. 206.

Fig. 207.

Fig. 208.





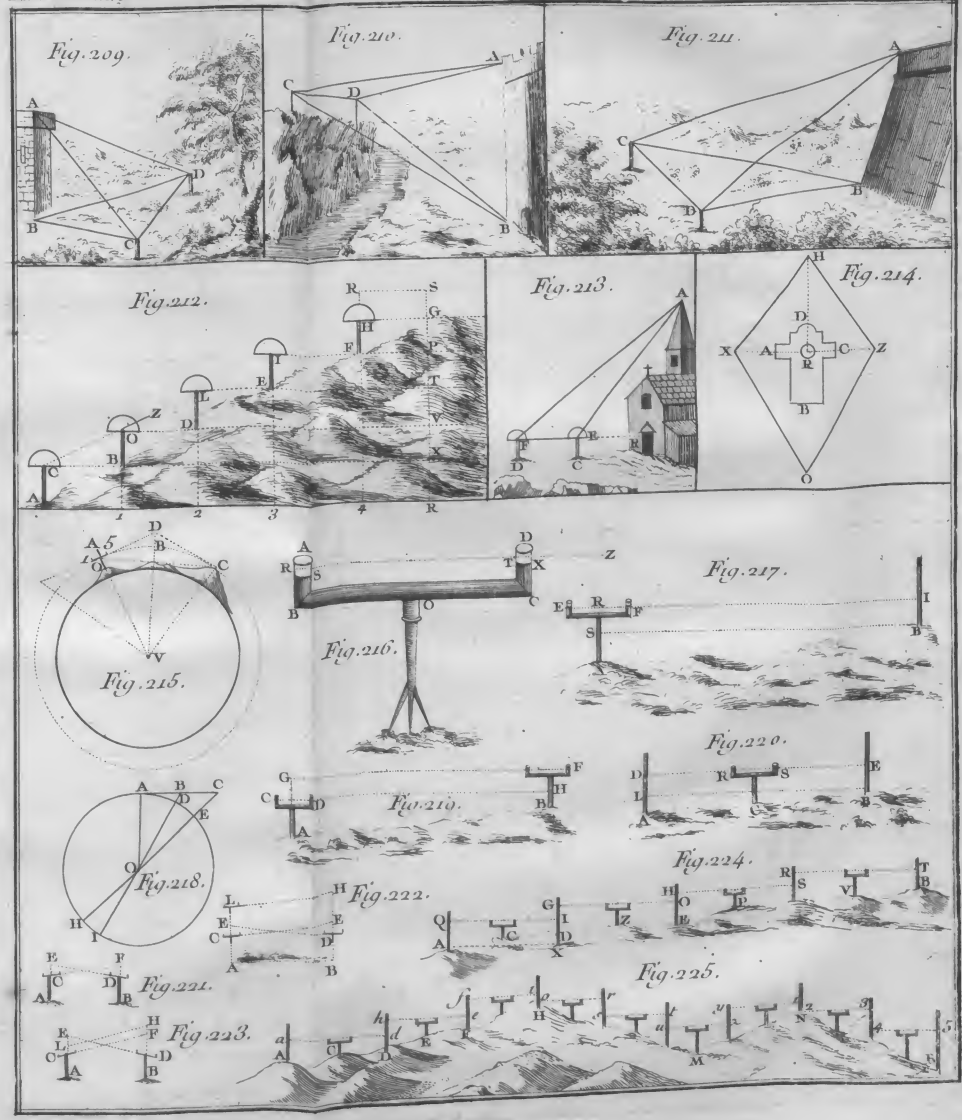


Fig. 209.
Fig. 210.
Fig. 211.
Fig. 212.
Fig. 213.
Fig. 214.
Fig. 215.
Fig. 216.
Fig. 217.
Fig. 218.
Fig. 219.
Fig. 220.
Fig. 221.
Fig. 222.
Fig. 223.
Fig. 224.
Fig. 225.

au parallelograme ABDC ; or le rectangle eſt égal au produit de la hauteur SD, par la baſe BD ; donc le parallelograme eſt auſſi égal à ce produit.

## COROLLAIRE I.

7. *Les parallelogrames de même hauteur & de même baſe, ou qui ont les hauteurs égales entr'elles, & les baſes auſſi. ſont égaux entr'eux.* Ils ſont égaux aux rectangles de même baſe & de même hauteur, leſquels ſont égaux entr'eux (*n.* 4.) ; donc, &c.

## COROLLAIRE. II.

8. *Les parallelogrames de même hauteur, ou qui ont les hauteurs égales, & les baſes inégales, ſont entr'eux comme leurs baſes, & ceux qui ont même baſe, ou les baſes égales & les hauteurs inégales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs.* Ils ſont égaux aux rectangles qu'on feroit ſur leurs baſes & leurs hauteurs ; donc ce que nous avons démontré des rectangles (*n.* 5.), leur convient également.

## PROBLEME III.

9. *Meſurer un triangle ABC* (Fig. 5.).

Du ſommet A, tirez ſur la baſe la perpendiculaire AD, qui ſera la hauteur du triangle, multipliez cette hauteur par la baſe BC, & la moitié du produit ſera la valeur du triangle.

## DEMONSTRATION.

Du ſommet A, tirez l'indéterminée AE, parallele à la baſe BC, & de l'extrêmité C de la baſe, tirez CE, parallele au côté oppoſé AB, ce qui vous donnera un parallelograme ABCH, qui ſera diviſé en deux parties égales par la diagonale AC, qui eſt l'autre côté du triangle ; ainſi le triangle ABC, ſera égal à la moitié du parallelograme ; mais le parallelograme eſt égal à un rectangle fait ſur la baſe BC, & la hauteur AD (*n.* 6.) ; donc le triangle eſt auſſi égal à la moitié de ce rectangle, c'eſt-à-dire à la moitié du produit de BC, par AD.

## COROLLAIRE I.

10. *Les triangles qui ont même baſe & même hauteur, ou les baſes égales & les hauteurs auſſi, ſont égaux entr'eux ; ceux qui ont même baſe, ou les baſes égales & les hauteurs inégales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs, & ceux qui ont même hauteur, ou les hauteurs égales &*

*les baſes inégales, ſont entr'eux comme leurs baſes.* Ces triangles ſont égaux à la moitié des rectangles qu'on feroit ſur leurs baſes & leurs hauteurs; donc ce que nous avons démontré des rectangles (*n.* 4 *&* 5.), convient également à leurs moitiés.

## COROLLAIRE II.

11. *Les triangles BEC, BAC, CAD* (Fig. 6), *qui ſont entre mêmes paralleles BD, EH, ſont égaux, s'ils ſont ſur même baſe, ou ſi leurs baſes ſont égales.* Leurs hauteurs ſont égales, puiſque toutes les perpendiculaires qu'on peut tirer entre deux paralleles, ſont égales entr'elles; donc, &c. *Et ſi les baſes ſont inégales, les triangles ſont entr'eux comme leurs baſes,* à cauſe de l'égalité des hauteurs. Ce que nous diſons ici des triangles qui ſont entre mêmes paralleles, doit s'entendre auſſi des rectangles & des parallelogrames compris entre mêmes paralleles par la même raiſon.

## COROLLAIRE III.

12. *Les triangles BAC, CAD* (Fig. 6.), *qui ont leurs baſes BC, CD, ſur une même ligne droite BD, & leurs ſommets à un même point A, ſont égaux entr'eux ſi leurs baſes ſont égales, & ſi leurs baſes ſont inégales, ils ſont entr'eux comme leurs baſes.* De leur ſommet commun A, tirez une parallele à la ligne BD, les deux triangles ſeront compris entre mêmes paralleles; donc, &c.

## COROLLAIRE IV.

13. On tire de-là une maniere de faire un triangle qui ſoit double, triple, quadruple, &c. d'un autre triangle, ou qui n'en ſoit que le tiers, le quart, &c. ou enfin qui ſoit avec lui en telle raiſon que l'on voudra, quand même elle ſeroit ſourde. Soit le triangle ABC (*Fig.* 7.), dont on demande de faire le triple, je prolonge la baſe BC, en ſorte que BD, contienne trois fois BC; du point D je tire la ligne DA, au ſommet A, & le triangle ABD, eſt triple du triangle ABC; car la hauteur étant égale de part & d'autre, les deux triangles ſont entr'eux comme la baſe BD, eſt à la baſe BC, c'eſt-à-dire comme 3. eſt à 1. De même ſi l'on veut un triangle qui ſoit le tiers du triangle ABD, je partage la baſe en trois parties égales aux points C, E, & du point C, je tire la ligne CA, au ſommet, ce qui me donne le triangle ABC, qui eſt le tiers du triangle ABD. Enfin ſi l'on me demande un triangle qui ſoit à un triangle donné ABC (*Fig.* 8.), comme une ligne HI, à

une autre ligne EF, soit que ces lignes soient commensurables, ou qu'elles ne le soient pas, je prens une quatriéme proportionnelle BD, aux trois lignes EF, HI, BC, & mettant cette ligne sur la direction de la base BC, de B en D, je tire la ligne DA, au sommet, ce qui me donne le triangle BAD, qui est au triangle BAC, comme HI, est à EF; car ces deux triangles ayant leur sommet à un même point, sont entr'eux comme leurs bases BD, BC, & ces bases sont entr'elles comme HI, EF, par la construction.

## COROLLAIRE V.

14. On tire encore de-là une maniere de diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra. Soit par exemple, la ligne AB (*Fig. 9.*), qu'on me propose de partager en cinq parties égales; je tire une ligne indéfinie CZ, & ouvrant le compas à discrétion, je porte son ouverture cinq fois sur cette ligne de C en F, de F en G, &c. puis prenant la grandeur CD, je construis un triangle équilateral CED, & des points de divisions F, G, H, I, je tire au sommet les lignes FE, GE, &c. qui partagent le triangle CED, en cinq triangles égaux. Cela fait, je prens la grandeur AB, de la ligne donnée, & je la porte sur l'un des côtez CE du triangle, depuis le sommet E, jusqu'au point *c*, d'où je tire *cd*, parallele à la base CD, ce qui me donne le triangle E*cd*, équiangle au triangle ECD, à cause des bases paralleles *cd*, CD; & par conséquent ce triangle est équilateral, & la base *cd*, est égale au côté *c*E, ou à la ligne donnée AB. Ainsi il ne reste plus qu'à faire voir que *cd* est coupée en cinq parties égales par les lignes FE, GE, HE, IE. Et pour cela considerez que les triangles ECF, E*cf*, étant semblables, de même que les triangles EFG, E*fg*, à cause des bases paralleles, on a dans les deux premiers *cf*. CF :: E*f*. EF, & dans les deux seconds *fg*. FG :: E*f*. EF; d'où il suit que *cf*. CF :: *fg*. FG; donc *permutando*, on aura *cf*. *fg* :: CF. FG; or CF = FG; donc *cf* = *fg*. On prouvera de même que *gh*, est égal à *fg*; & par conséquent à *cf*, & que *hi*, & *id*, sont aussi égales à *cf*; donc, &c.

## PROBLEME IV.

15. *Mesurer un trapezoïde ABCD* (Fig. 10.).

Prenez la moitié de la base BC, & l'ajoûtant à la moitié du côté opposé & parallele AD, multipliez la somme par la perpendicu-

laire AX, tirée entre les deux paralleles, le produit sera la valeur du trapezoïde.

### DEMONSTRATION.

Coupez les deux côtez AB, CD, qui ne sont pas paralleles, chacun en deux parties égales, aux points E, H, d'où vous tirerez les lignes PQ, IL, perpendiculaires sur la base, lesquelles seront aussi perpendiculaires sur le côté parallele AD, prolongé en P & en I. Cela fait, les triangles LHC, IHD, ayant le côté HC, égal au côté HD, l'angle CHL, égal à l'angle DHI, qui lui est opposé au sommet, & l'angle LCH égal à l'angle alterne IDH, seront égaux & équiangles. Par la même raison les triangles PEA, QEB, seront aussi équiangles & égaux. Donc si on retranche du trapezoïde ABCD, les triangles LHC, QEB, & qu'on lui donne à leur place les triangles IHD, PEA, qui sont égaux chacun à chacun aux deux autres, le rectangle PQLI, sera égal au trapezoïde : or ce rectangle est égal à sa base QL, multiplié par sa hauteur QP, ou AX; donc le tropezoïde est aussi égal à QL, multiplié par AX. Il reste donc à prouver que QL, est égal à la moitié BC, plus la moitié de AD.

Ayant tiré du milieu R, du côté AD, la perpendiculaire RT, sur la base, & de ses extrêmitez A, D, les perpendiculaires AX, DZ, sur la même base; considerez 1°. que la ligne XT, étant égale à sa parallele AR, à cause des perpendiculaires AX, TR, vaut par conséquent la moitié du côté AD; 2°. que PA étant égale à QX, est aussi égale à BQ, à cause que les triangles BQE, AEP, étant égaux & équiangles, PA, est égal à BQ; d'où il suit que QX, est la moitié de BX: & par la même raison ZL, est la moitié de ZC, de même que TZ, est la moitié de XZ, à cause de la perpendiculaire RT, qui coupant AD, en deux parties égales, coupe aussi XZ, de la même façon. Or les lignes BX, XZ, ZC, composent la base entiere BC; donc leurs moitiés QX, TZ, ZL, prises ensemble, valent la moitié de la base, à laquelle ajoûtant XT, qui vaut la moitié du côté opposé AD, la somme QL, c'est-à-dire la base du rectangle PQLI, vaudra la moitié de la base AC du trapezoïde, plus la moitié du côté opposé & parallele AD.

### COROLLAIRE.

16. *La moitié de la somme de deux grandeurs inégales, plus la moitié*

*de leur difference, eſt égale à la plus grande des deux grandeurs, & la moitié de la ſomme moins la moitié de leur difference, eſt egale à la petite.* Soient les deux lignes inégales AD, BC, dont les lignes BX, ZC, priſes enſemble, ſont la difference, ſi on ajoûte la moitié de l'une à la moitié de l'autre, ce qui eſt la même choſe que ſi on ajoûtoit les deux enſemble pour en prendre la moitié, on aura la ligne QL, comme il vient d'être démontré; & ſi à QL, on ajoûte les lignes BQ, & LC, qui priſes enſemble, valent la moitié de la difference, on aura la grande ligne BC, & ſi de la même ligne QL, on retranche les deux QX, ZL, qui priſes enſemble, valent auſſi la moitié de la difference, on aura XZ, égale à la petite ligne AD.

## PROBLEME V.

17. *Meſurer un trapeze ABCD,* (Fig. 11.).

Tirez la diagonale AC, qui partagera le trapeze en deux triangles ABC, ADC, prenez la diagonale AC, pour la baſe commune de ces deux triangles, & tirant des ſommets B & D, les perpendiculaires BR, DS, ajoûtez ces deux perpendiculaires enſemble, & prenez-en la moitié par laquelle vous multiplierez la baſe AC, ce qui vous donnera l'aire du trapeze.

## DEMONSTRATION.

Le triangle ABC, eſt égal à la baſe AC, multipliée par la moitié de ſa hauteur BR (*n.* 9.) & le triangle ADC, eſt égal à la même baſe AC, multipliée par ſa moitié de ſa hauteur DS; or multiplier AC, par la moitié de BR, & AC, par la moitié de DS, c'eſt la même choſe que de multiplier tout d'un coup AC, par la moitié de BR, DS, priſes enſemble; donc le produit de AC, par la moitié de BR, DS, priſes enſemble, eſt égal au trapeze ABCD.

## REMARQUE.

18. Les Commençans ſeront ſans doute étonnés d'entendre dire qu'en multipliant la baſe BC, d'un triangle ABC (*Fig.* 12.), par la moitié de ſa hauteur AS, on a la valeur du triangle; car alors, diront-ils, le produit ſera le rectangle DBCE, & non pas le triangle ABC. Cela eſt vrai effectivement; mais comme ce rectangle eſt égal au triangle, ainſi que nous allons le démontrer, il importe peu que le produit ſoit celui-là plutôt que celui-ci, pour-

vû qu'on ait la véritable valeur qu'on cherche. Or il eſt facile de faire voir que le rectangle DBCE, eſt égal au triangle ABC; car les triangles AIH, ECH, ayant l'angle AHI, égal à l'angle CHE, qui lui eſt oppoſé au ſommet, & l'angle droit AIH, égal à l'angle droit CEH, ont par conſéquent le troiſiéme angle égal au troiſiéme angle; & de plus, le côté AI égal au côté CE, qui eſt égal à SI. Donc les deux triangles ſont équiangles & égaux; par la même raiſon les deux triangles ARI, BRD, ſont auſſi égaux & équiangles. Donc ſi on retranche du triangle ABC, les deux triangles ARI, AHI, & qu'on ſubſtituë en leur place les deux RDB, HEC, qui leur ſont égaux, le rectangle DBCE, ſera égal au triangle ABC.

## PROBLEME VI.

19. *Meſurer une figure irréguliere de pluſieurs côtez ABCDEFG.* (Fig. 13.).

De l'un des angles B, tirez des lignes aux angles oppoſés, ce qui vous donnera autant de triangles que la figure a de côtez, moins deux (*Partie 1. n. 205.*), c'eſt-à-dire cinq triangles, prenez la valeur de chacun de ces triangles à part (*n. 9.*), puis ajoûtant leurs aires enſemble, la ſomme totale ſera l'aire de la figure.

Ou bien comme ces triangles pris deux à deux, forment des trapezes, prenez la valeur du trapeze AGFB, puis celle du trapeze EBCD, en prolongeant la diagonale BD en R, pour avoir la perpendiculaire ER, & enfin celle du triangle FBE, qui reſte ſeul, & ajoûtant enſemble ces trois valeurs, vous aurez l'aire du trapeze, ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

## PROBLEME VII.

20. *Meſurer un polygone regulier* (Fig. 14.).

Soit l'exagone ABCDEF, prenez une ligne PQ, égale au circuit ou perimetre de la figure, à ſon extrêmité P, elevez la perpendiculaire PR, que vous ferez égale à l'apoteme OS, & tirez la ligne RQ, ce qui vous donnera un triangle PRQ, dont la valeur ſera égale à celle de l'exagone.

## DEMONSTRATION.

L'aire de l'exagone eſt compoſée de ſix triangles égaux, qui ont tous le côté de la figure pour baſe, & l'apoteme pour hauteur;

donc cette aire est six fois plus grande que l'un de ces triangles. Or le triangle PRQ, ayant la même hauteur que les triangles & la base six fois plus grande, est par conséquent aussi six fois plus grand; donc l'aire du triangle PRQ, est égale à l'aire de l'exagone.

## PROBLEME VIII.

21. *Mesurer un cercle ABCD* (Fig. 15.).

Prenez une ligne droite PQ, égale à la circonference du cercle, & élevant à son extrêmité P, une perpendiculaire PR, égale au rayon OB, tirez la droite RQ, ce qui vous donnera un triangle PRQ, qui sera égal au cercle donné; car le cercle étant un polygone d'une infinité de côtez, comprend une infinité de petits triangles, dont la somme des bases est égale à la circonference, & dont la hauteur est égale au rayon.

Toute la difficulté en ceci consiste à trouver une ligne droite égale à la circonference, laquelle résoudroit le fameux Probleme de la quadrature du cercle, que tant d'habiles gens ont cherché en vain depuis si long-tems; car cette ligne étant trouvée, il seroit facile de faire un quarré égal au triangle PRQ, comme nous l'enseignerons plus bas. Or on peut parvenir de deux façons à la trouver; la premiere, en la cherchant directement par la voye des polygones inscrits & circonscrits, à l'exemple d'Archimede, & de grand nombre de Géometres qui ont marché sur ses traces, & cette voye ne peut donner qu'une approximation, comme on verra bien-tôt; la seconde, en cherchant un quarré égal au cercle, parce qu'alors on pourroit aisément changer ce quarré en un triangle, qui auroit pour hauteur le rayon, & dont la base seroit par conséquent égale à la circonference, & cette seconde façon a été infructueuse jusqu'ici à tous ceux qui ont voulu la tenter.

Comme les côtez des polygones inscrits & circonscrits au cercle, approchent d'autant plus de la circonference du cercle que leur nombre est plus grand, il est sûr qu'à force d'inscrire & de circonscrire des polygones, on en trouveroit à la fin deux, dont les côtez se confondroient avec la circonference, ou n'en differeroient du moins que d'une partie infiniment petite, qui pourroit être comptée pour rien; maisparce qu'il faudroit pour cela faire des calculs à l'infini, ce qui n'est pas possible, Archimede n'a poussé le sien que jusqu'aux polygones inscrits & cir-

conscrits de 96 côtez, & a trouvé que le circuit du polygone inscrit, contenoit le diametre un peu plus de 3 fois & $\frac{10}{71}$, & que le circuit du polygone circonscrit le contenoit un peu moins de 3 fois $\frac{1}{7}$; d'où il suit que la circonference du cercle étant moyenne entre ces deux circuits, son rapport avec le diametre est entre $3\frac{10}{71}$, & $3\frac{1}{7}$; or voici comment il s'y est pris.

Soit C, le centre d'un cercle (*Fig.* 16.), & AD le côté d'un exagone, lequel sera par conséquent égal au rayon AC; divisez l'angle DCA, qui est la sixiéme partie de la circonference en deux également par la ligne CE, qui rencontre en E la tangente AE, & l'angle ECA n'embrassera plus que la douziéme partie de la circonference; divisez de même l'angle ECA, en deux également par la ligne FC, ensuite l'angle FCA, en deux également par la ligne GH, puis l'angle GCA en deux également par la droite HC, & l'angle HCA embrassera la 96^e^ partie de la circonference, puisque l'angle ECA en embrasse la 12^e^ partie, l'angle FCA, en embrassera la 24^e^, l'angle GCA la 48^e^; & par conséquent l'angle HCA, la 96^e^. Divisez encore celui-ci en deux parties égales par la ligne CK, prolongez la tangente EA, en L, jusqu'à ce que AL, soit égal à AK, & tirant la ligne CL, vous aurez l'angle KCL, égal à l'angle HCA; d'où il suit que KL sera le côté d'un polygone circonscrit de 96 cotez. Il s'agit donc de faire voir que 96KL, c'est-à-dire le circuit de ce polygone contient le diametre un peu moins de 3 fois & $\frac{1}{7}$. Et pour cela:

Considerez que la ligne CE, coupant l'arc AD, en deux également, coupe aussi la corde AD, en deux parties égales, & lui est perpendiculaire; d'où il suit que les triangles rectangles EAC, ASC, ayant l'angle aigu ECA, commun, sont semblables, & qu'ainsi CE. EA :: CA. AS; mais CA, étant égal à AD, est double de AS. Donc CE, est aussi double de EA.

D'un autre côté l'angle ACE, étant divisé en deux également par la ligne CF, vous aurez EC. CA :: EF. FA (*Partie* 1. *n.* 297.). Donc *componendo*, EC+CA. CA :: EA. FA, & *permutando*, EC+CA. EA :: CA. FA; & vous démontrerez de la même maniere que FC+CA. FA :: CA. AG, & GC+CA. GA :: CA. AH, & enfin HC+CA. HA :: CA. AK.

Supposons donc EC = 306, son quarré $\overline{EC}^2$, sera 93636, & $\overline{EA}^2$ sera 153. D'où il suit que $\overline{EA}^2$ sera 23409, & $\overline{CA}^2 = \overline{EC}^2 - \overline{EA}^2$ = 93636 − 23409 = 70227, mais la racine quarrée de 70225, moindre

moindre que 70227, eſt 265; donc le rayon CA, ſera plus grand que 265, & EC+CA, plus grand que 306+265, ou que 571. Ainſi puiſque nous avons trouvé ci-deſſus EC+CA. EA :: CA. FA; la raiſon de EC+CA à EA, étant plus grande que celle de 571 à 153, celle de CA à FA, ſera auſſi plus grande que la raiſon de 571 à 153, & multipliant ces deux termes par 8, la raiſon de CA à FA, ſera plus grande que la raiſon de 4568. à 1224. ſuppoſant donc FA=1224, le rayon CA, ſera plus grand que 4568.

Soit donc FA=1224, vous aurez $\overline{FA}^2$=1498176, & comme CA eſt plus grand que 4568, $\overline{CA}^2$, ſera auſſi plus grand que 20866624, & par conſéquent $\overline{CF}^2=\overline{FA}^2+\overline{CA}^2$, ſera plus grand que 1498176+20866624, ou que 22364800, & tirant la racine quarrée, CF ſera plus grand que 4729, & CF+CA, plus grand que 4729+4568, ou que 9297. Puis donc que nous avons trouvé ci-deſſus CF+CA. FA :: CA. AG; la raiſon de CF+FA à FA, étant plus grande que celle de 9297 à 1224, celle de CA à AG, ſera auſſi plus grande; ainſi ſi nous ſuppoſons AG=1224, le rayon CA ſera plus grand que 9297.

Soit donc AG=1224, vous aurez $\overline{AG}^2$=1498176, & comme CA eſt plus grand que 9297, $\overline{CA}^2$ ſera plus grand que 86434209, & $\overline{GC}^2=\overline{AG}^2+\overline{CA}^2$, ſera plus grand que 1498176+86434209, ou que 87932385; tirant donc la racine quarrée, GC ſera plus grand que 9377, & GC+CA, plus grand que 9377+9297, ou que 18674; puis donc que nous avons trouvé ci-deſſus GC+CA. GA :: CA. AH, la raiſon de GC+CA à GA, étant plus grande que celle de 18674 à 1224, celle de CA à AH, ſera auſſi plus grande, & diviſant par 2, la raiſon de CA à AH, ſera plus grande que celle de 9337 à 612. Ainſi ſuppoſant AH=612, CA ſera plus grand que 9337.

Soit donc AH=612, vous aurez $\overline{AH}^2$=374544, & comme CA eſt plus grand que 9337, $\overline{CA}^2$ ſera plus grand que 87179569, & $\overline{CH}^2=\overline{AH}^2+\overline{CA}^2$, plus grand que 374544+87179569, ou que 87554113, & tirant la racine quarrée, CH ſera plus grand que 9357, & CH+AC, plus grand que 9357+9337, ou que

18694. Puis donc que nous avons trouvé ci-dessus CH+AC. HA :: AC AK, la raison de CH+AC à HA, étant plus grande que celle de 18694 à 612, celle de AC à AK, sera aussi plus grande, & divisant par 2, la raison de AC à AK, sera plus grande que celle de 9347 à 306; donc si nous supposons que 2AK, c'est-à-dire le côté LK, soit 306., 2AC, c'est-à-dire le diametre sera plus grand que 9347., & la raison du diametre à 9347, sera plus grande que celle du côté LK à 306; donc la raison de 3 fois & $\frac{1}{7}$ de diametre à $3\frac{1}{7}\times 9347$, ou $29376\frac{2}{7}$, sera plus grande que celle de 96LK à $96\times 306$, ou 29376; car LK étant égal à 96, 96LK, sont égaux à $96\times 306$, ou 29376. Or 96LK, forment le circuit du polygone; donc 3 fois & $\frac{1}{7}$ de diametre étant plus grand que 29376, puisqu'il est plus grand que $29376\frac{2}{7}$, est aussi plus grand que le circuit du polygone. Passons maintenant au polygone inscrit.

Soit C le centre d'un cercle, dont le diametre est AB (*Fig.* 17); & l'arc AD, la sixiéme partie de la circonference; divisez cet arc en deux également en E, puis l'arc AE en deux également en F, l'arc AF en deux également en G, & l'arc AG en deux également en H, l'arc AH sera la 96$^{e}$ partie de la circonference; car l'arc AD en étant la sixiéme, l'arc AE en sera la douziéme, l'arc AF la vingt-quatriéme, l'arc AG la quarante-huitiéme, & l'arc AH la quatre-vingt-seiziéme. Tirez les lignes BD, BE, BF, BG, BH, & les cordes AD, AE, AF, AG, AH, la corde AH sera le côté d'un polygone inscrit de 96 côtez, & il s'agit de faire voir que 96AH, ou le circuit de ce polygone, contient le diametre un peu plus de 3 fois & $\frac{1^{o}}{7^{1}}$, & pour cela:

Considerez que les triangles ABE, KAE, ayant l'angle AEB commun, & l'angle ABE égal à l'angle EAD, à cause que ces deux angles ont leur sommet à la circonference, & s'appuyent sur des arcs égaux, ces triangles, dis-je, sont semblables, & qu'ainsi vous avez AB. AK :: BE. AE; d'autre part dans le triangle ADB, l'angle ABD, étant divisé en deux également par la ligne BK, vous avez DB. BA :: DK. KA (*Partie* 1. *n.* 297), & *componendo*, DB+BA. BA :: DA. KA, & *permutando*, DB+BA. DA :: BA. KA; mais nous avons trouvé BA. KA :: BE. AE. Donc DB+BA. DA :: BE. AE. Vous prouverez de même que EB +BA. EA :: BF. FA, & FB+BA. FA :: BG. GA, & enfin GB+BA. GA :: BH. HA.

Soit donc le diametre BA = 1560, vous aurez le quarré

$\overline{BA}^2 = 2433600$ DA = AC = 780, $\overline{DA}^2 = 608408$, & $\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = 2433600 - 608400 = 1825200$. Mais la racine quarrée 1825201, plus grand que 1825200, eſt 1351; donc DB eſt moindre que 1351, & DB+BA moindre que 1351+1560, ou que 2911. Puis donc que nous avons trouvé ci-deſſus DB+BA. DA :: BE. AE, la raiſon de DB+BA, à DA, étant moindre que la raiſon de 2911 à 780, celle de BE à AE, ſera auſſi moindre, & multipliant les deux termes par 100, la raiſon de BE à AE, ſera moindre que celle de 291100 à 78000. Ainſi ſuppoſant AE = 78000, BE ſera moindre que 291100.

Soit donc AE = 78000, vous aurez $\overline{AE}^2 = 6084000000$, & comme BE eſt moindre que 291100, $\overline{BE}^2$ ſera moindre que 84739210000, & $\overline{BA}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{AE}^2$, moindre que 84739210000 +6084000000, ou 90823210000; mais la racine quarrée de 90826890625, plus grand que 90823210000, eſt 301375; donc BA eſt moindre que 301375, & EB+BA moindre que 291100 +301375, ou que 592475: puis donc que nous avons trouvé EB+BA. EA :: BF. FA, la raiſon de EB+BA à EA, étant moindre que celle de 592475 à 78000, la raiſon de BF à FA, ſera auſſi moindre, & diviſant 592475, & 78000, chacun par 325, puis multipliant les quotiens par 11, la raiſon de BF à FA, ſera moindre que celle de 20053 à 2640; ainſi ſuppoſant FA = 2640, BF ſera moindre que 20053.

Soit donc FA = 2640, vous aurez $\overline{FA}^2 = 6969600$, & comme BF eſt moindre que 20053, $\overline{BF}^2$ ſera moindre que 402122809, & $\overline{BA}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{FA}^2$, moindre que 402122809 +696960, ou que 409092409; mais la racine de 409131529, plus grand que 409062409, eſt 20227; donc BA eſt moindre que 20227, & FB+BA, moindre que 20053+20227, ou que 40280. Puis donc que nous avons trouvé FB+BA. FA :: BG. GA, la raiſon de FB+BA à FA, étant moindre que celle de 40280 à 2640, celle de BG à GA, ſera auſſi moindre, & diviſant 40280, & 2640 par 40, puis multipliant les quotiens par 6, la raiſon de BG à GA, ſera moindre que celle de 6042 à 396. Ainſi ſuppoſant GA = 396, BG ſera moindre que 6042.

Soit donc GA = 396, vous aurez $\overline{GA}^2$ = 156816, & comme BG eſt moindre que 6042, $\overline{BG}^2$ ſera moindre que 36505764, & $\overline{BA}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{BG}^2$, moindre que 156816 + 36505764, ou que 36662580; mais la racine de 36663025, plus grand que 36662580, eſt 6055; donc BA eſt moindre que 6055, & GB + BA, moindre que 6042 + 6055, ou que 12097. Puis donc que nous avons trouvé ci-deſſus GB + BA. GA :: BH. HA; la raiſon de GB + BA à GA, étant moindre que celle de 12097 à 396; celle de BH à HA, ſera auſſi moindre, & multipliant 12097, & 396 par 2, la raiſon de BH à HA, ſera moindre que celle de 24194 à 792. Ainſi ſuppoſant HA = 792, BH ſera moindre que 24194.

Soit donc HA = 792, vous aurez $\overline{HA}^2$ = 627264, & comme BH eſt moindre que 24194, $\overline{BH}^2$ ſera moindre que 585349636; & $\overline{BA}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HA}^2$, moindre que 585349636 + 627264, ou que 586976900; mais la racine de 585978849, plus grande que 585976900, eſt 24207; donc BA eſt moindre que 24207, & la raiſon de AH à BA, eſt plus grande que la raiſon de 792 à 24207, & diviſant 792, & 24207 par 3, la raiſon de AH à BA, eſt plus grande que celle de 264 à 8069; & par conſéquent la raiſon de 96AH à BA, eſt plus grande que celle de 96×264 à 8069, ou de 25344 à 8069. Mais 8069 multiplié par $3\frac{17}{71}$, fait $25343\frac{34}{71}$, moindre que 25344; donc quand nous ſuppoſerions même que la raiſon de 96AH, c'eſt-à-dire du circuit du polygone au diametre BA, ſeroit égale à celle de 25344 à 8069, multipliant le diametre par $3\frac{10}{71}$, le circuit ſeroit encore plus grand que le diametre ainſi multiplié, puiſqu'ils ſeroient l'un à l'autre comme 25344 à $25343\frac{34}{71}$. Donc, &c.

## COROLLAIRE I.

22. Si l'on ſuppoſe donc que le diametre ſoit 7, la circonférence ſera un peu moins de 22, & un peu plus de $21\frac{10}{71}$. Ordinairement on ſe ſert du rapport 7. 22; mais lorſqu'on en veut de plus exacts, on employe des nombres plus grands, parce qu'alors la difference devient moindre. Ainſi en ſuppoſant avec Adrien Metius, que le diametre ſoit 113, la circonference ſera 355, ou

bien supposant le diametre 1000, la circonference sera 3141, & nous nous servirons de ce dernier rapport dans le cours de cet Ouvrage, à cause que dans les regles de trois qu'il faut faire, le nombre 1000 épargne quelquefois une multiplication & quelquefois une division.

## COROLLAIRE II.

23. Pour mesurer donc l'aire du cercle ABCD (*Fig.* 14.); mesurez son rayon OB, & supposé qu'il soit de 3 pieds, son diametre en contiendra 6; ainsi vous ferez cette analogie, 1000 est à 3141, comme 6 est à la circonference du cercle ABCD, & la regle de trois vous donnera 18 pieds 10 pouces, & environ 2 lignes pour la circonference; multipliant donc 18 pieds, 10 pouces, 2 lignes, par 3 pieds, qui est la valeur du rayon, vous aurez pour produit 1 toise quarrée 3 pieds 5 pouces 2 lignes de toise quarrée & la moitié de ce produit, qui est 4 pieds 8 pouces 7 lignes de toise quarrée, sera la valeur de l'aire du cercle, puisque cette aire étant égale au triangle, qui a pour base la circonference, & pour hauteur le rayon, il faut pour avoir l'aire de ce triangle, multiplier la circonference par le rayon, & en prendre la moitié.

## COROLLAIRE III.

24. Que si vous ne pouviez pas mesurer le rayon, & qu'on vous dit seulement que la circonference contient 18 pieds, 10 pouces, 2 lignes, vous feriez cette analogie, 3141 est à 1000, comme 18 pieds 10 pouces 2 lignes sont au diametre du cercle ABCD, & la regle de trois vous donneroit 6 pieds pour le diametre; ainsi le rayon seroit 3 pieds, & vous trouveriez ensuite l'aire de même que dans le Corollaire précedent.

## COROLLAIRE IV.

25. *L'aire d'un cercle ABCD* (Fig. 18.), *est à celle de son quarré circonscrit EFGH, comme la circonference est au quadruple du diametre, c'est-à-dire, comme* 3141 *à* 4000. Tirant les diagonales EH, GF, le quarré sera partagé en quatre triangles égaux & équiangles, qui ont tous pour base une ligne égale au diametre, & pour hauteur le rayon OP, & ces quatre triangles sont égaux à un seul triangle, qui auroit pour base quatre fois le diametre, & pour hauteur le rayon OF (*n.* 20.). Mais le cercle est égal à un triangle qui a pour base la circonference, & pour hauteur le même rayon;

donc puisque le triangle égal au quarré & le triangle égal au cercle, ont même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs bases, & par conséquent comme 4000 à 3141.

## COROLLAIRE V.

26. *Il suit du Corollaire précedent que l'aire du cercle est au quarré OPHQ du rayon, comme* 3141 *à* 1000, *ou comme la circonference au diametre.* Le rayon n'étant que la moitié du diametre, son quarré n'est par conséquent que le quart du quarré du diametre; or l'aire du cercle est au quarré du diametre comme 3141 à 4000; donc elle est au quarré du rayon comme 3141 à 1000.

## COROLLAIRE VI.

27. *L'aire du cercle est à celle du quarré inscrit comme la circonference au double du diametre.* Le quarré inscrit n'est que la moitié du quarré circonscrit (*Partie* 1. *n.* 342.); or l'aire du cercle est au circonscrit comme 3141 à 4000: donc elle est au quarré inscrit comme 3141 à 2000.

## COROLLAIRE VII.

28. *L'aire du cercle est au quarré de sa circonference développée en ligne droite, comme le quart du diametre est à la circonference, ou comme* 250 *à* 3141, *ou bien comme le diametre entier* 1000 *est à* 12564, *ou au quadruple de la circonference.* L'aire du cercle étant égale à un triangle qui a pour base la circonference, & pour hauteur le rayon, est par conséquent égale à un rectangle qui a pour base la circonference, & pour hauteur le demi-rayon ou le quart du diametre. Or le quarré de la circonference ayant même base que ce rectangle, ces deux figures sont entr'elles comme leurs hauteurs; donc elles sont comme le quart du diametre à la circonference, ou comme le diametre entier à quatre fois la circonference.

## PROBLEME IX.

29. *Mesurer un secteur de cercle ABC* (Fig. 19.), *c'est-à-dire l'espace renfermé entre les rayons AB, BC, & l'arc AEC, ou celui qui est renfermé entre les mêmes rayons & l'arc ADC.*

Si la valeur du rayon & celle de l'arc AEC, vous sont connuës en toises, pieds, ou pouces, ou en quelqu'autre mesure dont on se serve, multipliez l'arc AEC par le rayon, & la moitié du pro-

duit sera le petit secteur AECB; de même multipliez l'arc ADC par le rayon & la moitié du produit sera la valeur du grand secteur AEDB; car le cercle entier étant égal à un triangle qui a pour base la circonference & pour hauteur le rayon, le secteur qui a même hauteur que le cercle, doit être égal à un triangle qui a pour base la partie de la circonference qui forme son arc, & pour hauteur le rayon.

Que si sçachant la valeur du rayon en toises, pieds, ou pouces, vous sçavez seulement que l'arc AEC, ou ADC, est d'un certain nombre de degrez, comme par exemple 40, vous chercherez d'abord la valeur de l'aire entiere par le Probleme précedent, puis vous ferez cette analogie: 360 degrez qui sont la valeur de la circonference entiere, sont à 40 valeur de l'arc AED, comme l'aire entiere du cercle est à l'aire du secteur AECB, & la regle de trois vous donnera la valeur du petit secteur. De même en supposant l'aire du grand secteur de 320 degrez, vous direz 360 est à 320, comme l'aire du cercle est à l'aire du grand secteur.

Si le rayon AB, & la corde AC, vous étoient connus en toises, pieds, ou pouces, & que vous ne connussiez la valeur de l'arc AEC, ni en toises, pieds, ou pouces, ni en degrez, vous prendriez la moitié AH de la corde AC, & alors connoissant dans le triangle rectangle AHB, le côté AH, & l'hypotenuse AB, vous trouveriez facilement par la Trigonometrie la valeur de l'angle ABH; & par conséquent celle de l'angle ABC, double de ABH: ainsi l'arc AEC, étant connu, vous chercheriez l'aire du petit secteur AECB, comme ci-dessus, & l'aire de celui-ci étant trouvée, vous auriez facilement celle du grand secteur, puisqu'en retranchant le petit secteur de l'aire entiere du cercle, le reste seroit le grand secteur.

Si on ne connoissoit que la perpendiculaire BH, & la corde AC, on pourroit aisément connoître par la Trigonometrie l'hypotenuse AB, & l'angle ABH, & par conséquent trouver encore l'aire du secteur. De même si on ne connoissoit que la *fleche* EH, & la corde, on connoîtroit aisément dans le triangle rectangle AHE, l'angle EAH, c'est-à-dire la moitié de l'arc CE, & par conséquent quadruplant cette valeur, on auroit celle de l'arc ACE. Après quoi dans le triangle rectangle AHB, on connoîtroit le côté AH, l'angle droit AHB, & l'angle aigu ABE, qui vaut la moitié de l'arc AEC; ainsi l'on connoîtroit bientôt l'hypo-

tenuse AB, qui est le rayon, & par ce moyen l'aire du secteur se trouveroit de même qu'auparavant. Enfin si on ne connoissoit que les deux cordes AC, AE, on résoudroit le triangle rectangle AEH, ce qui donneroit la connoissance de l'arc AEC, ensuite on résoudroit le triangle rectangle AHB, ce qui donneroit la connoissance du rayon.

## PROBLEME X.

30. *Mesurer un segment de cercle* (Fig. 19.)

Pour avoir l'aire du petit segment AEC, mesurez le secteur AECB par le Probleme précedent, retranchez-en la valeur du triangle ABC, le reste sera l'aire du petit segment. De même pour avoir l'aire du grand segment ADC, mesurez le grand secteur ADBC, ajoûtez à ce secteur l'aire du triangle ABC, & vous aurez le grand segment, ce qui n'a pas besoin de démonstration.

## PROBLEME XI.

31. *Mesurer une bande de cercle ADCH, c'est-à-dire un espace renfermé entre deux cordes AC, DH* (Fig. 20.), *soit que ces cordes soient paralleles, ou qu'elles ne le soient pas.*

Il est évident que si on retranche de l'aire entiere du cercle celle des deux segmens ABC, DEH, formés par les cordes, le reste sera la valeur de la bande ADCH.

## PROBLEME XII.

32. *Mesurer une couronne ABCDEHIL, formée par deux circonferences concentriques* (Fig. 21.).

De l'aire du grand cercle EHIL, retranchez l'aire du petit ABCD, le reste sera l'aire de la couronne, ce qui est évident.

Ou bien ajoûtez ensemble les deux circonferences, & multipliant la moitié de la somme par la difference CI, du grand rayon au petit, le produit vous donnera l'aire de la couronne; car si sur l'extrêmité I du grand diametre vous élevez la perpendiculaire IS, égale à la grande circonference, & que vous tiriez la droite OS, le triangle rectangle OIS, sera égal au grand cercle (*n.* 21.), & si sur l'extrêmité C du petit diametre, vous élevez la perpendiculaire CR égale à la petite circonference, le triangle rectangle OCR, sera égal au petit cercle. Or ces deux triangles sont semblables, à cause que les circonferences étant entr'elles comme les rayons (*Partie* 1. *n.* 271.) on a OC. OI :: CR. IS.

Donc

Donc le petit triangle eſt tout entier dans le grand, & les points O, R, S, ſont en ligne droite; ôtant donc le petit triangle du grand, le Trapezoïde reſtant TRSI, ſera égal à la couronne: mais ce trapezoïde eſt égal à la moitié de la ſomme des côtez CR, IS, multipliée par la hauteur CI (*n.* 15.). Donc la couronne eſt égale à la moitié de la ſomme des circonferences multipliée par la difference CI des rayons.

Ou bien encore prenez une moyenne proportionnelle AP, entre la ſomme IA, du grand & du petit diametre, & leur différence AE, le cercle décrit par le rayon AP, ſera égal à la couronne. Car ſi du centre O, on tire la ligne OP, on aura dans le triangle rectangle OAP, le quarré de l'hypotenuſe OP, égal aux quarrez des côtez OA, AP. Mais ſi l'on prend les trois côtez de ce triangle pour rayons de trois differens cercles, les aires de ces cercles ſeront aux quarrez de leurs rayons comme 3141 à 1000 (*n.* 26.). Donc ces aires ayant même rapport aux quarrez de leurs rayons, ſeront entr'elles comme ces quarrez; ainſi le cercle décrit par le rayon OP, c'eſt-à-dire le grand cercle, ſera égal au cercle du rayon OA, plus celui du rayon AP. Si donc du grand cercle on retranche le cercle du rayon OA, c'eſt-à-dire le petit cercle, il reſtera le cercle du rayon AP, qui ſera par conſéquent égal à la couronne.

## REMARQUE.

33. Pour abreger la ſeconde pratique que nous venons d'enſeigner, il faut partager la difference CI, des deux rayons en deux parties égales en T, & meſurer la circonference dont le rayon ſeroit la ligne OT, laquelle circonference étant multipliée par la difference CI, donnera la valeur de la couronne. Car ſi du point T, on tire TV, parallele à CR, ou à IS, on aura OC. OT :: CR. TV. Donc CR, étant la circonference du rayon OC, celle du rayon OT, ſera TV, à cauſe que les circonferences ſont entr'elles comme les rayons. Mais TV, coupe les côtez CI, RS, non paralleles du trapezoïde CRSI, chacun en deux également; donc abbaiſſant la perpendiculaire VX, la droite IX, ſera égale à la moitié de la ſomme des côtez CR, IS (*n.* 15.); donc le produit de IX par CI, ſera la valeur du trapezoïde, & par conſéquent de la couronne. Mais TV eſt égal à IX, à cauſe des paralleles CI, VX; donc le produit de TV par CI, eſt égal à la couronne.

## PROBLEME XIII.

34. *Mesurer un secteur d'un polygone regulier* (Fig. 22.).

Si vous connoissez le rayon OB, & le côté BC, doublez ce côté, parce que le petit secteur contient deux côtez du polygone, & multipliez ce double par l'apotheme OH, qui vous donnera le petit secteur BOD; retranchez ce petit secteur de l'aire entiere du polygone, & vous aurez le grand secteur.

Si vous ne connoissez que le rayon & l'angle BOD, prenez la moitié de cet angle, & vous aurez l'angle du centre BOC, après quoi il vous sera facile de connoître dans le triangle isoscele BOC, la base BC, ou le côté du polygone, & d'achever le reste comme nous venons de dire.

## PROBLEME XIV.

35. *Mesurer un segment de polygone* (Fig. 22.).

Mesurez le secteur BODC, & retranchez-en le triangle BDC, le reste sera le petit segment BCD, & ce petit segment étant retranché de l'aire entiere du polygone, le reste sera le grand segment.

## PROBLEME XV.

36. *Mesurer une bande BDAE, comprise entre deux segmens BCD, AEB, d'un polygone* (Fig. 22.).

De l'aire entiere du polygone retranchez celle des deux segmens, & le reste sera l'aire de la bande BDAE.

## PROBLEME XVI.

37. *Mesurer une bande faite par les contours de deux polygones concentriques* (Fig. 23.).

Retranchez le petit polygone GHIKLN, du grand ABCDEF, & le reste sera la valeur de la bande.

Ou bien prenez la moitié des deux contours, & multipliez-la par la difference RP des apothemes. Car la bande étant composée de plusieurs trapezoïdes, dont la hauteur est la ligne RP, c'est la même chose de multiplier la moitié des deux côtez paralleles de chaque trapezoïde par sa hauteur RP, & d'ajoûter ensemble les produits, que de multiplier tout d'un coup la moitié de toutes les paralleles par la même hauteur RP.

Ou bien enfin, tirez une ligne qui coupe en deux également

toutes les lignes non paralleles des trapezes, & multipliez cette ligne par la hauteur RP (*n.* 33.).

## PROBLEME XVII.

38. *Mesurer une bande ABCDEFGHIKLM à retours* (Fig. 24.)

Ajoûtez ensemble les deux contours ABCDEF, GHIKLM; & prenant la moitié de leur somme, multipliez-la par la hauteur AG, de la bande, le produit sera l'aire qu'on demande. Car la bande étant composée de plusieurs trapezoïdes, qui ont tous la même hauteur, c'est la même chose de multiplier la moitié des côtez paralleles de chaque trapezoïde par sa hauteur, & d'ajoûter ensuite les aires trouvées, que de multiplier tout d'un coup la moitié de tous les côtez paralleles par la même hauteur.

Ou bien tirez une ligne qui divise en deux parties égales les côtez non paralleles des trapezoïdes, & multipliez cette ligne par la hauteur AC, ce qui vous donnera également l'aire cherchée.

## PROBLEME XVIII.

39. *Mesurer une figure reguliere ou irreguliere, hors de laquelle on ne peut sortir, & dont le milieu est embarassé.* (Fig. 25.)

Mesurez deux côtez contigus AF, FE, & l'angle compris AFE, puis concevez le triangle AFE, duquel connoissant les deux côtez AF, FE, & l'angle compris, il vous sera aisé de connoître le côté AE, & les angles FAE, FEA. C'est pourquoi retranchant de l'angle FAB, l'angle FAE, le reste sera l'angle EAB; mesurez donc le côté AB, & concevez le triangle ABE, duquel vous connoîtrez les deux côtez AE, AB, & l'angle compris EAB, ce qui vous fera aisément connoître le côté BE, & les angles ABE, EBA. Continuant de la même façon, vous connoîtrez tous les côtez & les angles des triangles restans BEC, CED; & comme les quatre triangles EFA, EAB, EBC, ECD, composent l'aire entiere qu'on demande, il n'y aura plus qu'à chercher les hauteurs de ces triangles, c'est-à-dire les perpendiculaires tirées de l'un de leurs angles sur le côté opposé, ce que nous avons enseigné dans la Trigonometrie, après quoi il vous sera aisé de trouver la valeur de chaque triangle, & la somme des valeurs sera l'aire demandée.

## PROBLEME XIX.

40. *Mesurer une figure reguliere ou irreguliere, dont on ne peut approcher que par les dehors* (Fig. 25.).

Prolongez le côté FA, & mesurez l'angle IAB, ce qui vous donnera l'angle interne BAF, puisqu'il est le complément de l'angle IAB, à deux angles droits, cherchez de même les autres angles internes ABC, BCD, &c. puis mesurez les côtez AF, FE, & concevant la ligne AE, vous connoîtrez dans le triangle AFE, les côtez AF, FE, & l'angle compris AFE, c'est pourquoi le côté AE, & les angles FAE, FEA, vous seront aisément connus; & achevant le reste comme dans le Probleme précedent, vous trouverez l'aire de la figure.

Ou bien supposant que la figure à mesurer soit le pentagone irregulier ABCDE (*Fig.* 26.), tirez des lignes paralleles aux côtez, & qui en soient également éloignées, ces paralleles formeront une figure semblable à la figure ABCDE; tirant donc des angles F, G, H, I, L, des lignes droites qui passent par les angles A, B, C, D, E, ces lignes se rencontreront en un même point O, au-dedans de la figure, ce qui vous donnera cinq triangles, dans chacun desquels la base & les angles sur la base pouvant être mesurés, vous connoîtrez aisément les côtez & l'angle du sommet; ainsi cherchant les perpendiculaires de ces triangles, vous aurez facilement leurs aires, & par conséquent la valeur du polygone FGHIL, dont vous ôterez la bande FGHILABCDE, & le reste sera la valeur du polygone demandé.

## PROBLEME XX.

41. *Mesurer une figure reguliere ou irreguliere inaccessible ABCD* (Fig. 27.).

Prenez quatre stations E, F, G, H, de chacune desquelles vous puissiez voir deux côtez. Puis mettant le graphometre en E, visez en A, en D & en C, & mesurez les angles AED, HED, HEA, CED, FED, FEC, transportez ensuite le graphometre en F, & mesurez de même les angles DFE, CFE, CFD, &c. Cela fait, la base EF des triangles DEF, CEF, & leurs angles sur cette base étant connus, vous connoîtrez les côtez par la Trigonometrie, & alors dans le triangle EDC, connoissant les côtez CE, DE, & l'angle compris, il vous sera aisé de connoître

le côté DC, & l'angle CDE. Cela fait, transportant le graphometre en H, & faisant les mêmes operations, vous connoîtrez le côté AD, & l'angle ADE, ce qui vous donnera l'angle ADC, de la figure, parce qu'il est le complément des deux ADE, CDE à 180 degrez. Vous chercherez de même les autres angles A, B, C, de la figure, & les côtez AB, BC; après quoi concevant la diagonale DB, vous connoîtrez facilement la base DB, des deux triangles DAB, DCB, & leurs angles sur la base, ce qui vous fera trouver leurs hauteurs, c'est-à-dire les perpendiculaires sur la base BD, & par-là vous aurez l'aire de la figure.

## PROBLEME XXI.

42. *Mesurer une surface environnée de lignes courbes* (Fig. 28.)

Inscrivez dans cette surface un polygone regulier ou irregulier ABCD, le plus grand qu'il se pourra; des extrêmitez de la surface tirez sur les côtez de ce polygone des perpendiculaires fort proches les unes des autres, & regardant les parties de la courbe compriſes entre ces perpendiculaires, comme si c'étoient des lignes droites, mesurez les trapezoïdes & les triangles que les perpendiculaires forment, & ajoûtant ensemble leurs valeurs, ajoûtez-en la somme à la valeur du polygone inscrit, le total sera la valeur assez juste, ou à très-peu de chose près, de la surface cherchée.

Cette façon de mesurer ces sortes de surfaces, est la plus exacte de toutes, & il est évident qu'elle le deviendra d'autant plus que les perpendiculaires seront plus proches les unes des autres.

## PROBLEME XXII.

43. *Mesurer une surface curviligne, dans laquelle on ne peut pas entrer* (Fig. 29.).

Circonscrivez à cette surface un polygone regulier ou irregulier ABCD, le plus petit qui se puisse. Puis des extrêmitez de la surface curviligne, tirez des perpendiculaires au perimetre du polygone, ce qui vous donnera des trapezoïdes, des trapezes & des triangles, dont vous retrancherez la valeur de celle du polygone circonscrit, & le reste sera la valeur de la surface cherchée.

## PROBLEME XXIII.

44. *Mesurer une surface curviligne, dont on ne peut approcher.* (Fig. 29.).

Circonscrivez autour de la surface un polygone regulier ou irregulier CDPR, puis prenez sur son perimetre des points assez près les uns des autres, comme H, L, qui sont les seuls que nous avons marqués pour ne pas broüiller la figure, & de ces points visez aux extrêmitez de la surface curviligne, en sorte que les rayons visuels HI, LS, soient paralleles, ce qui vous donnera des trapezoïdes, des trapezes & des triangles qu'il sera facile de mesurer. Car par exemple, pour mesurer le trapezoïde HILS, visez de H en S, & mesurez les angles SHL, SLH, & la ligne LH, alors ayant le côté LH du triangle HLS, & les deux angles sur ce côté, il vous sera facile de connoître la ligne LS; visant de même de L en I, vous connoîtrez, en faisant la même operation, la ligne HI, après quoi la perpendiculaire entre ces deux lignes, se trouvera aisément, & ainsi des autres. La somme des trapezoïdes, des trapezes & des triangles étant trouvée, vous la retrancherez de l'aire du polygone circonscrit, & le reste sera la valeur de la surface cherchée.

## REMARQUE I.

45. Toutes les operations que nous avons dit de faire par la Trigonometrie dans ce Probleme, & dans les précedens, peuvent se faire aussi sans Trigonometrie, en rapportant les angles sur le papier, & mesurant la valeur des lignes au moyen d'une échelle, comme il a été dit dans la Longimetrie.

## REMARQUE II.

46. Quand on se sert du graphometre, le rayon visuel tiré de H en I, n'est pas le même que la ligne HI, qui part du pied de l'instrument posé en H; car le graphometre étant élevé au-dessus du terrein, le rayon visuel forme avec la ligne HI, & le pied de l'instrument, un triangle rectangle dont il est l'hypotenuse, & par conséquent ce rayon est plus grand que la ligne HI; c'est pourquoi pour avoir cette ligne, il faut mettre entre les points H, I, un piquet qui soit sur la direction du rayon visuel, & tirer ensuite du point H, au pied du piquet une ligne droite, & mesurer l'angle IHL, sur le terrein même avec le recipiangle; ce

qu'on doit observer à l'égard de toutes les autres lignes.

### REMARQUE III.

47. Nous parlerons ailleurs de la maniere de lever un plan, une carte, &c. & de la façon de mesurer les surfaces qui ont des lignes courbes regulieres, comme les ovales, paraboles, &c.

## SECTION II.

### *Des Rapports composés des surfaces.*

### DEFINITION III.

48. Deux ou plusieurs raisons étant données, si l'on multiplie les antecedens par les antecedens, & les conséquens par les conséquens, les deux produits formeront ce qu'on appelle une *raison composée*, & les raisons dont on multiplie les antecedens & les & les conséquens, s'appellent *raisons composantes*. Soient par exemple, les raisons 2. 4, 3. 9, le produit des antecedens 2, 3, est 6, & celui des conséquens 4, 9, est 36, la raison 6. 36 de ces deux produits, est composée des raisons 2. 4 & 3. 9. car la maniere de contenir où l'exposant de la raison 2. 4 est 2, celui de la raison 3. 9 est 3, & ces deux exposans étant multipliés l'un par l'autre, donnent 6, qui est l'exposant de la raison composée 6. 36, de sorte que par le mot de *raison composée*, on doit entendre une multiplication. Soient de même les trois raisons 2. 4, 3. 9, 2. 8, le produit des trois antecedens 2. 3, 2. est 12, & celui des trois conséquens 4, 9, 8 est 288, la raison 12. 288 de ces deux produits est composée de trois raisons 2. 4, 3. 9, 2. 8; car son exposant 24, est le produit des trois exposans 2, 3, 4, lesquels multipliés les uns par les autres, font aussi 24.

### DEFINITION IV.

49. Toute raison composée de deux raisons égales, s'appelle *raison doublée* de l'une des deux composantes, & toute raison composée de trois raisons égales, s'appelle *triplée* de l'une des trois composantes. La raison 6. 24, composée des deux raisons 2. 4, 3. 6, est *doublée* de la raison 2. 4, ou de la raison 3. 6. car son exposant 4, étant le produit des deux exposans égaux 2, 2 des raisons composantes, est égal à l'un de ces exposans multiplié par lui-même. Il est évident aussi que la raison 6. 48, composée de

trois raisons égales 1. 2, 2. 4, 3. 6, est *triplée* de l'une de ces trois raisons ; car son exposant 8 étant le produit des trois exposans égaux 2, 2, 2, est égal à l'un de ces exposans multiplié deux fois successivement par lui-même.

## DEFINITION V.

50. Les quarrez sont dits en raison doublée de celle de leurs racines, & les cubes en raison triplée. Soient les quarrez, 4, 9, dont les racines sont 2, 3, si l'on prend les deux raisons égales 2. 3, 2. 3, la raison qui en sera composée, sera 4. 9, c'est-à-dire les quarrez, & cette raison est doublée de la raison 2. 3 des racines, puisqu'elle est composée de deux raisons égales. De même soient les cubes 8, 27, dont les racines cubiques sont 2, 3, si l'on prend les trois racines égales 2. 3, 2. 3, 2. 3, la raison qui en sera composée, sera 8. 27, c'est-à-dire les cubes qui seront par conséquent en raison triplée de la raison 2. 3. des racines.

## DEFINITION VI.

51. Si l'on multiplie les termes d'une proportion 2. 4 :: 3. 6, par ceux d'un autre proportion 1. 4 :: 2. 8, on aura deux raisons composées 2. 16, 6. 48, dont les termes seront encore en proportion ; car les exposans 2, 4, des raisons 2, 4, 1. 4, qui composent la raison, 2. 16 étant les mêmes que les exposans 2, 4, des raisons 3. 6, 2. 8, qui composent la raison 6. 48 ; ces deux raisons composées 2. 16, 6. 48, doivent avoir le même exposant 8, qui est le produit de l'exposant 2 par l'exposant 4, & par conséquent elles sont égales:

2. 4 :: 3. 6
1. 4 :: 2. 8
2. 16 :: 6. 48

## DEFINITION VII.

52. Si l'on a plusieurs grandeurs de suite 2. 4. 6, 9, 12, &c. la raison de la premiere à la troisiéme, est composée de celle de la premiere à la seconde, & de celle de la seconde à la troisiéme ; de même la raison de la premiere à la quatriéme, est composée de celle de la premiere à la seconde, de la seconde à la troisiéme, & de la troisiéme à la quatriéme, & en général la raison d'un terme à un autre terme éloigné de lui, est composé des raisons qui sont entre deux. Par exemple, la raison du 1er terme, 2 au troisiéme, 6 est composée des raisons 2. 4, 4. 6 ; car la raison composée de ces deux est 8. 24 ; or ces deux termes 8, 24, ont une racine

racine commune 4 : ainsi divisant l'un & l'autre par 4, les quotiens 2, 6, seront entr'eux comme 8 & 24 (*Partie* 1. *n.* 250.), & par conséquent en raison composée des deux composantes. De même la raison du 1. terme 2 au quatriéme 9, est composée des trois 2. 4, 4. 6, 6, 9 ; car la raison composée de ces trois, est 48. 216. Or ces deux termes 48 & 216, ont deux racines égales 4 & 6, dont le produit est 24 ; divisant donc l'un & l'autre par 24, les quotiens 2 & 9 seront entr'eux comme 48 & 216, c'est-à-dire en raison composée des trois raisons 2. 4, 4. 6, 6. 9.

## DEFINITION VIII.

53. Si l'on a plusieurs grandeurs de suite, 2. 4, 8. 16, &c. en progression géometrique, la raison du premier au troisiéme, est doublée de celle du premier au second, puisqu'elle est composée de deux raisons égales ; celle du premier au quatriéme est triplée de celle du premier au second, puisqu'elle est composée de trois égales, &c. D'où il suit que le premier est au troisiéme, comme le quarré du premier au quarré du second, parce que ces quarrez sont en raison doublée de celle du premier au second (*n.* 50.), & que le premier est au quatriéme comme le cube du premier est au cube du second ; car ces cubes sont aussi en raison triplée du premier au second.

## DEFINITION IX.

54. Plusieurs grandeurs en progression géometrique étant données, si le premier terme n'est pas au troisiéme comme un nombre quarré à un nombre quarré, le premier & le second sont dits incommensurables entr'eux, & commensurables en seconde puissance. Soit le premier terme 2, & le troisiéme 4, le quarré 4 du premier, sera au quarré du second, comme 2 est à 4, par les définitions précedentes ; ainsi le quarré du second sera 8 : pour avoir donc le premier & le second terme, il faudroit pouvoir tirer les racines quarrées de leurs quarrés 4 & 8 ; mais 8 n'est pas un nombre quarré dont on puisse extraire la racine en nombres ; donc le premier & le second termes sont incommensurables entr'eux, & commensurables en seconde puissance, puisque leurs quarrés sont 4 & 8.

Si le premier terme & le troisiéme sont incommensurables entr'eux, le premier & le second sont incommensurables non seulement entr'eux, mais encore en seconde puissance : car le quarré

du premier étant au quarré du second comme le premier est au troisiéme, ces quarrés seront incommensurables, & leurs racines le seront aussi.

Si le premier étant incommensurable au troisiéme, est commensurable au quatriéme, le premier & le second seront incommensurables entr'eux & en seconde puissance; mais ils seront commensurables en troisiéme puissance, puisque leurs cubes seront entr'eux comme le premier au quatriéme.

Si le premier n'est pas au quatriéme comme un nombre cube à un autre nombre cube, le premier & le second seront incommensurables entr'eux & en seconde puissance, & commensurables en troisiéme; car leurs cubes étant entr'eux comme le premier au quatriéme, seront commensurables; mais on ne pourra pas en extraire la racine cubique, puisqu'ils seront comme des nombres non cubes, dont la racine ne peut se tirer.

Si le premier est incommensurable au quatriéme, le premier & le second seront incommensurables entr'eux, en seconde & en troisiéme puissance, puisque leurs cubes sont entr'eux comme le premier au quatriéme, & par conséquent incommensurables.

## DEFINITION X.

55. Si l'on a d'une part trois grandeurs 2, 3, 4, & de l'autre trois autres grandeurs 4, 6, 8, en sorte que la premiere d'une part soit à la seconde de la même part comme la premiere de l'autre part est à la seconde, & que la seconde d'une part soit à la troisiéme comme la seconde de l'autre part est à la troisiéme, la premiere d'une part sera à la troisiéme comme la premiere de l'autre part est à la troisiéme; car la raison de 2 à 4, est composée des deux raisons 2. 3, 3. 4, qui sont égales aux deux raisons 4. 6, 6. 8, dont la raison 4. 8 est composée; donc les raisons 2. 4, 4. 8 sont égales, puisqu'elles sont composées de raisons égales: & quand on conclut ainsi, cela s'appelle conclure *ex æquo ordinatè*, ou simplement *ex æquo*, c'est-à-dire en raison ordonnée.

2, 3, 4
4, 6, 8
2. 3 : : 4. 6
3. 4 : : 6. 8
donc 2. 4 : : 4. 8

Mais si on a d'une part trois grandeurs 2, 3, 4, & d'une autre trois autres grandeurs 8, 12, 6, en sorte que la premiere d'une part soit à la seconde comme la premiere de l'autre part

est à la seconde, & que la seconde de la premiere part soit à la troisiéme, comme la troisiéme de l'autre part est à la premiere; alors la premiere d'une part est à la troisiéme réciproquement, comme la troisiéme de l'autre part est à la premiere. Car la raison de 2 à 4, est composée des raisons 2. 3, & 3. 4.

2. 3. 4
8. 12. 6
2. 3 :: 8. 12
3. 4 :: 6. 8
*donc* 2. 4 :: 6. 12

& comme la raison 2. 3. est égale à la raison 8. 12. & la raison 3. 4, est égale à la raison 6. 8. la raison 2. 4, est par conséquent composée des raisons 8. 12 & 6. 8; or la raison 6. 8 est composée des deux raisons 6. 12, & 12. 8. Donc la raison 2. 4, est composée des trois 8. 12, 12. 8, 6. 12; mais les deux premieres raisons se détruisent mutuellement : car l'exposant de 8. 12, étant $\frac{2}{3}$, & l'exposant de 12. 8 étant $\frac{3}{2}$, ces exposans venant à se multiplier, ne produisent que 1, lequel venant à multiplier l'exposant $\frac{1}{2}$ de 6. 12, ne produit pour exposant de la raison composée que $\frac{1}{2}$, qui est encore l'exposant de 6. 12; donc la raison 2. 4, composée de ces trois raisons est égale à la raison 6. 12, & quand on conclud ainsi, cela s'appelle conclure *ex æquo perturbatè*, ou en raison troublée.

Tout ce que nous venons de dire dans les définitions précédentes, a été expliqué plus amplement dans notre Arithmetique des Géometres, où le Lecteur pourra avoir recours.

## PROBLEME XXIV.

56. *Une ligne AB étant donnée* (Fig. 30.) *trouver une autre ligne CD, qui soit incommensurable avec elle & commensurable en seconde puissance.*

Prenez une autre ligne EH, qui soit deux fois plus grande que AB, ou trois fois ou 5, ou 8, en un mot un nombre de fois qui ne soit pas un nombre quarré; ensuite prenez une moyenne proportionnelle CD, entre AB & EH, & cette ligne sera incommensurable avec AB, & commensurable en seconde puissance.

### DEMONSTRATION.

Les trois lignes AB, CD, EH, sont en progression géometrique; donc le quarré $\overline{AB}^2$, est au quarré $\overline{CD}^2$, comme AB, est à EH, ou comme 1 est à 2, en supposant que EH, soit double de AB; mais 2 n'est pas un nombre quarré dont on puisse exprimer la racine; donc les quarrez $\overline{AB}^2$, $\overline{CD}^2$, sont entr'eux comme des

quarrez, dont les racines qui ſont les lignes AB, CD, ne peuvent s'exprimer en nombres, & par conſéquent ces lignes ſont incommenſurables entr'elles, & commenſurables en ſeconde puiſſance, puiſque leurs quarrez ſont comme 1 à 2. (*n.* 54.).

## PROBLEME XXV.

57. *Une ligne AB étant donnée* (Fig. 31.), *en trouver un autre CD, qui lui ſoit incommenſurable en elle-même & en ſeconde puiſſance.*

Cherchez par le Probleme précedent une ligne EH, qui ſoit incommenſurable en elle-même à AB, puis prenez entre AB & EH, une moyenne proportionnelle CD, laquelle ſera incommenſurable à AB, tant en elle-même qu'en ſeconde puiſſance.

Car les quarrez $\overline{AB}^2$, $\overline{CD}^2$, étant entr'eux comme AB, & EH, ſeront incommenſurables entr'eux de même que ces deux lignes, & par conſéquent leurs racines AB, CD, le ſeront auſſi.

### COROLLAIRE I.

58. Si on vouloit trouver une ligne CD (*Fig.* 32.), qui fût incommenſurable en elle-même & en ſeconde puiſſance avec une ligne donnée AB, mais qui lui fût commenſurable en troiſiéme puiſſance, on prendroit une ligne EH, qui fût deux fois plûs grande que AB, ou trois fois ou quatre fois plus, &c. pourvû que ce nombre de fois ne fût pas un nombre cubique; après quoi on prendroit deux moyennes proportionnelles CD, PQ, entre AB, & EH, & la premiere de ces proportionnelles, c'eſt-à-dire la ligne CD, ne ſeroit commenſurable avec AB, qu'en troiſiéme puiſſance (*n.* 54.).

### COROLLAIRE II.

59. Et ſi on vouloit trouver une ligne CD, qui fût incommenſurable, même en troiſiéme puiſſance avec AB, on chercheroit une ligne qui fût incommenſurable en elle-même avec AB, puis on prendroit deux moyennes proportionnelles entre AB, & cette ligne, & la premiere de ces moyennes proportionnelles, ſeroit incommenſurable même en troiſiéme puiſſance avec AB.

## PROBLEME XXVI.

60. *Trouver quel eſt le rapport des deux rectangles ABCD*, abcd, (Fig. 33.).

Supposons que la hauteur AB du premier soit 2 toises, & sa base BC 3, la hauteur *ab* du second, 3, & sa base *bc*, 5. Comparez la base du premier à la base du second, & la hauteur à la hauteur, ce qui vous donnera deux raisons 3. 5, 2. 3, faites-en la raison composée 6. 15, & cette raison vous marquera que le premier rectangle ABCD, par lequel vous avez commencé la comparaison, est au second *abcd*, comme 6 est à 15. Car en multipliant l'antecedent 3 par l'antecedent 2 pour faire la raison composée, on multiplie la base du rectangle ABCD, par sa hauteur, & par conséquent le produit est le rectangle même; par la même raison en multipliant le conséquent 5 par le conséquent 3, le produit est le rectangle *abcd*; ainsi ces rectangles sont entr'eux comme les deux produits.

## REMARQUE.

61. On peut abreger beaucoup en multipliant les deux exposans des raisons des bases & des hauteurs, au lieu do multiplier les antecedens par les antecedens, & les conséquens par les conséquens. Car supposons que la base du premier rectangle soit 120, & sa hauteur 50, la base du second 360, & sa hauteur 200. En comparant les bases entr'elles & les hauteurs, on aura deux raisons 120. 360, 50. 200, dont les exposans sont 3 & 4; ainsi multipliant ces exposans, le produit 12 sera l'exposant de la raison composée, & cet exposant fait voir que les deux termes de la raison composée, c'est-à-dire les deux rectangles, sont entr'eux comme 1. 12, ou que le second est 12 fois plus grand que le premier. D'où l'on voit qu'on peut connoître le rapport des deux rectangles sans être obligé de connoître la valeur de leur aire, ou le produit de leurs bases par leur hauteur.

## COROLLAIRE I.

62. *Les rectangles sont entr'eux en raison composée de la raison de leurs bases & de celles de leurs hauteurs.* Il en est de même des parallelogrames comparés entr'eux, & des triangles; car les parallelogrames sont égaux aux rectangles de même hauteur & de même base qu'eux, & les triangles en sont les moitiés; ainsi ce qui convient aux rectangles leur convient également.

## COROLLAIRE. II.

63. Lorsqu'en faisant la raison composée des bases & des hau-

teurs de deux rectangles, ou de deux parallelogrames, ou de deux triangles, les termes de cette raison sont égaux; alors les bases des rectangles ou des parallelogrames, ou des triangles, sont réciproques à leurs hauteurs. Supposons que la base du rectangle ABCD, soit 4, sa hauteur 3, la base du rectangle *abcd*, 6, & sa hauteur 2, en comparant les bases & les hauteurs, on a les deux raisons 4. 6, 3. 2, dont la composée 12. 12, a ses deux termes égaux: ce qui marque que dans cette supposition les deux rectangles sont égaux; or le premier terme 12, ayant pour racines 4 & 3, & le second 12 ayant pour racines 6 & 2, si l'on met les deux premieres racines à la place des extrêmes d'une proportion, & les deux secondes à la place des moyens, on aura 4. 6 :: 2. 3, c'est-à-dire la base du premier rectangle est à la base du second, réciproquement comme la hauteur du second est à la hauteur du premier.

## COROLLAIRE III.

64. *Les rectangles, ou les parallelogrames, ou les triangles semblables, sont en raison doublée de la raison de leurs côtez homologues, ou de celles de leurs hauteurs, ou de celles de quelques lignes que ce soient semblablement posées.* Ils sont en raison composée des raisons des bases & des hauteurs. Or ces raisons sont égales à cause de la similitude; donc ils sont en raison doublée ou de la raison des hauteurs, ou de celle des bases, ou des côtez homologues, &c. parce que toutes ces raisons sont égales dans les figures semblables.

## COROLLAIRE IV.

65. *Les rectangles, parallelogrames, ou triangles semblables, sont entr'eux comme les quarrez ou de leurs bases, ou de leurs hauteurs, ou de leurs côtez homologues, ou d'autres lignes semblablement posées.* Les quarrez des bases ou des hauteurs, &c. sont en raison doublée de ces bases, ou de ces hauteurs, &c. de même que les rectangles, parallelogrames, ou triangles semblables. Donc, &c.

## COROLLAIRE V.

66. *Les polygones semblables, soit reguliers, soit irreguliers, sont entr'eux en raison doublée de leurs côtez homologues, ou de leurs circuits, ou de toutes autres lignes semblablement posées.* Ces polygones peuvent se diviser en un égal nombre de triangles semblables. Donc, &c.

Quant aux polygones qui ne sont pas semblables, il faut, si

l'on veut connoître leur rapport, les réduire auparavant ou en triangles, ou en rectangles, ou en parallelogrames, comme nous l'enseignerons plus bas.

## COROLLAIRE VI.

67. *Les cercles sont en raison doublée de leurs rayons, ou de leurs diametres, ou comme les quarrez de leurs rayons, ou comme ceux de leurs diametres.* Car les cercles sont des polygones semblables d'une infinité de côtez. Donc, &c.

## PROBLEME XXVII.

68. *Faire un quarré double, triple, quadruple, &c. d'un quarré donné ABCD.* (Fig. 34.).

Prenez une ligne EF, qui soit double, ou triple, ou quadruple, &c. du côté BC, du quarré donné; ensuite cherchez une moyenne proportionnelle EH, entre BC & EF, & le quarré de EH, c'est-à-dire le quarré EHIL, sera double, ou triple, ou quadruple, &c. du quarré ABCD. Car si l'on suppose EF, double de BC, les trois lignes BC, EH, EF, étant en progression, le quarré de BC, ou le quarré ABCD, est au quarré de EH, ou au quarré EHIL, comme BC, est à EF, c'est-à-dire comme 1 est à 2, (*n.* 53.) & par conséquent le quarré EHIL, est double du quarré ABCD.

Si on eût demandé un quarré qui ne dût être que la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. du quarré ABCD, on auroit fait la ligne EF, égale ou à la moitié, ou au tiers, ou au quart, &c. du côté BC, puis on auroit pris une moyenne proportionnelle EH, entre BC & EF, & le quarré de cette moyenne proportionnelle, n'auroit été que la moitié, ou le tiers ou le quart, &c. du quarré ABCD, ce qui se démontre de même que ci-dessus.

### *Autre maniere.*

Prenez deux lignes OP, OR (*Fig.* 35.), qui soient chacune égales au côté du quarré donné, élevez l'une perpendiculairement sur l'extrêmité de l'autre, & tirez la ligne RP, dont le quarré sera double du quarré donné; car le triangle ROP, étant rectangle, le quarré de RP, est égal aux quarrez de OR, OP, & comme ces deux quarrez sont chacun égaux au quarré donné, il s'ensuit que le quarré de RP, est double du quarré donné. De même tirez à l'extrêmité de RP, la perpendiculaire RS, égale au

côté du quarré donné, & joignez la ligne SP, dont le quarré sera triple du quarré donné ; car il sera égal au quarré de RS, qui est égal au quarré donné, plus au quarré de RP, qui en est double. Continuânt à faire de même, on trouvera que le quarré de TP, est quadruple du quarré donné, que celui de XP, en est quintuple, celui de ZP, sextuple, &c.

Cette derniere méthode ne peut pas servir, lorsqu'on demande un quarré soumultiple du quarré donné, c'est-à-dire qui en soit la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c.

## PROBLEME XXVIII.

*69. Deux quarrez ABCD, abcd, étant donnés* (Fig. 36.), *trouver deux autres quarrez qui pris ensemble, leur soient égaux.*

Prenez deux lignes EH, HI, dont la premiere soit égale au côté AB, du premier quarré, & l'autre au côté *ab*, du second. Elevez ces lignes perpendiculairement l'une sur l'autre à leur extrêmité : puis tirant la ligne EI, coupez-la en deux également en O, & du point O, pris pour centre, & de l'intervalle OE, ou OI, décrivez la demi-circonference ERI, que vous diviserez en deux également en R, par le rayon RO, perpendiculaire au diametre EI. Cela fait, prenez un point quelconque S, ou P, dans le quart de circonference, & de ce point tirez aux extrêmitez du diametre les lignes SE, SI, ou PE, PI, & les quarrez de SE, SI, ou ceux de PE, PI, pris ensemble, seront égaux aux deux quarrez donnés ABCD, *abcd*.

### DEMONSTRATION.

L'angle, EHI, étant à la circonference, & s'appuyant sur le diametre EI, est droit ; donc le triangle EHI, est rectangle, & par conséquent le quarré de l'hypotenuse EI, est égal aux quarrez des côtez EH, HI, c'est-à-dire aux quarrez donnés. Par la même raison le triangle ESI, étant rectangle, le quarré de la même hypotenuse EI, est égal aux quarrez des côtez ES, SI ; donc les quarrez des côtez ES, SI, pris ensemble, sont égaux aux quarrez des côtez EH, HI, & par conséquent aux quarrez donnés. On prouvera de même que dans le triangle rectangle EPI, les quarrez des côtez EP, PI, sont égaux aux quarrez ABCD, *abcd*.

COROL.

### COROLLAIRE I.

70. Comme le quart de circonference EHR, eſt compoſé d'une infinité de points, il eſt évident qu'on peut auſſi tirer une infinité de lignes aux extrêmitez du diametre EI, d'où il ſuit qu'on peut trouver une infinité de lignes, dont les quarrez pris deux à deux, ſoient égaux aux deux quarrez enſemble ABCD, *abcd.* Je ne parle point des lignes qu'on peut tirer de tous les points de l'autre quart de cercle RI, aux extrêmitez du diametre, parce qu'il eſt viſible que les triangles qu'elles formeroient, ne ſeroient que la répetition des précedens.

### LEMME I. POUR LE COROLLAIRE SUIVANT.

71. *Si d'un point B, hors d'un cercle* (Fig. 37.), *on tire une tangente BA, & une ligne BO, au centre, la partie extérieure BC, de la ligne BO, ſera moindre que la tangente BA.*

### DEMONSTRATION.

Prolongez BO, juſqu'à ce qu'elle coupe la circonference du cercle en D, & vous aurez :: BC. BA. BD. (*Partie* 1. *n.* 281. 282.) ainſi ces trois lignes ſont en progreſſion, & comme BC, eſt plus petite que BD, la ligne BA, moyenne proportionnelle entre ces deux lignes, eſt plus grande que BC, & moindre que BD.

### COROLLAIRE II.

72. Quoiqu'on puiſſe trouver une infinité de lignes, dont les quarrez pris deux à deux, ſoient égaux à deux quarrez donnés, cependant ces lignes ou les côtez de ces quarrez pris deux à deux, ne ſeront jamais égaux aux côtez des quarrez donnés; mais les uns ſeront plus grands, & les autres ſeront plus petits: & pour mieux déterminer ceci, ſoit la ligne AB (*Fig.* 38.), égale au côté de l'un des quarrez donnés, & la ligne BC, égale au côté de l'autre, mettez ces lignes perpendiculairement l'une ſur l'autre à leurs extrêmitez, & tirant AC, que vous diviſerez en deux également en O, décrivez le demi-cercle ADC, & tirez le rayon OD, qui le coupe en deux également en D. Cela fait, ſi vous tirez les lignes AD, DC, le triangle rectangle ADC, ſera de tous les triangles rectangles qu'on peut faire en tirant des points du quart de circonference des lignes ABD aux extrêmitez du dia-

metre, celui qui aura son sommet plus éloigné des extrêmitez A, C, du diametre; & je dis 1°. que les côtez AD, DC, de ce triangle pris ensemble, seront plus grands que les côtez AB, BC, des quarrez donnés, ou que les côtez de tout autre triangle rectangle, dont le sommet sera au quart de circonference ABD. 2°. Que les côtez des triangles, dont les sommets s'éloignent davantage de l'extrêmité A du diametre, seront plus grands que les côtez de ceux dont le sommet sera plus proche de A.

En premier lieu, tirez la ligne BD, puis du point A, pris pour centre, & de l'intervalle AB, décrivez l'arc de cercle BR, qui coupe la ligne AD, en R; de même du point C, pris pour centre, & de l'intervalle CD, décrivez l'arc de cercle DS, qui coupe BC en S, la ligne AR, sera égale à la ligne AB, & la ligne CS, à la ligne CD. Cela fait, dans le triangle BDI, l'angle BDI, ayant son sommet à la circonference, vaut la moitié de l'arc AB, qu'il embrasse, lequel est toujours moindre qu'un quart de circonference; & par la même raison l'angle DBC, vaut la moitié de l'arc DC, qui est toujours égal au quart de circonference; d'où il suit que l'angle BDI, est toujours moindre que l'angle DBC, & que le côté BI, opposé à l'angle BDI, est moindre que le côté DI, opposé à l'angle DBC. Donc si de DI, on ôte BI, de D en H, il restera HI. Comparant donc les deux côtez AD, DC, du triangle ADC, aux deux AB; BC, des quarrez donnés, vous trouverez que DC, est égal à la partie CS, du côté CB, que la partie AR, du côté AD, est égale au côté AB, & la partie DH, du même côté AD, égale à la partie BI, du côté BC; ainsi il ne reste plus des deux côtez AD, DC, que la partie RH, & des deux AB, BC, la partie IS, & il s'agit de prouver que RH, est plus grand que IS; car cela étant, les deux AD, DC, pris ensemble, seront plus grands que les deux ensemble AB, BC. Considerez donc que la ligne ID, étant tangente de l'arc DS, puisqu'elle est perpendiculaire au rayon DC, de cet arc, est plus grande que la partie IS, de la ligne IC, qui aboutit au centre C, de ce même arc par le Lemme précedent, & par la même raison la tangente BI, de l'arc BR, est plus grande que la partie RI, de la ligne AI. D'autre côté les triangles ABI, CID, étant semblables, à cause de l'angle BIA, égal à l'angle DIC, opposé au sommet, & de l'angle BAI, égal à l'angle BCD, qui s'appuye sur le même arc, si on tire les lignes BR, DS, qui retranchent de ces deux triangles les triangles isosceles ABR, CSD, qui sont aussi semblables,

à cauſe qu'ils ont l'angle du ſommet BAR, égal à l'angle du ſommet ICD, les triangles reſtans BIR, DIS, ſeront auſſi ſemblables, & vous aurez DI. BI :: IS. RI. mais DI eſt plus grand que BI; donc IS, eſt auſſi plus grand que RI : donc ſi de l'antecedent DI, vous retranchez le conſéquent BI, ou DH, & que de l'antecedent IS, vous retranchiez le conſéquent RI, ou SX, le reſte IH, ſera plus grand que le reſte IX. Donc ajoûtant à ces deux reſtes la partie commune RI, ou XS, vous aurez RH, plus grand que IS.

En ſecond lieu, faiſant la même choſe à l'égard de deux triangles rectangles EPI, EHI (*Fig.* 36.), dont les ſommets ſont entre le point A, & le point R du quart de circonference, vous prouverez de même que les deux côtez EH, HI, ſont plus grands que les deux EP, PI, dont le ſommet approche plus du point A, & ainſi des autres; donc, &c.

## PROBLEME XXIX.

73. *Faire un quarré égal à deux ou pluſieurs quarrez donnés* (Fig. 39)

A l'extrêmité du côté AB, du premier quarré, élevez perpendiculairement le côté BC, du ſecond, & tirez la ligne CA, qui ſera l'hypotenuſe du triangle rectangle ABC, & dont le quarré ſera par conſéquent égal aux deux premiers quarrez; élevez enſuite perpendiculairement ſur CA, le côté CD du troiſiéme, & tirez la ligne AD, dont le quarré ſera égal aux trois premiers quarrez. Par la même raiſon le côté DE du quatriéme, étant élevé perpendiculairement ſur AD, le quarré de EA, ſera égal aux quatre premiers quarrez, & ainſi des autres.

### COROLLAIRE.

74. Si au lieu de pluſieurs quarrez on avoit pluſieurs figures ſemblables, & qu'on en demandât une qui les égalât toutes. On éleveroit perpendiculairement ſur le côté BA de la premiere, le côté homologue BC de la ſeconde, & l'on feroit ſur l'hypotenuſe une figure ſemblable, qui ſeroit égale aux deux premieres, parce que les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrez de leurs côtez homologues. 2°. On éleveroit de même ſur AC, le côté homologue CD de la troiſiéme figure, & la figure ſemblable qu'on conſtruiroit ſur l'hypotenuſe DA, ſeroit égale aux trois premieres, & ainſi des autres. Que ſi ces figures étoient des cer-

cles, on prendroit pour les lignes AB, BC, CD, &c. les diametres de ces cercles, & celui qu'on feroit sur l'hypotenuse AD, seroit égal aux trois premiers, &c. à cause que les cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres.

## PROBLEME XXX.

75. *Deux triangles rectangles ABC, CDE, étant donnés* (Fig. 40.), *trouver un autre triangle rectangle, dont le quarré de l'hypotenuse soit égal au quarré de la somme AB+CD, des côtez AB, CD, plus au quarré de la somme BC+DE des côtez BC, DE.*

Joignez l'hypotenuse AC, à l'hypotenuse CE, en sorte qu'elles ne fassent qu'une ligne droite AE, puis sur cette hypotenuse AE, faites le triangle rectangle APE, semblable aux triangles donnés, & le quarré de l'hypotenuse AE, aura les conditions requises.

### DEMONSTRATION.

Les triangles ABC, APE, étant semblables, la ligne BC, est parallele à la ligne PE, de même les triangles DEC, PEA, étant semblables, les lignes DC, PA, sont paralleles; donc PD, est égale à BC, & PB, égale à CD. Ainsi AP, étant égal à AB+BP, est aussi égal aux deux côtez AB, CD, pris ensemble, & PE étant égal à ED+DP est aussi égal aux côtez ED, BC, pris ensemble; mais le quarré de l'hypotenuse AE, est égal au quarré de la ligne AB+BP, plus au quarré de la ligne ED+DP. Donc il est égal au quarré d'une ligne égale aux deux côtez AB, CD, plus au quarré d'une ligne égale aux deux côtez ED, BC.

## PROBLEME XXXI.

76. *Faire un quarré qui soit à un quarré donné ABCD* (Fig. 41.), *comme une ligne GH, à une autre ligne EF.*

Prenez une quatriéme proportionnelle IL, aux trois lignes EF, GH, AB, puis une moyenne proportionnelle PQ, entre AB, & IL, le quarré ABCD, sera au quarré de PQ, comme EF, à GH, & par conséquent le quarré de PQ, sera au quarré ABCD, comme GH à FE.

### DEMONSTRATION.

Les trois lignes AB, PQ, IL, étant proportionnelles, on a $\overline{AB}^2 . \overline{PQ}^2 :: AB . IL$ (*n.* 53.); mais $AB . IL :: EF . GH$, par la construction; donc $\overline{AB}^2 . \overline{PQ}^2 :: EF . GH$, & $\overline{PQ}^2 . \overline{AB}^2 :: GH . EF$.

COROLLAIRE.

77. On feroit la même chose si on demandoit une figure reguliere ou irréguliere, qui fût semblable à une figure donnée, & en raison de GH à EF, c'est-à-dire qu'on prendroit une quatriéme proportionnelle IL, aux deux EF, GH, & au côté de la figure donnée, & une moyenne PQ, proportionnelle entre le côté de la figure donnée & IL; après quoi on construiroit sur PQ, une figure semblable, qui seroit à la donnée comme GH à EF; car les figures semblables sont entr'elles comme les quarrez de leurs côtez homologues; par la même raison si on vouloit un cercle qui fût à un cercle donné, comme GH à EH, on prendroit une quatriéme proportionnelle aux deux EF, GH, & au diametre du cercle donné, & la moyenne proportionnelle qu'on prendroit entre ce diametre & la quatriéme proportionnelle, seroit le diametre du cercle demandé.

## PROBLEME XXXII.

78. *Faire un quarré égal à une progression Géometrique infinie descendante de quarrez* (Fig. 42.).

Du côté AB du premier quarré, retranchez le côté CD du troisiéme, de B en E, puis cherchez une troisiéme proportionnelle RP, aux lignes AE, AB, & une moyenne proportionnelle TV, entre AB, & RP, le quarré de TV sera égal à la progression entiere.

DEMONSTRATION.

Nous avons vû (*n.* 310. *Part.* 1.), qu'une progression infinie descendante de lignes étant donnée, la premiere moins la seconde, étoit à la premiere comme cette même premiere est à la somme de toutes les lignes. Or comme cela convient non-seulement aux lignes, mais encore aux surfaces & aux solides, il s'ensuit que le premier quarré moins le second, est au premier, comme ce même premier est à la somme de tous les quarrez; ainsi la troisiéme proportionnelle au premier quarré moins le second, & au premier quarré est égale à la somme de tous les quarrez, & il s'agit de faire voir que le quarré de TV, est cette troisiéme proportionnelle.

Considerez que les quarrez étant en progression, leurs côtez AB, BC, CD, &c. le sont aussi, parce que l'exposant des quar-

rez étant toujours le même, celui des côtez dont l'exposant des quarrez est doublé, doit être aussi toujours le même. Donc le premier quarré est au second quarré comme le côté AB du premier, est au côté CD du troisiéme, & mettant CD sur AB de B en E, le premier quarré est au second, comme AB est à EB, & par *conversion de raison*, le premier quarré moins le second, est au premier comme AB − EB est à AB, c'est-à-dire, comme AE est à AB; or par la construction la ligne AB, est à la ligne RP, comme AE est à AB, & les trois lignes AB, TV, RP, sont proportionnelles; donc $\overline{AB}^2$. $\overline{TV}^2$ :: AB. RP, ou comme AE est à AB, ou enfin comme le premier quarré moins le second est au premier. Donc le premier quarré moins le second, est au premier quarré $\overline{AB}^2$, comme ce même premier quarré $\overline{AB}^2$, est à $\overline{TV}^2$, & par conséquent $\overline{TV}^2$, étant troisiéme proportionnelle au premier quarré moins le second, & au premier quarré, est égal à la somme de tous les quarrez.

## COROLLAIRE I.

79. Si au lieu d'une progression infinie de quarrez, on en avoit une de figures semblables, on feroit les mêmes operations sur les côtez homologues de ces figures, & si c'étoient des cercles, on les feroit sur leurs diametres.

## COROLLAIRE II.

80. J'ai tiré ce Probleme & sa résolution de la Géometrie Pratique du Pere Tacquet; mais on peut le résoudre bien plus facilement en cette sorte: Je prens une ligne *ab*, égale au côté AB du premier quarré, je décris sur cette ligne prise pour diametre, un demi-cercle *acb*, je prens le côté BC du second quarré, & je porte sur le demi-cercle de *b* en *c*, enfin je tire la ligne *ac*. Ainsi dans le triangle rectangle *acb*, j'ai $\overline{ab}^2 = \overline{cb}^2 + \overline{ac}^2$, & par conséquent $\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 - \overline{bc}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$. Je prens une troisiéme proportionnelle aux lignes *ac*, *ab*, que j'appelle $x$, & j'ai :: *ac*. *ab*. $x$; donc :: $\overline{ac}^2$. $\overline{ab}^2$. $x^2$, ou :: $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$. $\overline{AB}^2$. $x^2$; donc le quarré $x^2$ est égal à la somme des quarrez; puisque cette somme doit être troisiéme proportionnelle au premier quarré, moins le second, & au premier quarré (*Partie 1. n. 310.*)

### COROLLAIRE III.

81. En employant cette seconde maniere, on peut rendre le Probleme général pour toutes sortes de progressions descendantes, soit que le nombre des termes soit infini, ou fini, & pour les progressions ascendantes, dont le nombre des termes est fini.

Supposons, par exemple, que le dernier terme de la progression descendante, soit le quaré FG, je décris le demi-cercle de même que ci-dessus, & j'ai $\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 - \overline{bc}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$. Je prens le côté FG du dernier quarré, & je le porte sur le demi-cercle de $b$ en $g$, après quoi je tire la ligne $ga$, & le triangle rectangle $agb$, me donne $\overline{ag}^2 = \overline{ab}^2 - \overline{bg}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{FG}^2$. Or dans cette supposition le premier quarré moins le second, est au premier, comme le premier moins le dernier, est à la somme des quarrez qui précedent le dernier (*Partie* 1. *n.* 309.). C'est pourquoi je prens une quatriéme proportionnelle aux trois lignes $ac$, $ab$, $ag$, que j'appelle $z$, & j'ai $ac.\ ab :: ag.\ z$; donc $\overline{ac}^2.\ \overline{ab}^2 :: \overline{ag}^2.\ z^2$, ou $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2.\ \overline{AB}^2 :: \overline{AB}^2 - \overline{FG}^2.z^2$, & par conséquent le quarré de $z$, est égale à la somme des quarrez moins le dernier; je fais donc un quarré égal au quarré de $z$, & au quarré de FG, pris ensemble, & le Probleme est résolu.

Si la progression est ascendante, & que le premier quarré, par exemple, soit FG, & le dernier AB, alors le dernier moins le pénultiéme, est au premier, comme le dernier terme moins le premier, est à la somme des termes moins le premier, & par conséquent le Probleme se résoudra de même qu'il vient d'être dit.

### PROBLEME XXXIII.

82. *Sur une ligne donnée HI, faire un rectangle égal à un rectangle donné* (Fig. 43.).

Cherchez une quatriéme proportionnelle à la ligne HI, à la base BC du rectangle donné, & à sa hauteur AB, & cette quatriéme proportionnelle sera la hauteur du rectangle cherché, lequel sera par conséquent le rectangle HIRS.

### DEMONSTRATION.

Par la construction. HI. BC :: AB. HR; donc HI×HR.

$=AC \times AB$, c'eſt-à-dire le rectangle HIRS, égal au rectangle donné, où lon voit que les rectangles égaux, ont les baſes réciproques aux hauteurs, ainſi que nous avons déja dit plus haut.

### COROLLAIRE I.

83. Si au lieu d'un rectangle égal on en avoit demandé un double, triple, quadruple, &c. on auroit doublé, triplé, ou quadruplé la hauteur trouvée HR, & l'on auroit achevé le rectangle, lequel auroit été double, ou triple, ou quadruple du rectangle HIRS, puiſqu'il auroit eu même baſe que lui, & que les rectangles de même baſe ſont entr'eux comme leurs hauteurs.

### COROLLAIRE II.

84. Que ſi on avoit demandé un parallelograme égal à un parallelograme donné GLBC, on auroit fait à l'extrêmité H de la ligne HI, un angle égal à l'angle GBC, du parallelograme donné; puis on auroit cherché, comme ci-deſſus, une quatriéme proportionnelle HR, à la ligne HI, à la baſe BC, du parallelograme, & à ſa hauteur AB, & élevant HR, perpendiculairement ſur HI en H, on auroit tiré RQ, parallele à HI, après quoi on auroit achevé le parallelograme HIRQ, lequel auroit été égal au parallelograme donné; & ſi on eût voulu le faire double, ou triple, &c. on auroit doublé, ou triplé ſa hauteur, &c.

### COROLLAIRE III.

85. On feroit la même choſe ſi ſur une ligne donnée on vouloit faire un triangle égal, ou double, ou triple, &c. d'un triangle donné.

*Nota* que ce Probleme enſeigne la façon de faire la diviſion, dont j'ai promis de parler dans la premiere partie; car ſi l'on diviſoit le rectangle ABCD, par la droite HI, le produit du quotient par HI, ſeroit égal au dividende, ou au rectangle ABCD, par la nature de la diviſion; donc ce quotient ſeroit égal à HR, puiſque le produit de HR, par HI, eſt égal au rectangle ABCD. Ainſi la diviſion d'une ſurface par une ligne, ſe fait en prenant une quatriéme proportionnelle à cette ligne, à la baſe, & à la hauteur de la ſurface.

### PROBLEME XXXIII.

86. *Couper une ligne donnée AB* (Fig. 44.) *en deux parties BC, CA,*

*CA, qui soient entr'elles comme un quarré à un autre quarré.*

Soit DE le côté du premier quarré, & HI, celui du second; cherchez une troisiéme proportionnelle RS, aux deux lignes DE. HI; puis ajoûtant ensemble les deux DE, RS, cherchez une quatriéme proportionnelle à la ligne DE+RS, à la ligne RS, & à la ligne donnée AB, & portez cette quatriéme proportionnelle sur AB, de A en C, & la ligne AB, sera coupée selon les conditions requises.

DEMONSTRATION.

Les trois lignes DE, HI, RS, étant en progression, on aura DE. RS :: $\overline{DE}^2$. $\overline{HI}^2$, & *componendo* DE+RS. RS :: $\overline{DE}^2+\overline{HI}^2$. $\overline{HI}^2$; mais par la construction DE+RS. RS :: AB. AC; donc AB. AC :: $\overline{DE}^2+\overline{HI}^2$. $\overline{HI}^2$, & *dividendo* AB—AC. AC :: $\overline{DE}^2$. $\overline{HI}^2$, ou BC. AC :: $\overline{DE}^2$. $\overline{HI}^2$.

## SECTION III.

### *Des changemens des figures & de leur reduction de petit en grand, & de grand en petit.*

### PROBLEME XXXV.

87. *Changer un triangle ABC en rectangle* (Fig. 45.).

Prenez la moitié RI, de la hauteur BI, puis faites un rectangle ACDE, sur la base AC, & la hauteur RI, & ce rectangle sera égal au triangle, puisque le triangle est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

Ou bien prenez la moitié AI, de la base AC, puis faites le rectangle AISB sur la base AI, & la hauteur BI, & ce sera la valeur du triangle, parce que le triangle est aussi égal à la moitié de sa base multipliée par sa hauteur.

### PROBLEME XXXVI.

88. *Changer un triangle ABC en quarré.* (Fig. 45.)

Faites un rectangle ADEC, égal au triangle par le Probleme précedent, puis entre la base AC, & la hauteur RI, de ce rectangle, prenez une moyenne proportionnelle AH, & le quarré de

cette moyenne proportionnelle, sera égal au triangle. Car les lignes AD, AH, AC, étant en proportion continue, le produit AD×AC des extrêmes, est égal au quarré $\overline{AH}^2$, de la moyenne.

## PROBLEME XXXVII.

89. *Changer deux rectangles ABCD, abcd, en un seul qui leur soit égal* (Fig. 46.).

Il faut auparavant réduire les deux rectangles, en sorte qu'ils ayent la hauteur commune; & pour cela choisissant la hauteur *bd*, faites cette analogie: la hauteur *bd*, est à la hauteur BD, réciproquement, comme la base CD, est à une quatriéme ligne, & cherchant cette quatriéme proportionnelle *d*K, le rectangle fait sur la base *d*K, & la hauteur *bd*, sera égal au premier rectangle ABCD, puisque ces deux rectangles auront les hauteurs réciproques aux bases. C'est pourquoi mettant *d*K, sur le prolongement de la base *cd*, & achevant le rectangle *bd*KH, le rectangle *ac*HK, sera égal aux deux rectangles donnés.

### COROLLAIRE.

90. On auroit fait la même chose, si au lieu de deux rectangles on avoit eu deux parallelogrames IECD, *iecd*, ausquels on auroit trouvé le parallelograme *ic*KR égal, & de même si on avoit eu deux triangles ACD, *ecd*, on leur auroit trouvé le triangle *ec*K, égal.

## PROBLEME XXXVIII.

91. *Réduire une figure quelconque en triangle* (Fig. 47.).

Soit le pentagone irregulier ABCDE, qu'il faille changer en triangle, tirez la diagonale BD, qui retranche de la figure donnée le triangle BDC; de l'angle C, tirez CK, parallele à la diagonale, jusqu'à ce qu'elle rencontre la base AB prolongée en K, puis tirez la ligne KD, les deux triangles DBC, DBK, ayant la base commune DB, & étant entre les paralles DB, CK, sont égaux entr'eux (*n.* 11); donc retranchant du pentagone ABCDE, le triangle BDC, & substituant à sa place le triangle BDK, vous aurez le quadrilatere AEDK, égal au pentagone donné; ainsi il ne reste plus qu'à réduire ce quadrilatere en triangle, & pour cela tirez de l'angle D, la diagonale DA, qui retranche le triangle DAE; de l'angle E, tirez EH, parallele à la diagonale jusqu'à ce qu'elle rencontre la base prolongée en H, & tirez HD, les

deux triangles ADE, ADH, ayant la base commune AD, & étant entre les paralleles AD, HE, seront égaux; c'est pourquoi retranchant du quadrilatere AEDK; le triangle AED, & substituant en sa place le triangle ADH, vous aurez le triangle HDK, égal au quadrilatere AEDK, & par conséquent au pentagone proposé.

### COROLLAIRE.

92. En suivant la même méthode on peut réduire en triangle toute autre figure qui auroit un plus grand nombre de côtez. Soit par exemple l'exagone irregulier ABCDEF (*Fig.* 48.), je tire la diagonale EA, la parallele FG à cette diagonale, & la ligne AF, & substituant le triangle AEG, au lieu de son égal AEF, j'ai une figure qui a un côté de moins que l'exagone. Je tire la diagonale DA, la parallele EH, à cette diagonale, & la ligne AE, & substituant le triangle ADH, au lieu du triangle ADE, son égal, j'ai le quadrilatere HDCB, qui a deux côtez de moins que l'exagone; enfin tirant la diagonale DB, la parallele CR, à cette diagonale, & la ligne RD, & mettant à la place du triangle DBC, le triangle DBR, son égal, j'ai le triangle HDR, égal à l'exagone proposé.

### PROBLEME XXXIX.

93. *Changer deux ou plusieurs figures de differentes especes A, B, C,* (Fig. 49.) *en un seul triangle, ou en un seul rectangle, ou en un seul parallelograme dont l'angle soit donné.*

Changez chacune de ces figures en triangles par le Probleme précedent, puis par le Probleme 37, faites que ces trois triangles ayent la même hauteur, & ajoûtant les trois bases ensemble, en sorte qu'elles ne fassent qu'une seule ligne EH, tirez les droites ED, HD, à l'extrêmité D, de la hauteur commune, & le triangle EDH, sera égal aux trois triangles, & par conséquent aux trois figures données. Il faut se souvenir que la hauteur commune qu'on veut donner aux trois triangles, doit être celle de l'un des trois, parce que par-là il ne reste plus que deux triangles à qui il faut donner cette même hauteur; au lieu que si on prenoit une hauteur qui ne fût égale à aucune des trois hauteurs, il faudroit operer sur les trois triangles, afin que cette hauteur leur fût commune, ce qui rendroit la résolution du Probleme plus longue.

Si on veut changer les trois figures en un seul rectangle, chan-

gez-les d'abord en un seul triangle EDH, puis faites un rectangle EIKH, sur la base EH de ce triangle, & la moitié OF, de sa hauteur, & ce rectangle sera égal au triangle, & par conséquent aux trois figures données.

Enfin si on veut changer ces figures en un seul parallelograme, dont l'angle sur la base soit l'angle OEF, changez-les, comme auparavant, en un triangle EDH, puis du point du milieu O, de la hauteur, tirez une ligne indéterminée IS, parallele à la base EH, & faisant à l'extrêmité E de cette base l'angle OEF, égal à l'angle donné par la ligne OF, achevez le parallelograme EOSH, lequel sera égal au rectangle EIKS, & par conséquent aux trois figures données ; car le rectangle & le parallelograme ont même base & même hauteur.

## PROBLEME XL.

94. *Exprimer en lignes droites le rapport de deux ou de plusieurs figures, A, B, C,* (Fig. 49.)

Changez les trois figures en trois triangles EDF, FDG, GDH, qui ayent la hauteur commune, & comme alors ces triangles seront entr'eux comme leurs bases, EF, FG, GH, les trois figures seront aussi entr'elles comme ces trois lignes.

## PROBLEME XLI.

95. *Changer un triangle scalene ou isoscele en triangle équilateral.* (Fig. 50.).

Soit le triangle scalene A, B, C, qu'on propose de changer en triangle équilateral, formez un triangle équilateral *abc*, d'une grandeur, à discretion, tirez la perpendiculaire *bd* sur la base, & prenez une moyenne proportionnelle HI, entre la hauteur *bd*, & la base *ac*. Prenez aussi une moyenne proportionnelle HR, entre la hauteur BD du triangle proposé & sa base AC; puis transportant HR, sur HI, de H en R, tirez SRT, parallele à PQ, jusqu'à ce qu'elle coupe les lignes HP, HQ, prolongées en S, & en T, & le triangle équilateral X, dont le côté sera égal à la ligne SR, sera le triangle qu'on cherche.

## DEMONSTRATION.

La ligne PI, étant égale au côté *ac*, & la ligne IQ, à la hauteur *bd* du triangle équilateral *abc*, le quarré de PI, est au quarré de IQ, comme 4 est à 3. (*Partie* 1. *n.* 328.). D'autre part HI, étant

étant moyenne proportionnelle entre PI, & IQ le quarré $\overline{HI}^2$, est égal au rectangle PI × IQ, & par conséquent il est double du triangle équilateral *abc*, qui a même hauteur & même base que ce rectangle. Par la même raison le quarré $\overline{HR}^2$, étant égal au rectangle de la base AC, du triangle proposé par sa hauteur BD, est double de ce triangle; & comme à cause du triangle rectangle SHT, & de la perpendiculaire HR, sur son hypotenuse, la ligne HR, se trouve aussi moyenne proportionnelle entre SR, & RT, en sorte que $\overline{HR}^2$, est aussi égal au rectangle SR × RT, il s'ensuit que le rectangle AC × BD, est égal au rectangle SR × RT, & que par conséquent le triangle proposé ABC, moitié du rectangle AC × BD, est égal au triangle qui auroit pour base SR, & pour hauteur RT, parce que ce triangle est moitié du rectangle SR × RT. Il s'agit donc de faire voir que si on fait un triangle équilateral, dont le côté soit SR, sa hauteur sera RT. Et pour cela considerez que les triangles HPI, HSR, étant semblables à cause des bases paralleles, on a SR. PI :: HR. HI, & par la même raison dans les triangles semblables HIQ, HRT, on a RT. IQ :: HR. HI; d'où il suit que SR. PI :: RT. IQ. Donc *permutando*, SR. RT :: PI. IQ. Mais le quarré de PI, est au quarré de IQ, comme 4 est à 3; donc le quarré de SR, est aussi au quarré de RT, comme 4 est à 3; & comme il n'arrive qu'aux seuls triangles équilateraux que le quarré de leur côté soit au quarré de leur hauteur comme 4 est à 3, il est évident que si SR, est le côté d'un triangle équilateral, RT sera sa hauteur.

On trouvera dans la quatriéme Partie (*n.* 84.), une méthode de changer une figure plane, de quelque espece qu'elle soit, en polygone regulier.

## PROBLEME XLII.

96. *Réduire une figure de grand en petit, & de petit en grand.* (Fig. 51.)

Pour réduire, par exemple, la figure PGHIKS, à la moitié de sa grandeur, c'est-à-dire pour en faire un autre semblable, qui soit à cette figure comme 1 est à 2. Coupez le côté PS, en deux parties égales en R, & prenez une moyenne proportionnelle SA, entre le côté SP, & sa moitié SR; puis de l'extrêmité S tirez aux angles opposés les diagonales SG, SH, SI; qui diviseront la

figure en triangles ; & par le point A, tirez AB, parallele à PG ; par le point B, tirez BC, parallele à GH, & ainſi de ſuite, & vous aurez la figure ABCDE, qui ſera ſemblable à la figure donnée, parce que les triangles ABS, BCS, CDS, DES, qui la compoſent, ſont ſemblables aux triangles PGS, GHS, HIS, ISK, qui compoſent la figure PGHIKS, à cauſe des baſes paralleles ; de plus la figure ABCDE, ſera à la figure PGHIKS, comme 1 eſt à 2 ; car ces figures ſont entr'elles comme les quarrez de leurs côtez homologues SP, SA : or les trois lignes SP, SA, SR, étant en proportion continuë, on a $\overline{SP}^2$. $\overline{SA}^2$ :: SP. SR, c'eſt-à-dire, comme 1 eſt à 2 par la conſtruction. Donc, &c.

Ou bien prenez un point O dans l'aire (*Fig.* 52.) & de ce point tirez des lignes OA, OB, OC, &c. à tous les angles, ce qui diviſera la figure en triangles, partagez l'une de ces lignes OF, en deux également en V, puis prenez une moyenne proportionnelle OK, entre OF, & ſa moitié OV, & du point K, menez la parallele KI, puis la parallele IH, ainſi de ſuite, & GHIKLN, ſera la moitié de la figure donnée, ce qui ſe démontre de la même façon.

Que ſi on vouloit réduire la figure donnée au tiers, au quart, &c. de ſa grandeur, on prendroit SR (*Fig* 51.), ou OV (*Fig.* 52.) qui ſeroit le tiers, ou le quart, &c. de PS, ou de OF, & l'on acheveroit le reſte comme ci-deſſus.

Et ſi on vouloit que la figure réduite fût à la figure donnée comme une ligne *a*, à une ligne *b*, on couperoit le côté PS (*Fig.* 51.), en R, en ſorte que SR, fût à SP, comme *a* eſt à *b*, ce qui ſe fait en ajoûtant les deux lignes *a*, *b*, enſemble, puis prenant une quatriéme proportionnelle aux trois lignes $a+b$, *a*, PS, après quoi on acheveroit le reſte comme il a été dit, & on feroit la même choſe à l'égard de la ligne OF (*Fig.* 52.).

Pour réduire la figure ABCDES (*Fig.* 51.), par exemple, au double de ſa grandeur de l'un des angles S, tirez les diagonales SB, SC, SD, &c. que vous prolongerez indéfiniment en-dehors, enſuite prolongez SA en T, juſqu'à ce que AT, ſoit égal à AS, & prenant une moyenne proportionnelle SP, entre SA & ST, tirez PG, parallele à AB, GH, parallele à BC, & ainſi de ſuite, & la figure PGHIKS, ſera double de la figure donnée.

Ou bien (*Fig.* 52), prenez un point O dans l'aire de la figure donnée GHIKLN, & tirez aux angles les lignes OG, OH, &c.

que vous prolongerez indéfiniment en-dehors, puis faites le prolongement GT, de l'une de ces lignes GO, égal à GO, & prenant une moyenne proportionnelle OC, entre OG & OT, tirez CD, parallele à GH, DE, parallele à HI, & ainsi de suite, & la figure ABCDEF, sera double de la donnée.

On voit aisément comment il faudroit faire pour rendre la figure réduite triple, quadruple, &c. de la donnée, ou en telle raison que l'on voudroit.

## PROBLEME XLIII.

97. *Lever le plan d'une campagne ou d'un pays.*

Lever le plan d'un pays, c'est représenter sur le papier par le moyen d'une échelle, les differens endroits que ce pays contient, comme les Villages, les Rivieres, les grands Chemins, &c. avec le rapport de leurs distances que l'on conçoit dans une surface plane, horisontale, ou de niveau, parce que le papier qui les représente, est lui-même une surface plane; & c'est ce qu'on appelle autrement *faire la carte* d'un pays, laquelle carte s'appelle *topographique*, ou particuliere, lorsqu'elle représente un pays qui n'est pas d'une grande étenduë, comme une Seigneurie, une Election, une petite Province, &c. & générale, lorsqu'elle représente une grande étenduë, comme un Royaume, une partie de l'Europe, &c. Nous ne parlons ici que des Cartes topographiques; car quoique les générales se fassent selon les mêmes principes, cependant comme on y employe souvent la connoissance des latitudes, & des longitudes qui regardent le Traité de la Sphere, nous n'en dirons rien, pour ne nous pas écarter de notre sujet.

Supposons donc en premier lieu un pays uni, où il n'y ait ni de grandes hauteurs, ni de grandes profondeurs (*Fig.* 53.), je prens d'abord deux points de station A, B, dont la distance AB, que je mesure, servira de base à toutes les operations que je ferai. Je mets le graphometre en A, en sorte que son diametre soit dans la direction de la distance AB, ou du moins parallele à cette distance, & que le plan du demi-cercle soit bien horizontal, je vise avec l'alidade aux differens endroits C, D, E, F, G, &c. que le pays contient, & je mesure les angles GAB, HAB, IAB, DAB, EAB; sans mesurer FAB, ni CAB, parce qu'ils sont trop obtus ou trop aigus.

Cela fait, je transporte le graphometre en B, en sorte que le

diametre soit ou dans la direction de la distance AB, ou parallele à cette distance, & que le plan de son cercle soit toujours horizontal, & visant avec l'alidade aux mêmes endroits, je mesure les angles GBA, HBA, IBA, DBA, EDA, sans mesurer les angles CBA, ni FBA, parce qu'ils sont trop obtus ou trop aigus.

Par ce moyen connoissant dans le triangle AGB, sa base AB, & les deux angles sur la base, je cherche par la Trigonometrie ses deux côtez AG, BG, que je transporte avec la base AB, sur un papier, où j'aurai fait une échelle sur laquelle je prens la valeur de ces trois lignes, pour construire un triangle semblable au triangle AGB. Connoissant de même dans le triangle AHB, la base AB, & les deux angles sur cette base, je trouve par la Trigonometrie les deux côtez AH, HB, que je transporte sur le papier de la même façon, & faisant la même chose pour les triangles AIB, ADB, AEB, les endroits G, H, I, E, D, A, B, se trouvent posés sur le papier dans le même rapport de distance entr'eux, qu'ils le sont sur le terrein.

Il reste encore les deux endroits F, C, dont il faut trouver la position, & pour cela je mesure d'abord l'angle GAF, puis transportant le graphometre en G, je mesure l'angle FGA, & connoissant ainsi dans le triangle GAF, la base GA, & les deux angles sur la base, la Trigonometrie me découvre aisément les deux autres côtez que je transporte sur le papier; je fais la même chose pour le point C, en mesurant l'angle CBI, & l'angle BIC, & j'ai par-là la position de tous les lieux contenus dans le pays, dont je veux lever le plan; après quoi il ne reste plus qu'à marquer en chaque endroit ce qui s'y trouve, comme, par exemple, une Eglise, un Moulin, un Château, &c.

Si je ne voulois point employer la Trigonometrie, je mesurerois tous les côtez des triangles AGB, AHB, &c. avec une corde ou autrement, puis prenant sur l'échelle les valeurs trouvées, je décrirois ces triangles sur le papier, ce qui me donneroit les positions de tous les lieux G, H, I, &c. de même que ci-dessus.

Il n'est pas nécessaire que tous les rayons visuels qui forment les côtez des triangles, soient de niveau entr'eux, c'est-à-dire qu'ils soient également éloignés du centre de la terre; mais il suffit qu'ils soient tous horizontaux; car si l'on conçoit que de tous les endroits A, B, C, D, &c. il s'éleve des lignes verticales ou à plomb sur le terrein, les rayons visuels étant horizontaux, seront perpendiculaires entre ces verticales, & par conséquent elles mesureront

reront toujours leurs distances, soit qu'ils soient plus ou moins élevés sur l'horison, & ces distances seront les mêmes que les distances des lieux A, B, C, &c. puisque ces lieux sont dans les verticales, & qu'on les suppose tous dans un même plan horizontal, sur lequel si l'on conçoit que les rayons visuels viennent à tomber toujours parallellement à eux-mêmes, ils formeront entr'eux les mêmes triangles que nous avons trouvé.

Quant aux hauteurs & aux enfoncemens, c'est au dessein à les représenter par le moyen des ombres.

Supposons en second lieu, qu'il se trouve dans le pays des grandes hauteurs, comme des montagnes (*Fig.* 54.), alors il faut nécessairement hausser le plan du demi-cercle en laissant son diametre horizontal, & toujours dans la direction de la base AB. Puis visant au sommet C de la montagne, & mesurant les angles CAB, CBA, on connoîtra dans le triangle CAB, la base AB, & les deux angles sur la base, c'est pourquoi les deux côtez AC, BC, seront aussi connus; mais comme ces côtez n'étant pas horizontaux, ne marqueront pas les distances de la montagne aux points A & B, on mettra le demi-cercle du graphometre verticalement, & son diametre horizontalement en A; en sorte qu'on puisse viser avec l'alidade au point C, puis on mesurera l'angle CAD, & concevant une ligne verticale CD, on connoîtra dans le triangle rectangle CAD, l'hypotenuse CA, & l'angle aigu CAD; c'est pourquoi le côté ID, ou la distance de la montagne au point A, se trouvera aisément, & de la même façon on trouvera la distance BD, de la montagne au point D.

On conçoit bien ce qu'il faudroit faire, si au lieu d'une montagne il se trouvoit une profondeur; car en ce cas il faudroit baisser le plan du demi-cercle, pour trouver le triangle ACD, au lieu de le hausser, & le reste s'acheveroit de la même façon.

## PROBLEME XLIV.

98. *Trouver une figure moyenne proportionnelle à deux figures données* X, Z, (Fig. 55.).

Réduisez la figure X, en triangles ABC (*n.* 91.), & la figure Z, en triangle DEH, puis réduisez le triangle DEH, à la même hauteur que le triangle ABC (*n.* 90.) c'est-à-dire, faites le triangle ILM, de même hauteur que le triangle ABC, & égal au triangle DEH; enfin prenez une moyenne proportionnelle NP, entre la base AC, du triangle ABC, & la base IM du triangle

ILM, & sur NP, pris pour base, élevez une perpendiculaire RQ, égale à la hauteur commune, & faites le triangle NQP, qui sera moyen proportionnel entre le triangle ABC, & le triangle ILM, & par conséquent entre les figures données.

DEMONSTRATION.

Les trois triangles ABC, NQP, ILM, ayant la même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases AC, NR, IM, où ces trois bases sont en proportion continuë par la construction ; donc les trois triangles sont aussi en proportion continuë, & par conséquent le triangle NQP, est moyen proportionnel entre le triangle ABC, & le triangle ILM.

COROLLAIRE I.

99. Si au lieu d'une figure moyenne proportionnelle entre les deux figures données, on avoit demandé une troisiéme proportionnelle, on auroit pris une troisiéme proportionnelle à la base AC, & à la base IM; puis sur cette proportionnelle prise pour base, on auroit élevé une perpendiculaire égale à la hauteur du triangle ABC, & le triangle qui auroit eu la troisiéme proportionnelle pour base, & la perpendiculaire pour hauteur, auroit été troisiéme proportionnelle aux deux figures données.

COROLLAIRE II.

100. Et si trois figures étant données, on demandoit une figure quatriéme proportionnelle, on réduiroit les trois figures en trois triangles de même hauteur, puis on prendroit une quatriéme proportionnelle à leurs trois bases, & achevant le reste comme ci-dessus, on auroit un triangle quatriéme proportionnel aux trois figures données.

## SECTION IV.

*Suite de la Planimetrie.*

PROBLEME XLV.

101. *Mesurer un triangle dont on connoît les trois côtez & les trois angles sans se servir de sa hauteur* (Fig. 56.).

Cherchez dans les Tables des sinus, le sinus total, & la tan-

gente de la moitié de l'angle B. Prenez aussi la moitié du contour du triangle, & l'excès de cette moitié sur le côté AC, opposé à l'angle B; puis multipliant la moitié du contour par cet excès, faites cette analogie: Le sinus total est à la tangente de la moitié de l'angle B, comme le rectangle sous la moitié du contour, & l'excès de cette moitié sur le côté AC, est à un quatriéme terme, lequel étant trouvé par la regle de trois, sera l'aire du triangle.

## DEMONSTRATION.

Inscrivez dans le triangle un cercle HDE, & du centre O, tirez aux trois points d'attouchement les rayons OH, OD, OE, qui seront perpendiculaires aux côtez. Les lignes AH, AD, seront égales, parce qu'elles sont deux tangentes tirées d'un même point A, par la même raison les lignes BH, BE, seront égales de même que les lignes CD, CE; d'où il suit que les lignes AD, DC, BE, prises ensemble, sont égales à la moitié du contour, & que la ligne BE est l'excès de cette moitié sur les deux parties AD, DC, prises ensemble, c'est-à dire sur le côté AC. Si donc dans le triangle rectangle BHO, on prend le côté BH, pour le sinus total, ou pour le rayon d'un cercle, le côté HO, étant perpendiculaire à ce rayon, en sera la tangente, & l'on aura cette analogie: Le sinus total est à la tangente de l'angle HBO, qui est moitié de l'angle B, par la construction, comme le côté BH, est au côté HO, & multipliant les deux derniers termes par la moitié du contour, on aura le sinus total est à la tangente de l'angle HBO, comme le rectangle sous la moitié du contour, & le côté HB, ou BE, son égal, est au rectangle sous la même moitié, & le côté HO; mais le rectangle sous la moitié du contour, & le côté HO, est égal au triangle ABC; car les trois triangles AOB, AOC, COB, qui composent le triangle total, sont égaux chacun à la moitié de leur base, multipliée par leur hauteur HO, ou DO ou EO, qui sont égales, & par conséquent les trois pris ensemble, sont égaux à la moitié des trois bases, ou à la moitié du contour du triangle ABC, multipliée par la hauteur HO; donc le sinus total est à la tangente de la moitié de l'angle B, comme le rectangle sous la moitié du contour, & l'excès BE de cette moitié sur le côté opposé AC, est à l'aire du triangle ABC.

### *Autre maniere.*

Prenez les trois excès de la moitié du contour du triangle sur

chacun des trois côtez, puis faites le rectangle sous la moitié du contour, & l'un de ces excès, & le rectangle sous les deux autres excès, & cherchez à ces deux rectangles une moyenne proportionnelle, laquelle sera l'aire du triangle.

DEMONSTRATION.

Après avoir inscrit le cercle HDE, par le moyen des trois lignes BS, AO, CO, qui divisent les trois angles en deux parties égales, prolongez le côté BA, en P, en sorte que AP, soit égal à DC, & la ligne BP, sera égale à la moitié du contour, étant composée de BH, égal à BE, de HA, égal à AD, & de AP, égal à DC, ou à CE. Prolongez de même BC en R, en sorte que CR soit égal à AD, & vous connoîtrez aisément que BR, est aussi égal à la moitié du contour, & par conséquent égal à BP. Enfin du point P, élevez la perpendiculaire PS, qui rencontre la ligne BV, prolongée en S, d'où vous tirerez SA, SC, SR, & SQ, qui rencontre la ligne AP, prolongée en Q, en sorte que PQ soit égal à AD, & par conséquent à CR. Cela fait:

Les deux triangles PBS, RBS, ayant le côté BS commun, le côté BP, égal au côté BR, & l'angle compris PBS, égal à l'angle compris RBS, seront égaux & équiangles entr'eux, & par conséquent PS = SR, & l'angle BRS, sera droit, de même que l'angle BPS, qui l'est par la construction; d'où il suit que les deux triangles rectangles QPS, CRS, sont aussi égaux & équiangles, à cause des côtez QP, PS, égaux aux côtez CR, RS, chacun à chacun, & qu'ainsi QS = SC, ce qui fait que les deux triangles QAS, CAS, sont aussi égaux, puisqu'ils ont le côté AS commun, le côté QS, égal au côté SC, & le côté AQ, égal au côté AC.

L'angle QAS étant donc égal à l'angle CAS, l'angle QAC, est partagé en deux parties égales par la ligne AS, de même que dans le quadrilatere AHOD, les angles DAO, DOH, sont aussi partagés en deux parties égales par la ligne AO, qui forme avec les côtez du quadrilatere, les deux triangles rectangles égaux & équiangles AHO, ADO. Or les quatre angles du quadrilatere pris ensemble, étant égaux à quatre droits, & les deux AHO, ADO, étant chacun de 90 degrez, les deux autres HAD, HOD, pris ensemble, valent deux droits, de même que les deux HAD, CAQ, pris ensemble, valent aussi deux droits, & par conséquent l'angle HOD, est égal à l'angle QAD, & sa moitié AOD, est

égale à la moitié QAS ; donc les triangles rectangle AOD, PAS, ayant deux angles égaux chacun à chacun, sont équiangles, & l'on a OD. DA :: AP. PS, d'où l'on tire OD × PS = DA × AP, ou DA × DC, à cause de AP = DC ; tout cela supposé.

Si dans le triangle rectangle BPS, on prend le côté BP, pour le sinus total, le côté PS sera la tangente de l'angle PBS ; ainsi par la maniere précedente on aura le sinus total BP, est à la tangente PS, comme le rectangle sous la moitié du contour, & la ligne BE, est au triangle ; & multipliant les deux premiers termes de cette analogie par la ligne DO, on aura le rectangle sous le sinus total BP, ou la moitié du contour, & la ligne DO, c'est-à-dire le triangle ABC, comme on a vû ci-dessus, est au rectangle PS × DO, ou AD × DC son égal, comme le rectangle sous la moitié du contour, & la ligne BE, est au triangle ABC, & *invertendo*, le rectangle AD × DC, est au triangle, comme le triangle est au rectangle sous la moitié du contour, & la ligne BE. Or AD est l'excès de la moitié du contour sur le côté BC, & DC est l'excès de cette même moitié sur le côté AB, & BE est l'excès sur le côté AC ; donc le triangle est moyen proportionnel entre les deux excès AD, DC, & le rectangle sous la moitié du contour & le troisiéme excès BE.

## COROLLAIRE I.

102. Pour appliquer ceci à la pratique, supposons que les trois côtez du triangle soient 28, 26, 30, la somme ou le contour du triangle sera 84, dont la moitié est 42 ; de 42 ôtez 28, le reste 14 est l'excès de la moitié du contour sur le côté 28 ; de même de 42 ôtez 26, & de 42 ôtez 30, les restes 16 & 12 seront les deux autres excès. Multipliez 42 par l'excès 14 ; & le produit 588 sera le rectangle de la moitié du contour par l'un des excès ; multipliez

28 }
26 } *côtez*
30 }

84 *contour*
42 *moitié du contour*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 42 | 42 | 42 |
| | 28 | 26 | 30 |
| 1er *excès* | 14 | 2e 16 | 3e 12 |

| | |
|---|---|
| 42 | 16 |
| 14 | 12 |
| 168 | 32 |
| 42 | 16 |
| 588 1er *rectang.* | 192 2e *rectang.* |

les deux autres excès 16 & 12 l'un par l'autre, & le produit 192 sera le rectangle sous les deux autres excès ; or comme le triangle est moyen proportionnel entre ces deux rectangles, si vous multiplie le premier rectangle par le second, leur produit 112896, sera égal à l'aire du triangle multipliée par elle-même ; c'est pourquoi la racine quarrée 336 de ce produit, sera l'aire cherchée.

588
192
1176
5292
588
112896 *produit des deux rectangles.*

11|28|96|336
3
2.28
63
39.96
666
000

## COROLLAIRE II.

103. Comme toutes les figures rectilignes peuvent se réduire en autant de triangles moins deux, qu'elles ont de côtez, il est évident que si l'on cherche l'aire de chacun de ces triangles par cette méthode, & qu'on en fasse la somme, on aura l'aire des figures.

## REMARQUE.

104. Quoique la maniere que nous venons d'enseigner pour trouver l'aire d'un triangle, soit plus longue que celle de multiplier la moitié de la base par la hauteur, ou la moitié de la hauteur par la base ; cependant il y a bien des occasions où elle est préferable pour sa justesse, surtout lorsqu'on ne peut trouver la hauteur que par la Trigonometrie.

## DEFINITION XI.

105. Si du centre O d'un cercle ABCD (*Fig.* 57.), on éleve un rayon OD, perpendiculaire sur le diametre AC, & que de l'extrêmité de ce rayon ayant tiré les cordes DA, DC, on décrive un cercle HAECI, qui ait pour rayon la ligne DA, il se

formera par l'interſection de ces deux cercles une figure curviligne ABCEA, qu'on nomme *Lunule d'Hypocrate*, parce que ce célebre Mathematicien en a découvert la quadrature, en trouvant une figure rectiligne qui lui eſt égale.

## PROBLEME XLVI.

106. *Trouver une figure rectiligne égale à la Lunule ABCED* (Fig. 57.).

Meſurez le triangle rectangle ACD, & ſon aire ſera égale à l'aire de la Lunule.

### DEMONSTRATION.

Le triangle AOD, étant rectangle, le quarré $\overline{AD}^2$, eſt égal aux quarrez $\overline{AO}^2$, $\overline{OD}^2$, pris enſemble, & comme les quarrez $\overline{AO}^2$, $\overline{OD}^2$, ſont égaux entr'eux, à cauſe que AO, eſt égal à OD, l'un & l'autre étant rayons d'un même cercle, il s'enſuit que le quarré $\overline{AD}^2$, eſt double du quarré $\overline{AO}^2$; mais AD eſt le rayon du cercle HAECI, & AO, le rayon du cercle ABCD, & ces cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs rayons; donc le cercle HAECI, eſt double du cercle ABCD, & par conſéquent le quart de cercle AECD, eſt égal au demi-cercle ABCOA, ôtant donc de part & d'autre le ſegment commun AECOA, il reſtera la Lunule ABCEA, égale au triangle ACD.

### COROLLAIRE I.

107. Si d'un point quelconque B, pris ſur l'arc exterieur ABC d'une Lunule, on tire une ligne droite BD au centre D du grand cercle, cette ligne coupera l'arc interieur AEC, en deux parties AE, EC, proportionnelles aux deux parties AB, BC, de l'arc exterieur; ce qui eſt évident, ſi le point B (*Fig.* 57.), coupe l'arc ABC, en deux parties égales; car alors les points B, E, de la ligne BD, étant également éloignés des extrêmitez A, C, de la corde AC, la ligne BD, coupera cette corde en deux également, & par conſéquent elle coupera auſſi ſon arc AEC, en deux parties égales.

Mais ſi le point B, n'eſt pas au milieu de l'arc ABC (*Fig.* 58.), l'angle ADE, étant au centre du grand cercle, vaut l'arc AE,

qu'il embraſſe, & le même angle ADE, ou ADB, étant à la circonference du cercle ABCD, vaut la moitié de l'arc AB. Donc la moitié de l'arc AB, vaut autant de degrez de ſa circonference, que l'arc AE en vaut de la ſienne, & par conſéquent la moitié de l'arc AB, eſt au quart de ſa circonference, comme l'arc AE, eſt au quart AC de la ſienne; & doublant les deux premiers termes, l'arc AB, eſt à ſa demi-circonference ABC, comme l'arc AE, eſt au quart AEA de la ſienne; & par converſion de raiſon l'arc AB, eſt à l'arc exterieur ABC, moins l'arc AB, c'eſt-à-dire à l'arc BC, comme l'arc AE eſt à l'arc interieur AEC, moins l'arc AE, c'eſt-à-dire à l'arc EC.

## COROLLAIRE II.

108. Si le point B eſt au milieu de l'arc exterieur ABC (*Fig.* 59.), les cordes BA, BC, tirées du point B, aux extrêmitez A, C, du diametre, ſont tangentes de l'arc interieur; car l'angle BCD étant à la circonference, eſt droit, parce qu'il s'appuye ſur le diametre BD; donc BC eſt perpendiculaire ſur le rayon DC de l'arc interieur, & par conſéquent elle en eſt tangente de même que la corde BA, par la même raiſon.

## COROLLAIRE III.

109. Le triangle ABC (*Fig.* 57.), étant égal au triangle ADC, il s'enſuit que la Lunule eſt auſſi égale au triangle ABC.

## COROLLAIRE IV.

110 Si le point B (*Fig.* 58.), n'eſt pas au milieu de l'arc exterieur, l'une des lignes BA, BC, tirées au diametre du petit cercle, coupe l'arc interieur en quelque point T; car dans le triangle rectangle ABC, l'angle aigu BAC, étant plus grand que l'angle aigu BCA, qui embraſſe un arc moindre; & ces deux angles pris enſemble, ne pouvant valoir qu'un angle droit, à cauſe que le troiſiéme angle ABC, vaut 90 degrez, il s'enſuit que l'angle BCA, vaut moins que la moitié d'un angle droit: ſi donc on ajoûte cet angle à l'angle ACD, qui vaut un demi-droit, c'eſt-à-dire la moitié de l'arc AD, l'angle total BCD, vaudra moins qu'un droit; donc BC n'étant pas perpendiculaire ſur le rayon DC du grand cercle, n'eſt pas tangente de ce cercle; mais elle le coupe en un point T.

COROL.

## COROLLAIRE V.

111. Si l'on tire la Corde AT (*Fig.* 58.), cette corde ſera coupée en deux parties égales par la ligne BD; car l'angle ATC, étant dans le petit ſegment AEC du grand cercle, vaut la moitié de l'arc du grand ſegment; c'eſt-à-dire la moitié des trois quarts de la circonference, à cauſe que l'arc AEC du petit ſegment, vaut le quart; & par conſéqnent cet angle vaut un angle droit & demi : mais les deux enſemble ATC, ATB, valent deux droits; donc l'angle ATB vaut un demi-droit. Ainſi dans le triangle ABT rectangle en B, l'autre angle aigu BAT, vaut auſſi un demi-droit, & les côtez AB, BT, ſont égaux, étant oppoſés à angles égaux. D'où il ſuit que le point B de la ligne BD, eſt également éloigné des extrêmitez A, T, de la corde AT; mais le point D de la même ligne BD, eſt auſſi également éloigné de ces mêmes extrêmitez, parce que D eſt le centre de l'arc AT; donc BD eſt perpendiculaire ſur AT, & le coupe en deux également.

## PROBLEME XLVII.

112. *D'un point B de l'arc exterieur d'une Lunule* (Fig. 57, 58.), *ayant tiré une ligne BD au centre D du grand cercle, trouver une figure rectiligne égale au ſegment BAE de la Lunule.*

Si le point B eſt au milieu de l'arc exterieur (*Fig.* 57.), il eſt évident que la Lunule ſera coupée en deux parties égales, chacune deſquelles vaudra la moitié du triangle rectangle ACD.

Mais ſi le point B (*Fig.* 58.), n'eſt pas au milieu de l'arc exterieur, tirez du point A, la corde AB, & la ligne AF perpendiculaire ſur BD, & le triangle rectangle ABF, ſera égal au ſegment BAE de la Lunule.

### DEMONSTRATION.

Tirez la ligne BC, qui coupera l'arc interieur en T (*n.* 110.), & prolongez AF, qui ira aboutir en T, puiſque BD eſt perpendiculaire à AF par la conſtruction, & qu'il eſt auſſi perpendiculaire ſur la corde AT (*n.* 111.), ce qui ne ſçauroit être, ſi les deux lignes AF, AT, n'avoient pas la même direction. Cela poſé, le nombre de degrez de l'arc AE, n'étant que la moitié du nombre des degrez de l'arc AB (*n.* 197.) l'arc AT, double de l'arc AE, ſera d'autant de degrez que l'arc AB; ainſi le ſegment

AET, ſera ſemblable au ſegment AB du petit cercle. Mais les ſegmens ſemblables ſont entr'eux comme les quarrez des rayons, ou comme les cercles; ainſi le ſegment AET, eſt double du ſegment AB; & par conſéquent la moitié AEF du ſegment AET, eſt égale au ſegment AB: ſi donc du ſegment BAE de la Lunule, on ôte le ſegment AB, & qu'on ſubſtituë à ſa place le demi-ſegment AEF, on aura le triangle ABF, égal au ſegment AEB de la Lunule.

*Autre maniere.*

Du point B (*Fig.* 58.), tirez BS, perpendiculaire ſur le diametre AC, & du point S, tirez la ligne SD, au centre D du grand cercle, le triangle ASD, ſera égal au ſegment BAE de la Lunule.

DEMONSTRATION.

Les deux triangles iſoſceles rectangles ACD, ABF, étant ſemblables, ils ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs côtez homologues AC, AB. Or les triangles rectangles ABC, ABS, ayant l'angle aigu BAS commun, ſont auſſi ſemblables, & l'on a :: AC. AB. AS; d'où il ſuit que la raiſon AC. AS, eſt doublée de la raiſon AC. AB, & que par conſéquent les triangles ACD, ABF, ſont entr'eux comme AC, AS; mais les triangles ACD, ASD, ayant leurs baſes dans la même direction, & le ſommet à un même point, ſont auſſi entr'eux comme leurs baſes AC. AS. Donc les triangles ACD. ABF, ſont entr'eux comme les triangles ACD, ASD; c'eſt-à-dire ACD. ABF :: ACD. ASD : or les deux antecedens de cette proportion ſont égaux; donc les conſéquens ABF, ASD, ſont égaux; mais ABF eſt égal à la portion de Lunule ABE. Donc ASD, eſt auſſi égal à cette portion.

COROLLAIRE.

113. Il eſt évident que le triangle SCD, eſt égal à l'autre ſegment BCE de la Lunule, puiſque le triangle ACD, eſt égal à la Lunule entiere, & le triangle ASD, au ſegment BAE.

PROBLEME XLVIII.

114. *Couper une Lunule en deux ſegments, qui ſoient entr'eux en raiſon donnée* (Fig. 58).

Suppoſons, par exemple, qu'on demande que le ſegment

ABE, soit au grand segment BCE, comme 1 est à 4. Coupez le diametre AC en S, en sorte que AS, soit à SC, comme 1 est à 4, c'est-à-dire, prenez AS, égal à la cinquiéme partie du diametre; ensuite du point S, élevez la perpendiculaire SB, qui coupe l'arc exterieur en B, & du point B, tirez BD au centre D, duquel vous tirerez la ligne BS, & le segment BAE, sera au segment BEC, comme 1 est à 4; car par le Probleme précédent, ce segment est égal au triangle ASB, & ce triangle ayant même hauteur que ASC, est au triangle ASC, comme la base AS à la base SC, c'est-à-dire comme 1 est à 4.

Si on vouloit que les deux segmens de la Lunule fussent entr'eux comme une ligne à une autre ligne, on couperoit le diametre en S, en sorte que les segmens AS, SC, fussent entr'eux comme les deux lignes, & on acheveroit le reste comme cidessus.

## PROBLEME XLIX.

115. *Le cercle ABCD, de l'arc exterieur d'une Lunule* (Fig. 59.); *& le demi EGF de son arc interieur étant décrits, trouver une figure rectiligne égale à l'espace mixtiligne ADCFEA, formé par l'intersection du cercle & du demi-cercle.*

Du point D, tirez les lignes DA, DC, & le triangle rectangle ACD, sera égal à l'espace mixtiligne ADCFEA.

### DEMONSTRATION.

Tirez le diametre DB, perpendiculaire au diametre AC, ce qui divisera le cercle ABCD, en quatre parties égales, & le demi-cercle EGF, sera aussi divisé en quatre parties égales par les lignes DA, DG, DC. De l'extrêmité B, prise pour centre, & de l'intervalle BA, décrivez l'arc AHC, ce qui vous donnera une autre Lunule AHCDA, égale à la Lunule ABCGA, & par conséquent égale aussi au triangle rectangle ACD; or le cercle du diametre EF, étant double du cercle du diametre AC, le demi-quart de cercle CDF, est égal au quart de cercle COD: ôtant donc de part & d'autre le segment commun CRD, on aura l'espace mixtiligne CDRF, égal au triangle COD; par la même raison l'espace mixtiligne AEDT, est égal au triangle AOD, & par conséquent l'espace mixtiligne EATDRCF, est égal au triangle ACD.

### COROLLAIRE.

116. Si on ajoûte à l'eſpace mixtiligne EATDRCF, la Lunule AHCDA, l'eſpace mixtiligne AHCFDE, ſera double du triangle ADC; car la Lunule eſt auſſi égale à ce triangle, & par conſéquent cet eſpace ſera égal au quarré ABCD.

### REMARQUE.

117. Tout ce que nous avons dit dans les Corollaires du Probleme 45, & dans les Problemes ſuivans, eſt de l'invention de Guillaume Wiſthon, dans ſon Commentaire Latin ſur les Elemens d'Euclide du Pere Tacquet, & c'eſt à tort qu'on a attribué à un Géometre François aſſez connu d'ailleurs, la maniere de couper une Lunule en raiſon donnée, & de quarrer ſes ſegmens. Or comme tout ce qu'on vient de voir, ne regarde que les Lunules, dont le cercle de l'aire interieur eſt double du cercle de l'arc exterieur. Nous allons dire un mot des autres Lunules.

### PROBLEME L.

118. *Trois demi-cercles étant décrits autour des trois côtez d'un triangle rectangle ABC* (Fig. 60.), *trouver la valeur des deux Lunules formées par leurs interſections.*

Meſurez le triangle rectangle ABC, & ſon aire ſera égale aux deux Lunules ADBE, BFCG, priſes enſemble.

### DEMONSTRATION.

Les demi-cercles étant entr'eux comme les quarrez de leurs diametres, & le quarré du diametre AC, étant égal aux quarrez des diametres AB, BC, il s'enſuit que le demi-cercle ABC, eſt égal aux deux demi-cercles ADB, BFC, pris enſemble, ôtant donc de part & dautre les deux ſegmens communs AEB; BGC, il reſtera le triangle ABC, égal aux deux Lunules ADBE, BFCG.

### COROLLAIRE I.

119. Si le triangle ABC eſt iſoſcele, les Lunules ſeront égales entr'elles; c'eſt pourquoi tirant du ſommet B de l'angle droit la perpendiculaire BO ſur l'hypotenuſe, le triangle ABC, ſera diviſé en deux triangles égaux, & la Lunule BFCG, ſera

égale au triangle BOC, & la Lunule BDAE, égale au triangle BAO.

Si le triangle eſt ſcalene, il ſera toujours vrai de dire que les deux Lunules enſemble ſont égales à ce triangle; mais on ne pourra pas déterminer à quelle partie du triangle chaque Lunule eſt égale: car ſi cette difficulté étoit une fois réſoluë, la quadrature du cercle ſeroit trouvée, comme nous allons le montrer dans le Corollaire ſuivant.

## COROLLAIRE. II.

120. Soit inſcrit un demi-exagone regulier ABCD (*Fig. 61.*), dans un demi-cercle ABCD, & autour des trois côtez AB, BC, CD, pris pour diametre, ſoient décrits les demi-cercles AEB, BIC, CND; les diametres AB, BC, CD, étant égaux aux côtez de l'exagone, ſont par conſéquent égaux chacun au rayon AQ du demi-cercle AMD; ainſi le diametre AD, eſt double du diametre de chaque demi-cercle. Or les demi-cercles ſont entr'eux en raiſon doublée de leur diametre; donc le demi-cercle AMD, eſt au demi-cercle AEB, comme 4 à 1; car les diametres étant comme 2. 1, la raiſon doublée de cette raiſon eſt 4. 1. Donc le demi-cercle AMD, vaut les trois demi-cercles AEB, BIC, CND, plus le demi-cercle X, fait ſur un diametre égal à AQ, ou AB. Ôtant donc de part & d'autre les ſegmens communs AGB, BMC, COD, le demi-exagone ABCD, eſt égal aux trois Lunules AEBG, BICM, CNDO, plus au demi-cercle X; or les trois Lunules ſont égales entr'elles, à cauſe que les ſegmens ôtés aux trois demi-cercles, ſont égaux. Donc ſi on pouvoit trouver une figure rectiligne égale à l'une de ces Lunules, le triple de cette figure étant ôté du demi-exagone ABCD, le reſte ſeroit encore une figure rectiligne égale au demi-cercle X, & par conſéquent la quadrature du cercle ſeroit trouvée.

## COROLLAIRE III.

121. Si l'on inſcrit dans le demi-cercle AEB, un demi-exagone AEFB, le ſegment FVB, ſera ſemblable au ſegment AGB du demi-cercle AMD, à cauſe que les arcs de ces deux ſegmens valent chacun 60 degrez, étant la ſixiéme partie de leurs circonferences. Or les ſegmens ſemblables, ſont entr'eux comme leurs cercles ou leurs demi-cercles; donc puiſque le demi-cercle AMD, eſt quadruple du demi-cercle AEB, le ſeg-

ment AGB, eſt auſſi quadruple du ſegment FVB. Ainſi coupant le ſegment AGB en deux également par la perpendiculaire GH, qui coupe l'arc & la corde en deux parties égales, le demi-ſegment GHB, ſera double du ſegment FVB, & par conſéquent égal aux deux ſegmens FVB, FE, pris enſemble, à cauſe que ces deux ſegmens ſont égaux. Tirant donc la ligne EG, qui retranchera de la Lunule AEBG, la portion EFBG; & retranchant de cette portion les deux ſegmens EF, FVB, à la place deſquels vous ſubſtituërez le demi-ſegment GBH, qui leur eſt égal, vous aurez la figure rectiligne EFBHG, égale à la portion de Lunule EFBG; ainſi il ne reſteroit plus que la portion de Lunule AEG, qu'il faudroit quarrer pour avoir la quadrature entiere de la Lunule, & par conſéquent celle du cercle; mais c'eſt-là le point de la difficulté.

## PROBLEME LI.

122. *Meſurer un triangle mixtiligne ABC* (Fig. 62.), *formé par deux arcs de cercle, & une ligne droite.*

Si les deux arcs APB, AOB, ſont égaux, & appartiennent à cercles égaux, tirez la droite AB, & le triangle rectiligne ABC, ſera égal au triangle mixtiligne APBOC. Car les ſegmens APB, AOB, ſeront égaux, à cauſe que dans les cercles égaux, les arcs égaux APB, AOB, ſont ſoutenus par des cordes égales AB, CB, ce qui met l'égalité entre les ſegmens; or le ſegment OSB, eſt commun aux deux ſegmens APB, AOB: ôtant donc de l'un & de l'autre le ſegment OSB, le reſte APBSO, ſera égal au reſte COB, & ajoûtant à ces deux reſtes la partie commune AOC, on aura APBOC, ou le triangle mixtiligne égal à AOBC, ou au triangle rectiligne ABC.

Remarquez que le triangle rectiligne ABC, eſt une parfaite quadrature de la portion circulaire APBOC, & il eſt étonnant qu'on puiſſe quarrer tant de parties de cercle, ainſi qu'on voit dans ce Probleme, & dans les trois ou quatre qui précédent, ſans pouvoir parvenir à ſa quadrature entiere.

Si les deux arcs APB, AOB, ſont inégaux, ou qu'étant égaux, leurs cercles ſoient inégaux, meſurez les ſegmens COSB, OSB (*n.* 30.), & retranchant OSB de COSB, le reſte ſera la valeur de la portion COB, & cette valeur étant retranchée du triangle rectiligne, ABC vous donnera la valeur de la figure mixtiligne AOC. Meſurez de même le ſegment APB, & retranchez-en

le ſegment OSB, le reſte ſera la valeur de la figure APBSO, à laquelle ajoûtant la figure AOC déja connuë, la ſomme ſera la valeur du triangle mixtiligne APBSOC.

### COROLLAIRE.

123. Pour meſurer un triangle curviligne *abc*, on décrira le triangle rectiligne *abc*, puis on retranchera de la valeur de ce triangle celle du ſegment *ctb*, & on lui ajoûtera celle des ſegmens *asb*, *arc*, & l'on aura la valeur du triangle curviligne *abc*.

## PROBLEME LII.

124. *Meſurer une figure mixtiligne compoſée d'arcs de cercles & de lignes droites.*

Soit la figure mixtiligne ABCDEF (*Fig.* 63.). Tirez les droites ED, CB, FA, qui formeront une figure rectiligne FBCE, en partie inſcrite, & en partie circonſcrite à la figure mixtiligne. Enſuite ſi le ſegment ED, eſt égal au ſegment FA, retranchez le ſegment FA de la figure mixtiligne, & donnez-lui le ſegment ED: de même ſi le ſegment FE, eſt égal au ſegment CB, retranchez de la même figure mixtiligne le ſegmeat FE, & donnez-lui le ſegment CB, & la figure rectiligne FBCE, ſera égale à la figure mixtiligne.

Mais ſi les ſegmens ne ſont pas égaux, meſurez les ſegmens rentrans ED, CB, & les ſegmens ſaillans FE, FA; puis meſurant la figure rectiligne FBCE, retranchez-en les ſegmens rentrans, & ajoûtez-lui les ſaillans, ce qui vous donnera la valeur de la figure mixtiligne.

### COROLLAIRE I.

125. Pour meſurer une figure curviligne *abcdef*, on tirera les cordes des arcs, ce qui formera une figure rectiligne, de laquelle on retranchera les ſegmens rentrans, & lui ajoûtant les ſaillans, on aura la valeur de la figure curviligne.

### COROLLAIRE II.

126. Si les ſegmens appartenoient à des ellipſes, ou à des paraboles, ou à des hyperboles, on meſureroit ces ſegmens, ainſi qu'il ſera dit dans la troiſiéme partie, où nous traitons des Sec-

tions coniques, après quoi on acheveroit le reſte comme ci-deſſus.

### PROBLEME LIII.

127. *Meſurer une figure mixtiligne dans l'aire de laquelle il ſe trouve des vuides.*

Soit la figure mixtiligne AHCDEFI, dans laquelle eſt un cercle RS, tirez les cordes des arcs AI, HC, DE, GF, ce qui vous donnera une figure rectiligne ADEI, que vous meſurerez; après quoi vous retrancherez de cette figure la valeur du cercle RS, & celle des ſegmens rentrans AI, DE, & vous lui ajoûterez la valeur des ſegmens ſaillans HC, GF.

On peut meſurer de la même façon une infinité d'autres figures en ajoûtant & retranchant ſelon l'occurrence des cas.

### PROBLEME LIV.

128. *Prendre le tiers, le quart, ou telle autre partie qu'on voudra d'une figure mixtiligne ou curviligne* (Fig. 62, 63, 64.)

Cherchez une figure rectiligne égale à la mixtiligne, ou curviligne donnée par les Problemes précedens. Réduiſez cette figure en triangle, & prenez le tiers, ou le quart, &c. de ce triangle, ainſi qu'il ſera dit dans la Section 6. (*n. 152. & les ſuivans*), & le Probleme ſera réſolu; & ſi on ne veut pas réduire la figure rectiligne en triangle, on prendra le tiers ou le quart, &c. de la figure par les méthodes que nous donnerons dans cette même Section.

## SECTION V.

## *Des Figures iſoperimetres.*

### DEFINITION XIII.

129. Deux ou pluſieurs figures qui ont les circuits égaux entr'eux, s'appellent figures *iſoperimetres.*

### PROBLEME LV.

130. *Un triangle ſcalene ABC, étant donné, faire un autre triangle ſur la même baſe AC, qui lui ſoit iſoperimetre* (Fig. 65.).

Portez le petit côté CB, ſur le grand côté AB de A en F, & la

la partie FB sera la différence du grand côté au petit. Coupez cette différence en deux parties quelconque en E, puis prolongez le petit côté jusqu'à ce que BH, soit égal à BE, & du centre C, & de l'intervalle EH, décrivez l'arc HD; ensuite du centre A, & de l'intervalle AE, décrivez l'arc AD, & du point D où les deux arcs se coupent, tirez aux extrêmitez de la base les lignes DA, DC, qui formeront le triangle ADC, isoperimetre au triangle ABC; car le côté AD, étant égal à la partie AE de la ligne AB, & le côté CD, étant égal à l'autre partie EB, plus le petit côté BC, les deux côtez AD, DB, pris ensemble sont égaux aux deux côtez AB, BC, pris ensemble: c'est pourquoi ajoûtant de part & d'autre la base commune AC, les trois côtez AD, DC, AC, qui composent le circuit du triangle ADC, sont ensemble égaux aux trois côtez AB, BC, AC, qui composent le circuit du triangle ABC.

Mais comme dans tout triangle il faut que deux côtez pris ensemble, soient plus grands que le troisiéme, il s'agit de prouver non pas que les deux AD, DC, sont plus grands que la base AC; car cela est évident, puisqu'ils sont ensemble égaux aux deux AB, BC, qui sont plus grands que la base; mais que AC+AD, est plus grand que DC, & AC+DC, plus grand que AD: & pour cela considérez que si vous prolongiez CB jusqu'à ce que BH fût égal à la différence BF des côtez, CH seroit égal à AB, & AF égal à CB, & qu'ainsi ces deux lignes feroient avec la base un triangle dont les côtez seroient égaux chacun à chacun aux côtez du triangle ABC, & que toute la différence qui se trouveroit entre ces deux triangles, consisteroit en ce que le grand côté de l'un seroit à droite, tandis que le grand côté de l'autre seroit à gauche. Puis donc que AC+AF, seroient plus grands que le côté composé des deux CB+BF; à plus forte raison AC+AE, sera plus grand que le côté composé des deux CB+BE, & de même puisque AC+CB, est plus grand que AB, à plus forte raison AC+CB+BE, sera plus grand que AE.

## COROLLAIRE I.

131. Comme on peut couper la différence FB en deux parties qui soient en raison quelconque, il s'ensuit qu'on peut faire sur la base AC une infinité de triangles isoperimetres au triangle ABC.

### COROLLAIRE II.

132. Si on coupe la différence FB, en deux parties égales, & qu'on faſſe BH égal à la moitié de cette différence, le triangle ADC, ſera iſoſcele, puiſque le côté AD ſera compoſé de AF, égal à BC, plus la moitié de la différence, & que l'autre côté ſera auſſi compoſé de BC, plus la moitié de la différence. Donc on peut réduire tout triangle ſcalene en triangle iſoſcele & iſoperimetre, en obſervant cependant que les deux triangles ſeront inégaux, comme il ſera démontré plus bas..

### PROBLEME LVI.

133. *Un triangle iſoſcele ABC, étant donné* (Fig. 66, 67.), *conſtruire un triangle équilateral qui lui ſoit iſoperimetre.*

Ajoûtez enſemble les trois côtez AB, BC, AC, & prenez le tiers de leur ſomme; du ſommet B, abbaiſſez ſur la baſe AC, la perpendiculaire BF, qui coupera la baſe en deux parties égales, portez de F en E, & de F en D, la moitié du tiers de la ſomme des côtez, ce qui ſera DE égal au tiers de cette ſomme; c'eſt pourquoi faiſant ſur DE le triangle équilateral DOE, ce triangle ſera iſoperimetre au triangle ABC: car chaque côté étant le tiers du circuit du triangle ABC, les trois côtez enſemble ſeront égaux à ce circuit.

### COROLLAIRE.

134. Quant la baſe AC du triangle iſoſcele eſt plus grande que l'un des côtez (*Fig. 66.*), la baſe du triangle équilateral eſt moindre que cette baſe & ſon ſommet eſt hors du triangle iſoſcele, & au contraire, quand la baſe du triangle iſoſcele eſt moindre que l'un de ſes côtez, la baſe du triangle équilateral eſt plus grande, & ſon ſommet O tombe en dedans du triangle ABC (*Fig. 67.*).

### PROBLEME LVII.

185. *Un triangle quelconque ABC* (Fig. 68.), *étant donné, faire un quarré qui lui ſoit iſoperimetre, ou un rectangle iſoperimetre, dont la baſe EF, ſoit donnée, ou enfin un parallelograme iſoperimetre, dont la baſe IL, & l'angle MIL ſur cette baſe ſoient donnés.*

En premier lieu, faites une ligne égale aux trois côtez AB, BC, AC, pris enſemble, coupez cette ligne en quatre parties égales, & le quarré X, dont le côté ſera égal à une de ces quatre

parties sera isoperimetre au triangle ABC.

En second lieu, portez sur la ligne égale aux trois côtez la base EF du rectangle deux fois, & partageant le reste en deux parties égales, prenez l'une de ces parties pour la hauteur du rectangle EGHF, lequel sera isoperimetre au triangle; car la base EF, & son côté opposé GH, seront égales aux deux parties portées sur cette ligne, & la hauteur EG, & son côté opposé HF, seront ensemble égales au reste.

En troisiéme lieu, portez la base IL du parallelograme demandé deux fois sur la ligne égale aux trois côtez, & partagez le reste en deux parties égales, faites le côté IM de l'angle donné MIL, égal à l'une de ces parties, & achevez le parallelograme MNIL, lequel sera isoperimetre au triangle.

### COROLLAIRE I.

136. Si on vouloit de même un polygone regulier, comme par exemple, de huit côtez, isoperimetre au triangle, on partageroit en huit parties égales la ligne égale aux trois côtez du triangle, & sur une de ces huit parties on décriroit un octogone qui seroit l'octogone demandé.

### COROLLAIRE II.

137. De même si on vouloit une figure reguliere, par exemple, un pentagone, qui fût isoperimetre à une autre figure, soit reguliere, soit irreguliere, de tel nombre de côtez que ce fût, on feroit une ligne égale aux côtez de cette figure pris ensemble, puis partageant cette ligne en cinq parties égales, on décriroit sur l'une de ces parties le pentagone demandé, & ainsi des autres.

## PROBLEME LVIII.

138. *Un triangle ABC* (Fig. 69.), *étant donné, faire un parallelograme ou un rectangle qui lui soient en même temps égaux & isoperimetres.*

Premierement, du sommet B tirez une parallele BD à la base, & divisez la base en deux parties égales en E; ensuite ajoûtant ensemble les deux côtez AB, BC, prenez la moitié de leur somme. Du point E, pris pour centre, & de l'intervalle EH, égal à la moitié de la somme des deux côtez, décrivez un arc qui coupe la parallele DB en H, & achevez le parallelograme AEDH,

lequel ſera égal & iſoperimetre au triangle donné. 1°. Le parallelograme & le triangle ſont chacun égaux au produit de la moitié de la baſe par la hauteur qui eſt ici égale de part & d'autre, les figures étant entre mêmes paralleles. 2°. La baſe AE du parallelograme, plus ſon côté oppoſé DH, eſt égal à la baſe du triangle, & ſes côtez EH, AD, pris enſemble, ſont égaux à la ſomme des côtez AB, BC du triangle, puiſque chacun d'eux eſt égal à la moitié de cette ſomme. Donc, &c.

En ſecond lieu, des extrêmitez A, E, de la baſe du parallelograme, élevez des perpendiculaires AH, EI, qui formeront un rectangle AEHI, égal au parallelograme, l'un & l'autre ayant même baſe & même hauteur. Mais comme le rectangle ne ſera pas iſoperimetre au parallelograme, à cauſe que la hauteur AH eſt plus courte que le côté EH, prenez une moyenne proportionnelle SO, entre la baſe AE, & la hauteur AI du rectangle; puis prenez la moitié du contour du parallelograme, & portez-la de R en Z, en prolongeant RV, qui eſt la moitié du contour du rectangle. Sur RZ, pris pour diametre, décrivez le demi-cercle RPZ; de l'extrêmité O, tirez OP, parallele à RZ, & du point P, où cette ligne coupe la circonference RPZ, abbaiſſez PX, perpendiculaire à RZ; enfin prenant XZ, pour la baſe d'un rectangle, & RX, pour la hauteur, faites le rectangle *abcd*, lequel ſera égal & iſoperimetre au parallelograme AEDH, & par conſéquent au triangle.

DEMONSTRATION.

La ligne SO, étant moyenne proportionnelle entre la baſe & la hauteur du rectangle AEHI, ſon quarré eſt égal au rectangle; mais PX eſt égal à SO, à cauſe des paralleles: donc le quarré de PX, eſt auſſi égal au rectangle. Or PX étant perpendiculaire ſur le diametre RZ, ſon quarré eſt égal au rectangle des portions RX, XZ, qu'elle coupe, c'eſt-à-dire au rectangle *abcd*; donc le rectangle *abcd*, eſt égal au rectangle AEHI, ou au parallelorame AEDH, & par conſéquent au triangle ABC. De plus le contour du rectangle *abcd*, étant double des lignes RX, XZ, qui priſes enſemble, ſont la moitié du contour du parallelograme AEDH, ou du triangle ABC, il s'enſuit que le contour du rectangle *abcd*, eſt égal au contour du parallelograme AEDH, ou du triangle ABC. Donc le rectangle *abcd*, eſt égal & iſoperimetre à ABC.

### COROLLAIRE.

139. On trouvera de la même façon un rectangle égal & isoperimetre à une figure donnée quelconque reguliere ou irreguliere, lorsque cela est possible : & voici comment on connoîtra si le Probleme peut ou ne peut pas se résoudre. Supposons que le triangle ABC, soit un pentagone irregulier, & qu'en changeant cette figure en un rectangle qui lui soit égal sans lui être isoperimetre, ce rectangle soit AEHI. Je prens une moyenne proportionnelle SO, entre la hauteur & la base du rectangle AEHI, puis je prens la moitié du contour du pentagone, & je la mets sur RV, qui est la moitié du contour du rectangle ; si la moitié du contour du pentagone est plus grande que RV, & qu'elle s'étende, par exemple, jusqu'en Z, je fais un demi-cercle sur RZ, je tire la parallele OP, & la perpendiculaire PX, & alors le rectangle de RX, XZ, est égal & isoperimetre au pentagone, ainsi que nous venons de le démontrer ; mais si la moitié du contour du pentagone est moindre que la moitié du contour du rectangle AEHI, c'est-à-dire moindre que RV, en sorte qu'elle ne s'étende que de R en Q : alors décrivant un demi-cercle RNQ, je ne pourrai pas couper RQ en deux parties, dont la moyenne proportionnelle soit égale à SO, puisque quelque part qu'on porte SO, perpendiculairement sur le diametre RQ, elle sortira toujours hors de la circonference RNQ, & par conséquent le Probleme sera impossible.

### PROBLEME LIX.

140. *Un triangle isoscele ABC* (Fig. 70.), *étant donné, faire un autre triangle isoscele qui lui soit isoperimetre.*

Faites une ligne égale aux trois côtez AB, BC, AC, du triangle donné, puis portez sur cette ligne deux fois la base AC, & le reste sera la base DC d'un triangle isoscele ADC, dont chaque côté sera égal à AC ; c'est pourquoi le triangle isoscele ADC, sera isoperimetre au triangle ABC, mais il ne lui sera pas égal comme nous le démontrerons dans la suite.

### PROBLEME LX.

141. *Un triangle isoscele ABC* (Fig. 72.), *étant donné, trouver une autre triangle isoscele, dont les deux côtez égaux soient égaux aux*

*deux côtez AB, BC, & qui soit ou égal, ou moindre, ou plus grand que le triangle ABC.*

Premierement, de l'extrêmité C de la base AB, tirez une ligne indéfinie CS, parallele au côté opposé AB, puis du point B pris pour centre, & de l'intervalle BC, décrivez un arc qui coupe CS au point I, par où vous tirerez les lignes IB, IA, qui formeront avec AB, un triangle isoscele ABI, puisque BI est égal à BC par la construction, & par conséquent égal à BA; & le triangle sera égal au triangle ABC, à cause que ces deux triangles sont entre mêmes paralleles AB, CS, & sur une même base AB.

En second lieu, prolongez la base KAC vers E, & d'un point K, pris sur l'arc CKI, tirez une parallele indéfinie GKE, & les droites KA, KB; le triangle ABK, sera isoscele; car les côtez AB, BK, seront égaux aux côtez AB, BC; mais il sera plus grand que le triangle ABC, attendu que la base AB, étant commune aux deux triangles, l'un se trouve entre les paralleles AB, CS, qui sont plus proches que les paralleles AB, EK, entre lesquelles l'autre se trouve; d'où il suit que la hauteur de ABC, étant moindre que celle de ABK, le triangle ABC, est aussi moindre que le triangle ABK.

Troisiémement, prenez un point quelconque H, sur l'arc HI, qui est entre les deux paralleles AB, CS; de H tirez HR, parallele à AB, & les lignes HB, HA, vous connoîtrez aisément que le triangle ABH, est isoscele, que ses côtez AB, BH, sont égaux aux côtez AB, BC, & qu'il est moindre que le triangle ABC.

## PROBLEME LXI.

142. *Deux triangles isosceles ABC, CDE, non semblables entr'eux; & sur deux bases inégales AC, CE, étant donnés, faire sur ces mêmes bases deux autres triangles isosceles semblables entr'eux, & dont les côtez AF, FC, CG, GE, pris ensemble, soient égaux aux quatre côtez ensemble AB, BC, CD, DE, des triangles donnés.* (Fig. 72.).

Faites une ligne égale aux quatre côtez AB, BC, CD, DE, des triangles donnés, coupez cette ligne en deux parties que j'appellerai X, Z, qui soient entr'elles comme les bases AC, CE, c'est-à-dire que X soit à AC, comme Z à CE. Cela étant, la moitié de X sera aussi à AC, comme la moitié de Z à CE: & par conséquent faisant sur la base AC, un triangle isoscele,

dont chacun des côtez soit égal à la moitié de X, c'est-à-dire le triangle AFC, & sur la base CE, un triangle isoscele CGE, dont les côtez CG, GE, soient chacun égaux à la moitié de Z, ces deux triangles seront isosceles semblables, & leurs quatre côtez AF, FC, CG, GE, seront ensemble égaux aux quatre AB, BC, CD, DE, ce qui n'a pas besoin de démonstration.

## PROBLEME LXII.

143. *Deux ou plusieurs triangles isoperimetres ABC, ACD* (Fig. 73.), *sur une même base AC, étant donnés, trouver quel est le plus grand isoperimetre qu'on puisse construire sur cette base, & parmi les autres, quels sont les plus grands & les moindres.*

Faites sur la même base AC un triangle AEC, isoscele & isoperimetre à l'un des triangles donnés, & ce sera le plus grand triangle qu'on puisse construire isoperimetre aux autres, & entre les triangles donnés ceux qui approcheront plus du triangle isoscele, comme le triangle ABC, seront plus grands, & ceux qui s'en éloigneront davantage, comme le triangle ADC seront moindres.

### DEMONSTRATION.

Prolongez le côté AE, faites EF égal à AE, ou à EC, & tirez FB. Dans le triangle AFB, les deux lignes AB, BF, sont ensemble plus grandes que la droite AF. Or AF est égal à AE, plus EC par la construction, & AE+EC, sont ensemble égales à AB+BC, à cause que les deux triangles AEC, ABC, sont isoperimetres; donc les deux AB+BF, sont ensemble plus grandes que AB+BC; ôtant donc de part & d'autre la ligne AB, vous aurez BF, plus grand que BC. Tirez la ligne EB, les deux triangles CEB, BEF, ayant le côté EB commun, & le côté CE, égal au côté EF, l'angle compris CEB, est moindre que l'angle compris BEF, à cause que la base CB est moindre que la base BF. Donc l'angle CEB, est moindre que la moitié de l'angle CEF; or l'angle CEF, étant exterieur au triangle ABC, vaut les deux angles internes égaux EAC, ECA, & par conséquent l'angle ECA, vaut la moitié de l'angle CEF, & est plus grand que l'angle CEB. Tirant donc par E, une ligne indéfinie EI, parallele à la base AC, l'angle alterne IEC, sera égal à l'alterne ECA, & plus grand que l'angle CEB; ainsi prolongeant le côté CB, jusqu'à ce qu'il rencontre la parallele EI, en I, &

tirant la ligne AI, le triangle AIC, sera plus grand que le triangle ABC, puisque son sommet est plus éloigné de la base; mais le triangle AEC, est égal au triangle AIC, à cause que ces deux triangles ont la base commune, & qu'ils sont entre mêmes paralleles. Donc le triangle AEC, est plus grand que le triangle ABC: & on prouvera de même que le triangle isoscele AEC, est plus grand que tout autre triangle isoperimetre de même base.

Il reste à prouver que le triangle ABC, qui approche plus de l'isoscele, est plus grand que le triangle ADC, qui en approche moins; & pour cela prolongez AB, & faites BG, égal à BC: puis tirez GD, les deux lignes GD, DA, étant ensemble plus grandes que AG, sont aussi plus grandes que les deux AB, BC, ou que les deux AD, DC, & ôtant AD de part & d'autre, vous aurez GD, plus grand que DC; d'où il suit qu'en tirant la ligne BD, les deux triangles CBD, DBG, ont le côté BD commun, & le côté CB, égal au côté BG, & que par conséquent à cause de l'inégalité des bases CD, DG, l'angle compris CBD, est moindre que l'angle DBG, c'est-à-dire que l'angle CBD, est moindre que la moitié de l'angle CBG. Mais cet angle CBG, étant externe au triangle ABC, vaut les deux angles internes BAC, BCA, & BCA, est plus grand que BAC, parce qu'il est plus grand que l'angle ECA, du triangle isoscele AEC, au lieu que l'angle BAC, est plus petit que l'angle EAC, égal à l'angle ECA; donc l'angle BCA, vaut plus de la moitié de l'angle GBC, & est plus grand que l'angle DBC; tirant donc par B, la ligne BH, parallele à la base AC, puis prolongeant CD en H, & tirant AH, il est évident que le triangle AHC, sera plus grand que le triangle ADC. Mais le triangle ABC, est égal au triangle AHC, à cause que ces deux triangles ont la base commune & sont entre mêmes paralleles; donc le triangle ABC, est plus grand que le triangle ADC.

### COROLLAIRE I.

144. Si deux triangles isoscele isoperimetres ABC, ADC (*Fig.* 70.), ont un côté AC commun, celui qui est isoscele sur ce côté, c'est-à-dire le triangle ABC, est plus grand que le triangle ADC, qui n'est pas isoscele sur ce côté, ce qui est évident par la démonstration de ce Probleme.

COROL.

## COROLLAIRE II.

145. Deux triangles isosceles ABC, CDE non semblables, étant construits sur deux bases inégales AC, CE (*Fig.* 72.), si l'on construit sur les mêmes bases deux triangles isosceles AFC, CGE, semblables entr'eux, & dont les quatre côtez AF, FC, CG, GE, pris ensemble, soient égaux aux quatre AB, BC, CD, DE, pris ensemble (*n.* 142.), les deux triangles AFC, CGE, seront ensemble plus grands que les deux ensemble ABC, CDE.

Tirez les lignes FI, DL, perpendiculaires sur les bases AC, CE, qui seront coupées chacune en deux parties égales, de même que les quatre triangles; prolongez DL jusqu'à ce que LH, soit égal à LD, & tirez les droites HC, HB, les triangles rectangles HLC, DLC, seront égaux & équiangles, parce qu'ils ont le côté LC commun, & le côté HL, égal au côté DL; d'où il suit que HC, est égal à DC, & que les deux HC, CB, pris ensemble, sont égaux aux deux ensemble BC, CD; or comme les deux triangles semblables ont leurs quatre côtez ensemble égaux aux quatre côtez ensemble des deux triangles non semblables, & que les quatre triangles sont isosceles, les deux côtez ensemble FC, CG des deux triangles semblables, sont égaux aux deux ensemble BC, CD, des deux triangles non semblables. Cela posé :

Dans le triangle BCH, les deux lignes BC, CH, ajoûtées ensemble, sont plus grandes que la ligne BH; ainsi le quarré de la ligne BC+CH, est plus grand que le quarré de BH : & comme les deux BC+CH, sont égales aux deux BC+CD, ou aux deux FC+CG, il s'ensuit que le quarré de la ligne composée des deux FC, CG, est plus grand que le quarré de BH; mais les triangles rectangles FIC, GCL, étant semblables, si l'on ajoûte l'hypotenuse FC, à l'hypotenuse CG, le côté FI, au côté GL, & le côté IC au côté CL, le quarré de FC+CG, sera égal au quarré de FI+GL, plus au quarré de IC+CL, ou de IL (*n.* 75.), & de même les triangles BIO, HLO, étant semblables, on a le quarré de BO+OH, ou de BH, égal au quarré de BI+LH, ou de BI+DL, à cause de DL = LH, plus au quarré de IO+OL, ou de IL; donc puisque le quarré de FC+CG, est plus grand que le quarré de BH, il s'ensuit que le quarré de FI+GL, plus le quarré de IL, pris ensemble, sont

plus grands que le quarré de BI+DL, plus le quarré de IL, pris enſemble, & ôtant de part & d'autre le quarré de IL, il reſte le quarré de FI+GL, plus grand que le quarré de BI+DL. Or les triangles AFC, ABC, ayant même baſe, ſont entr'eux comme leurs hauteurs IF, IB, & les triangles CGE, CDE, par la même raiſon ſont entr'eux comme leurs hauteurs GL, DL; donc ajoûtant enſemble les termes de la premiere proportion aux termes de la ſeconde, les triangles AFC, CGE, pris enſemble, ſeront aux deux enſemble ABC, CDE, comme la ſomme des hauteurs FI, GL, à la ſomme des hauteurs BI, DL; mais FI+GL, eſt plus grand que BI+DL, puiſque le quarré de FI+GL, eſt plus grand que le quarré de BI+DL; donc auſſi les deux triangles ſemblables AFC, CGE, pris enſemble, ſont plus grands que les deux triangles non ſemblables ABC, CDE, pris enſemble.

## COROLLAIRE III.

146. Si une figure ABCDEF (*Fig.* 74.), de pluſieurs côtez, eſt la plus grande de toutes les figures iſoperimetres d'un même nombre de côtez, elle eſt équilaterale & équiangle. 1°. Si l'on veut qu'elle ne ſoit pas équilaterale, & qu'elle ait deux côtez inégaux AR, RE, je tire la ligne AE, & ſur cette ligne je fais un triangle AFE, iſoſcele & iſoperimetre au triangle ARE, le triangle AFE, eſt donc plus grand que le triangle ARE, & par conſéquent ce triangle ajoûté au reſte de la figure ABCDE, formera une figure plus grande, ce qui n'eſt pas poſſible, puis qu'on ſuppoſe que la figure donnée eſt la plus grande de toutes les iſoperimetres d'un même nombre de côtez. En ſecond lieu, ſi l'on veut qu'elle ſoit équilaterale, mais non pas équiangle, ſuppoſons que les deux angles ARE, BHD, ſoient inégaux, je tire les lignes AE, BD, & les deux triangles ARE, BCD, étant iſoſceles par la ſuppoſition, & ayant les angles du ſommet inégaux, ne ſeront pas ſemblables; c'eſt pourquoi ſur les baſes AE, BD, je conſtruirai deux triangles iſoſceles ſemblables, dont les quatre côtez pris enſemble, ſeront égaux aux quatre côtez des deux triangles non ſemblables, & les deux triangles ſemblables étant plus grands que les deux autres, formeront avec le reſte de la figure une figure iſoperimetre plus grande; ce qui n'eſt pas poſſible, puiſqu'on ſuppoſe que la figure donnée eſt la plus grande.

### COROLLAIRE IV.

147. Il suit du Corollaire précédent que de toutes les figures isoperimetres d'un même nombre de côtez, la plus grande est celle qui est équilaterale & équiangle.

### PROBLEME LXIII.

148. *Deux figures regulieres ABC, FGHI, isoperimetres, mais de différens nombres de côtez étant données* (Fig. 75.), *trouver laquelle des deux est la plus grande.*

Tirez les apotemes DE, OR, les deux figures étant regulieres & isoperimetres, l'apoteme OR, de celle qui a un plus grand nombre de côtez, est plus grand par rapport à son circuit, que l'apoteme DE de l'autre figure par rapport au sien (*Partie* 1. *n.* 367), & comme les circuits sont égaux, il s'ensuit que l'apoteme OR, est plus grand que l'apoteme DE. Mais la figure FGHI, est égale au rectangle de son circuit par la moitié de son apoteme OR, & la figure ABC, est égale au rectangle de son circuit par la moitié de son apoteme DE; donc la figure FGHI, qui a plus de côtez, est plus grande que la figure ABC, qui en a moins.

### COROLLAIRE.

149. Le cercle étant de tous les polygones celui qui a un plus grand nombre de côtez, il est évident que de toutes les figures regulieres isoperimetres, mais de différens nombres de côtez, le cercle est la plus grande.

### LEMME POUR LE PROBLEME SUIVANT.

150. *Un triangle ABC, rectangle en B, étant donné* (Fig. 76.), *si de l'un des angles aigus C, pris pour centre, & de l'intervalle CA de l'hypotenuse, on décrit un arc vers l'angle droit B, qui coupe le côté CB, prolongé en F, le secteur FAC, sera plus grand par rapport au demi-segment BAF, que l'angle droit par rapport à l'angle BCA; & si au contraire on décrit l'arc AD* (Fig. 77.), *du côté de l'hypotenuse, en sorte que cet arc coupe le côté BC, prolongé en D. Le secteur ACD, sera plus grand par rapport à la figure mixtiligne AHDB, que l'angle droit par rapport à l'angle exterieur ACD.*

### DEMONSTRATION DU PREMIER CAS.

Sur l'extrêmité A (*Fig.* 76.), élevez la perpendiculaire AD;

qui coupe le côté CB, prolongé en D; du point A, pris pour centre, & de l'intervalle AB, décrivez l'arc HBG; enfin tirez la perpendiculaire BE sur DA, le triangle CAD, étant rectangle, la perpendiculaire AB, tirée de l'angle droit sur l'hypotenuse, le partage en deux triangles rectangles semblables ABC, DBA, & l'on a AC. BA :: AD. BD, & l'angle BCA, est égal à l'angle BAD; d'où il suit que les secteurs FCA, BAG, sont semblables, de même que les demi-segmens BAF, EBG; or les demi-segmens semblables étant entr'eux comme les quarrez de leurs rayons, le demi-segment BAF, est au demi-segment EBG, comme $\overline{AC}^2$. $\overline{BA}^2$, ou comme $\overline{DA}^2$. $\overline{BD}^2$, puisque AC. BA :: DA. BD. Mais les triangles rectangles BAD, EBD, étant semblables à cause de l'angle aigu D, qui leur est commun, ils sont par conséquent entr'eux comme $\overline{DA}^2$. $\overline{BB}^2$, c'est-à-dire comme les quarrez de leurs côtez homologues. Donc les demi-segmens BAF, EBG, sont entr'eux comme les triangles BAD, EBD. Cela posé:

La figure mixtiligne GBD, est plus grande par rapport au demi-segment EBG, partie du secteur BAG, qu'elle n'est grande par rapport au secteur BAG, &. *componendo*, la figure mixtiligne, plus le demi-segment, ou le triangle DBE, est plus grand par rapport au demi-segment que la figure mixtiligne, plus le secteur, ou le triangle BDA, par rapport au secteur. Mais le triangle DBE, est au demi-segment EBG, comme le triangle DBA, au demi-segment BAF; donc le secteur BAG, est plus grand que le demi-segment BAF; mais le demi-segment BAF, est plus grand par rapport au secteur HAB, qu'il ne l'est par rapport au triangle ABC; donc le secteur GAB, est encore plus grand par rapport au secteur HAB, que le demi-segment BAF, par rapport au triangle ABC, & mettant les angles des secteurs à la place des secteurs qui sont en même raison que ces angles, l'angle BAD, est plus grand par rapport à l'angle CAB, que le demi segment BAF, par rapport au triangle ABC; & *convertendo*, le triangle ABC, est plus grand par rapport au demi-segment BAF, que l'angle CAB, par rapport à l'angle BAD; *componendo*, le secteur FAC, est plus grand par rapport au demi-segment BAF, que l'angle droit DAC, ou CBA, par rapport à l'angle DAB, ou BCA, son égal.

DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

A l'extrêmité A (*Fig.* 77.), élevez la perpendiculaire indéfinie AE, & du point A, pris pour centre & de l'intervalle AC, égal à l'hypotenuse, décrivez l'arc FCE, qui coupe la perpendiculaire AE en E, & le côté AB, prolongé en F, les secteurs AHD, ECF, auront un même rayon, & de plus, ils seront égaux; car si du point C, on éleve la perpendiculaire CH, l'angle droit HCD, sera égal à l'angle droit EAC, & l'angle HCA, égal à son alterne BAC, à cause que les lignes CH, BA, étant perpendiculaires sur BD, sont paralleles entr'elles: d'où il suit que l'angle entier ACB, est égal à l'angle entier EAF, & que par conséquent les secteurs sont égaux.

Cela posé, le secteur AHD, est plus grand par rapport au triangle ABC, que le secteur EAC, par rapport à ce même triangle, & à plus forte raison le secteur AHD, est plus grand par rapport à ce triangle ABC, que le secteur EAC, par rapport au secteur FAC; & mettant les angles des deux derniers secteurs à la place de ces secteurs, le secteur AHD, est plus grand par rapport au triangle ABC, que l'angle droit EAC, par rapport à l'angle FAC; & par conversion de raison, le secteur AHD, plus grand par rapport au secteur AHD, plus le triangle ABC, c'est-à-dire par rapport à la figure mixtiligne AHDB, que l'angle droit EAC, par rapport à l'angle droit EAC, plus l'angle FAC, c'est-à-dire par rapport à l'angle FAE, ou à l'angle ACD son égal.

## PROBLEME LXIV.

151. *Deux ou plusieurs portions de cercles de differentes grandeurs ABC, HIN, TKV, étant données, dont l'une ABC, est égale à son demi-cercle, & les autres moindres ou plus grandes que leurs demi-cercles, trouver laquelle de ces portions est la plus grande de toutes, en supposant que leurs arcs ABC, HIN, TKV, sont égaux entr'eux.* (Fig. 78.).

Comparons d'abord la portion ABC, égale à son demi-cercle avec la portion HIN, moindre que le sien; & pour cela achevez la demi-circonference EIL, en sorte que le diametre soit parallele à la corde HN, & du centre O, tirez OI, perpendiculaire sur HN, & OH, à l'extrêmité de la corde; tirez aussi du centre D, de la portion ABC, le rayon DB, perpendiculaire au diametre AC; ABD sera la moitié de la portion ABC, & HIP,

la moitié de la portion HIN. Cela posé:

Le secteur EOI, est au secteur HOI, comme l'arc EHI, à l'arc HI, ou à l'arc AB, son égal par la supposition; & par conséquent comme le rayon EO, au rayon AD: mais les secteurs EOI, ADB, étant semblables, le secteur EOI, est au secteur ADB, comme le quarré du rayon EO, au quarré du rayon AD; donc le secteur HOI, est moyen proportionnel entre le secteur EOI, & le secteur ADB; c'est-à-dire :: EOI. HOI. ABD; car lorsque trois grandeurs sont en proportion continuë, si la premiere est à la seconde, comme une ligne EO à une ligne AD, la premiere est à la troisiéme, comme le quarré $\overline{EO}^2$, au quarré $\overline{AD}^2$, ainsi qu'il a été démontré plus haut; mais par le Lemme précédent, le secteur HOI, est plus grand par rapport au demi-segment PHI, que l'angle droit EOI, par rapport à l'angle HOI; & mettant à la place de ces deux angles les secteurs EOI, HOI, qui sont en même raison, on aura le secteur HOI, plus grand par rapport au demi-segment PHI, que le secteur EOI, par rapport au secteur HOI, & mettant au lieu des deux derniers secteurs, les secteurs HOI, ADB, qui sont en même raison, on aura le secteur HOI, plus grand par rapport au demi-segment PHI, que le même secteur HOI, par rapport au secteur ADB. Donc le secteur ADB, est plus grand que le demi segment PHI, & par conséquent ABC, double du secteur ADB, est plus grande que la portion HIN, double du demi-segment PHI.

Présentement comparons la portion ADB, avec la portion TKV; & pour cela tirez le diametre QX, parallele à la corde TV, & du centre R, tirez la ligne RT, & la perpendiculaire KS, qui coupe la portion TKV, en deux parties égales. Cela posé:

Le secteur TRK, est au secteur QRK, comme l'arc TK à l'arc QK, ou comme l'arc BA, égal à TK par la supposition, est à l'arc QK, ou comme AD à QR; mais les secteurs QRK, ADB, étant semblables, QRK, est à ADB, comme $\overline{QR}^2$ à $\overline{AD}^2$; d'où il suit comme ci-dessus, que les secteurs QRK, TRK, ADB, sont en proportion continuë; mais par le second cas du Lemme précedent, le secteur TRK, est plus grand par rapport à la figure mixtiligne TQKS, que l'angle droit QRK, par rapport à l'angle TRK, ou que le secteur QRK, par rapport au sec-

teur TRK, ou enfin que le secteur TRK, par rapport au secteur ADB; donc le secteur ADB est plus grand que la figure mixtiligne, & par conséquent le double du secteur ADB, c'est-à-dire la portion ABC, est plus grande que la portion TKV, double de la figure mixtiligne.

D'où il suit que la portion ADB, qui vaut la moitié de son cercle, est toujours plus grande que les autres.

## SECTION VI.

### *De la Geodesie, ou division des champs.*

#### DEFINITION XIII.

152. La *Geodesie* apprend à partager les figures regulieres ou irregulieres en deux ou plusieurs parties égales, ou en telle raison qu'on voudra, ce qui est d'une grande utilité, lorsqu'il s'agit de faire des partages de terres, d'où vient qu'on l'appelle aussi division des champs. Or cette division peut se faire ou par des lignes tirées d'un angle de la figure, ou par des lignes perpendiculaires à un côté, ou par des paralleles, ou par un point en-dedans de la figure, soit que ce point soit donné, ou qu'il soit arbitraire, ou par un point pris sur le contour, ou enfin par un point exterieur, & nous allons traiter de toutes ces façons de diviser en commençant par le triangle, sur lequel nous nous étendrons davantage, parce qu'il nous sera ensuite facile de diviser les figures d'un plus grand nombre de côtez.

#### PROBLEME LXV.

153. *Diviser un triangle ABC, en plusieurs parties égales, par exemple, en trois, par des lignes tirées de l'angle B* (Fig. 79.).

Coupez le côté opposé AD, en trois parties égales aux points D, E, & du sommet tirez les lignes BD, BE, qui couperont le triangle ABC, en trois triangles égaux, puisqu'ils auront les bases égales, & la hauteur commune.

Si on vouloit que le triangle fût divisé en trois ou quatre parties, qui fussent entr'elles en raison donnée, on couperoit la base en autant de parties qui seroient en même raison, après quoi on acheveroit le reste, comme il vient d'être dit.

## PROBLEME LXVI.

154. *Diviſer un triangle ABC* (Fig. 80.), *en autant de parties égales qu'on voudra, par exemple, en trois par un point donné O, ſur ſon contour.*

Diviſez le côté AC, où ſe trouve le point O, en trois parties égales aux points E, H, du point O, tirez à l'angle oppoſé la droite OB, & par les points de diviſion E, H, tirez les lignes ED, HR, paralleles à OB, leſquelles couperont les autres côtez aux points D, R, par où vous tirerez au point O, les droites DO, OR, qui couperont le triangle en trois parties égales, qui ſont le triangle ADO, le quadrilatere DBRO, & le triangle ORC.

### DEMONSTRATION.

Tirez par les points E, H, de diviſion, les lignes EB, BH; qui diviſeront le triangle ABC, en trois triangles égaux par le Probleme précedent. Ainſi le triangle ABE, eſt le tiers du triangle total; mais à cauſe des paralleles ED, OB, les triangles EDO, EDB, qui ont la baſe commune ED, ſont égaux: ôtant donc de chacun d'eux la partie commune EDI, il reſtera EIO, égal à DIB. Si donc on retranche du triangle ABE, la partie DIB, & qu'on lui donne en ſa place la partie EIO, le triangle ADO, ſera égal au triangle ABE, & par conſéquent au tiers du triangle total. On prouvera de la même façon que le triangle ORC, eſt égal au triangle HBC, qui eſt auſſi le tiers du triangle total, & que par conſéquent le quadrilatere DBRO, eſt auſſi le tiers du triangle ABC.

### COROLLAIRE.

155. Si on vouloit que les trois parties du triangle fuſſent entr'elles en raiſon donnée, on couperoit le côté AC, en trois parties qui ſeroient en même raiſon, & on acheveroit le reſte comme ci-deſſus. En un mot tout ce que nous enſeignons ici touchant la diviſion des triangles en parties égales, peut ſe pratiquer à l'égard de la diviſion de ces mêmes triangles en parties inégales, qui ſoient en raiſon donnée, ce que nous ne répéterons plus, à moins qu'il ne ſe trouve des cas où la regle faſſe exception, & alors nous montrerons comment on peut réſoudre les Problemes de l'une & de l'autre façon.

PROBL.

## PROBLEME LXVII.

156. *Diviſer un triangle ABC* (Fig. 81.), *en pluſieurs parties égales par un point dans l'aire qui n'eſt pas donné.*

Commençons d'abord par le diviſer en trois, d'où nous tirerons enſuite une regle générale pour le diviſer en autant de parties égales qu'on voudra. Et pour cela prenez ſur la baſe AC, la partie AD, égale au tiers de cette baſe, par le point D, tirez DF, parallele à AB; diviſez DF, en deux parties égales au point O, par où vous tirerez aux trois angles les droites OA, OB, OC, qui diviſeront le triangle en trois triangles égaux.

### DEMONSTRATION.

Tirez la ligne DB, & vous aurez le triangle ADB, égal au tiers du triangle ABC; or les triangles ABD, ABO, ayant la baſe AB commune, & étant entre mêmes paralleles, ſont égaux; donc le triangle ABO, eſt auſſi le tiers du triangle ABC: d'où il ſuit que le quadrilatere reſtant AOBC, eſt les deux tiers du triangle; mais ce quadrilatere eſt compoſé des deux triangles AOD, BOF, qui ſont égaux entr'eux, parce qu'ils ont les baſes DO, OF, égales, & qu'ils ſont entre mêmes paralleles, & des deux DOC, OFC, qui ſont auſſi égaux entr'eux, à cauſe des baſes égales DO, OF, & du ſommet commun C; donc le triangle AOD, joint au triangle DOC, eſt la moitié du quadrilatere, & par conſéquent le tiers du triangle ABC, & le triangle BOF, joint au triangle OFC, eſt l'autre tiers.

### COROLLAIRE.

157. Pour diviſer le triangle ABC (*Fig.* 82.), en un plus grand nombre de parties égales, par un point dans l'aire qui n'eſt pas donné; il faut d'abord le diviſer en trois parties égales par les lignes OA, OB, OC, comme nous venons de faire; après quoi ſuppoſant qu'on veüille diviſer le triangle ABC en quatre parties égales, on diviſera chaque côté en quatre parties égales, de ſorte que le contour entier ſera diviſé en douze parties, qui ne ſeroit pas toutes égales entr'elles, ſi les côtez ſont inégaux; mais cela ne fait rien. On en prendra donc trois de A en H, & on tirera une ligne droite HO, au point O, enſuite trois de H en G, & on tirera HO; enfin trois de G en K, & tirant OK, le triangle ABC, ſera diviſé en quatre parties égales AOH, HOGC,

GOKB, KOA; car le triangle AOC, étant le tiers du triangle ABC, & sa base étant divisée en quatre parties égales, si des points de division on tire des lignes au point O, le triangle sera divisé en quatre triangles égaux. Par la même raison les triangles COB, BOA, étant chacun le tiers du triangle ABC, si on tire des points de division de leurs bases des lignes au sommet O, ils seront chacun divisés en quatre triangles égaux; d'ou il suit que le triangle total ABC, sera divisé en douze triangles égaux; mais le quart de 12 est 3; donc si l'on prend trois de ces petits triangles, leur somme sera égale au quart du triangle ABC.

La regle est donc de diviser d'abord le triangle en trois parties égales, puis de diviser ses côtez en autant de parties égales qu'on veut que le triangle en contienne, & ensuite de tirer de ces divisions prises de trois en trois, des lignes au point O. Car supposant que le triangle doive être divisé en 8 parties égales, ses côtez étant divisés chacun en huit parties, les lignes tirées de ces divisions au point O, donneront 24 triangles égaux; & si de ces triangles on en joint trois ensemble, la somme de ces trois n'est plus que la huitiéme partie du triangle, & ainsi des autres.

## REMARQUE I.

158. Si on vouloit diviser le triangle ABC (*Fig.* 83.), seulement en deux parties qui fussent ou égales, ou en telle raison qu'on voudroit, par un point dans l'aire qui ne fût pas donné, on diviseroit la base AC, en même raison au point D, puis on tireroit DE parallele à AB, & l'on prendroit sur DE, un point quelconque O, duquel on tireroit les lignes OA, OB, & le triangle AOB, seroit au triangle total en raison donnée; mais si le point dans l'aire étoit donné, on feroit comme nous le dirons dans la suite.

## REMARQUE II.

159. De même si on vouloit diviser le triangle ABC (*Fig.* 83.) en plusieurs parties inégales, par exemple, en trois qui fussent entr'elles comme les trois lignes P, Q, R, par un point dans l'aire qui ne fût pas donné, on prendroit sur la base AC, la partie AD, qui fût à toute la base comme la premiere ligne P à la somme des trois lignes, & tirant DB, le triangle ABD, seroit au triangle ABC, comme la ligne P à la somme des trois lignes; c'est pourquoi du point D, tirant DE, parallele à AB, & prenant sur DE, un point O à discrétion, on tireroit OB, OA, & l'on

auroit le triangle BOA, égal au triangle ABD, qui seroit par conséquent au triangle total comme la ligne P à la somme des trois lignes P, Q, R: donc le trapeze restant seroit au triangle AOB, comme la somme des deux lignes Q, R, à la ligne P; ainsi divisant le trapeze par le point O, en deux parties, qui fussent entr'elles comme Q est à R, comme nous l'enseignerons en parlant de la division des trapezes & des autres figures, le triangle total seroit divisé en trois parties AOB, AOH, OHB, qui seroient entr'elles comme les lignes P, Q, R.

Mais si le point dans l'aire étoit donné, il faudroit employer d'autres regles que nous expliquerons plus bas.

## REMARQUE III.

160. Je n'ai donné cette méthode de diviser un triangle par un point dans l'aire qui n'est pas donné, en plus de trois parties égales, ou inégales, que pour faire voir comment on peut rendre général un Probleme particulier; mais voici une maniere beaucoup plus commode. Soit le triangle ABC (*Fig.* 84.), qu'on propose de diviser en cinq parties égales par un point dans l'aire qui n'est pas donné. Je prens sur la base AC, la partie AD, égale à la cinquiéme partie de sa base, & le triangle ADB, est la cinquiéme partie du triangle ABC. Je prens de même sur le côté AB, la partie AE, égale à la cinquiéme partie de ce côté, & le triangle AEC, est la cinquiéme partie du total. Du point D, je tire AF, parallele au côté AB, & du point E, la ligne EG, parallele à la base, puis du point O, où ces deux lignes se coupent, je tire aux trois angles les lignes OA, OB, OC; le triangle AOB, est égal au triangle ADB, & par conséquent il vaut la cinquiéme partie du triangle total. De même le triangle AOC, étant égal au triangle EAC, vaut aussi la cinquiéme partie du total; donc le triangle COB, en vaut les trois cinquiémes; c'est pourquoi divisant sa base CB, en trois parties égales, & tirant des lignes au sommet O, le triangle total se trouve divisé en cinq parties égales.

De même soit le triangle ABC (*Fig.* 85.), qu'on propose de diviser par un point dans l'aire qui n'est pas donné, en cinq parties inégales, qui soient entr'elles comme les cinq lignes R, S T, V, X. Je prens sur la base AC, la partie AD, qui soit à la base entiere AC, comme la ligne R, à la somme des cinq lignes R, S, T, V, X, & le triangle ABD, est au triangle total comme

R, est à la somme des cinq lignes ; je prens de même sur le côté AB, la partie AE, qui soit à ce côté comme la ligne S à la somme des lignes, & le triangle ECA, est au triangle total, comme la ligne S, à la somme des lignes. Je tire DF, EG, paralleles aux côtez AB, AC, & par le point O, je tire aux angles les lignes OA, OB, OC, & le triangle AOB, étant égal au triangle DAB, est par conséquent au triangle total, comme la ligne R, à la somme des lignes. Par la même raison le triangle AOC, est au total, comme S est à la somme des lignes ; donc le triangle AOB, est au triangle AOC, comme R, est à S ; & ces deux triangles pris ensemble, sont au total, comme les deux lignes R, S, ensemble aux cinq lignes ensemble : d'où il suit que le triangle COB, est au total, comme les trois autres lignes ensemble T, V, X, à la somme des lignes. Divisant donc la base CB, de ce triangle en trois parties proportionnelles aux trois lignes T, V, X, & tirant des lignes au sommet, le triangle COB, est divisé en trois parties proportionnelles à ces trois lignes ; & par conséquent le triangle total est divisé ainsi qu'on le demandoit.

## PROBLEME LXVIII.

161. *Diviser un triangle ABC* (Fig. 86.), *en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes qui partent d'un même point dans l'aire qui n'est pas donné, & deux desquelles soient paralleles, l'une au côté AB, & l'autre au côté BC.*

En premier lieu pour le diviser en deux parties égales, tirez du sommet B, la perpendiculaire BG, sur la base, divisez-la en deux également en H, & prenez une moyenne proportionnelle GI, entre la hauteur GB, & sa moitié GH. Si du point I, vous tirez des paralleles aux deux côtez, ces deux paralleles formeront avec la partie de la base, qui sera compriſe entr'elles un triangle qui sera la moitié du triangle ABC ; car ces triangles étant semblables, sont entr'eux comme les quarrez de leurs hauteurs GI, GB ; or les trois lignes GH, GI, GB, étant en proportion continuë, on a $\overline{GI}^2 . \overline{GB}^2 :: GH . GB$, & par conséquent le petit triangle est au grand, comme GH, à GB, c'est-à-dire comme 1 est à 2.

Mais pour rendre ce Probleme général, au lieu de tirer les paralleles par le point I, tirez par ce point une ligne RS, parallele à la base, divisez-la en deux également en O, & du point tirez

les paralleles OD, OF, le triangle DOF, sera la moitié du triangle donné; car sa hauteur étant égale à la ligne GI, les deux triangles

seront entr'eux comme $\overline{GI}^2$. $\overline{GB}^2$. Donc, &c.

En second lieu, si on veut diviser le triangle en trois parties égales, on prendra sur BG, une partie égale à sa troisiéme partie; & supposant que cette troisiéme soit HG, on prendra une troisiéme proportionnelle entre GH, GB, & on achevera le reste comme il vient d'être dit; après quoi du point O, on tirera OB, & le triangle ABC sera divisé en trois parties égales, à sçavoir le triangle DOF, & les deux trapezoïdes ABOD, CBOF; car les

deux triangles seront entr'eux comme $\overline{GI}^2$. $\overline{GB}^2$, & par consequent comme GH, à GB, c'est-à-dire comme 1 est à 3; ainsi les deux trapezoïdes pris ensemble, vaudront les deux tiers: or ces deux trapezoïdes sont égaux; car le parallelograme AQOD, ayant la base QO égale à la base OS, du parallelograme CFOS, & se trouvant entre mêmes paralleles, est égal à ce parallelograme; & par la même raison le triangle QOB, est égal au triangle OSB: donc les trapezoïdes étant composés chacun d'un parallelograme & d'un triangle égaux, ils sont égaux entr'eux, & l'un & l'autre est le tiers du triangle total.

En troisiéme lieu, pour diviser un triangle ABC (*Fig.* 87.); en quatre parties égales, on prendra sur la hauteur GB, la partie GH, égale au quart de GB, puis la moyenne proportionnelle, &c. le triangle DOF, sera la quatrieme partie du triangle total, & les deux trapezoïdes ABOD, CBOF, pris ensemble, vaudront les trois quarts du triangle. C'est pourquoi on divisera chacun d'eux en trois parties égales par des lignes tirées du point O, ainsi que nous l'enseignerons plus bas, & les deux trapezoïdes ensemble, c'est-à-dire leur somme sera divisée en 6 parties égales, lesquelles étant prises deux à deux, se réduiront à trois parties égales, qui seront chacune le quart du triangle.

La regle générale est donc lorsqu'on veut diviser un triangle en plus de trois parties égales, de prendre sur sa hauteur une partie qui soit le quart, le cinquiéme, &c. selon le nombre des parties que le triangle doit avoir; puis de prendre une moyenne proportionnelle entre cette partie & la hauteur entiere; de tirer ensuite par l'extrêmité de la moyenne proportionnelle la ligne QS, parallele à la base, de diviser cette parallele en deux également en O, d'où l'on tire les lignes OD, OF, OB, de par-

tager enſuite chaque trapezoïde par le point O, en autant de parties égales, moins une, que le triangle doit en avoir, & de joindre ces parties deux à deux; car en agiſſant ici, ſuppoſé que le triangle dût être diviſé en huit parties égales, le triangle DOC, ſeroit la huitiéme partie du triangle total, & la ſomme des trapezoïdes en ſeroit les ſept huitiémes; c'eſt pourquoi chaque trapezoïde étant diviſé en ſept parties égales; ce qui feroit quatorze, & joignant ces parties deux à deux, on auroit ſept parties, chacune deſquelles ſeroit le huitiéme du triangle; & ces ſept ajoûtées au triangle DOF, feroient huit huitiémes ou le triangle total.

## COROLLAIRE.

162. Si au lieu de diviſer le triangle ABC (*Fig.* 87.), en quatre parties égales, on vouloit qu'il fût diviſé en quatre parties, qui fuſſent entr'elles comme quatre lignes données, on prendroit ſur la hauteur GB, une partie GH, qui fût à GB, comme la premiere ligne à la ſomme des lignes, puis la moyenne proportionnelle, &c. & le triangle DOF, ſeroit au triangle ABC, comme la premiere ligne à la ſomme des lignes; ainſi il ne reſteroit plus qu'à diviſer par le point O, la ſomme des trapezoïdes, ou la figure ABCFOD, en parties qui fuſſent entr'elles comme les trois autres lignes, ſuivant les regles que nous donnerons plus bas.

## PROBLEME LXIX.

163. *Diviſer un triangle ABC* (Fig. 88.), *en autant de parties égales ou inégales en raiſon donnée qu'on voudra, par un point donné O dans l'aire.*

En premier lieu, pour le diviſer en deux parties égales, du point O, abbaiſſez la perpendiculaire OG, ſur le côté le plus éloigné; enſuite de l'angle B, oppoſé à ce côté, abbaiſſez la perpendiculaire BR, que vous diviſerez en deux également au point F; il eſt évident que ſi de F, on tire les lignes FA, FC, le triangle FAC, ſera la moitié du triangle ABC, puiſque ces triangles ayant la baſe commune, ſont entr'eux comme leur hauteur: c'eſt pourquoi cherchez une quatriéme proportionnelle aux trois lignes OG, FR, AC, & portant cette proportionnelle de A, en H, tirez les lignes OA, OH, les triangles AOH, AFC, ayant leurs hauteurs réciproques à leurs baſes par la conſtruction, ſeront égaux entre-

eux (*n.* 62.), donc puisque AFC, est la moitié du triangle, AOH, en est aussi la moitié.

Si on veut diviser le triangle ABC, en un plus grand nombre de parties égales comme en trois, quatre, cinq, &c. Prenez sur la hauteur BR, la partie RF, égale à la troisiéme, quatriéme ou cinquiéme partie de cette hauteur, & achevant le reste comme on vient de voir, le triangle AOH, sera le tiers, ou le quart, ou le cinquiéme du triangle total; ainsi il ne restera plus qu'à diviser la figure ABCHO, ou en deux parties égales ou en trois ou en quatre, &c. comme il sera dit plus bas.

Si on vouloit diviser le triangle en deux parties inégales, qui fussent comme une ligne à une autre ligne, on couperoit la hauteur en F, en sorte que RF, fût à cette hauteur comme la petite ligne à la somme des deux, &c.

Et si on vouloit le diviser en trois ou quatre parties, &c. qui fussent entr'elles comme quatre lignes, on prendroit la partie RF, qui fût à la hauteur BR, comme la premiere ligne à la somme de toutes les lignes, puis achevant le reste comme ci-dessus, on diviseroit la figure ABCHO, en parties proportionnelles aux autres lignes, &c.

Comme cette maniere de diviser, paroît incommode, à cause du petit espace QAO, qui est extrêmement étroit, eu égard à sa longueur, on peut corriger ce défaut, en tirant la droite OQ, parallele à la base, puis donnant au triangle AOH, le petit triangle QOA, & retranchant du même triangle AOH, un triangle SOH, égal au triangle QOA, ainsi qu'il sera enseigné plus bas (*n.* 172.); car alors le trapezoïde AQOS, sera égal au triangle AOH: après quoi on pourra diviser plus commodément l'espace restant QBHO, ainsi qu'il sera requis; ou si l'on veut encore, on prolongera le côté HO, en Z, puis on ajoûtera au triangle AOH, le triangle AZO, & on lui en retranchera un autre SZH, égal à AZO, & par conséquent le triangle AZS, sera égal au triangle AOH, & l'on pourra diviser encore plus commodément le trapezoïde restant ZBCH, ainsi qu'il sera demandé. Ceci mérite attention, parce qu'en fait de partages de terres, il est juste de faire les divisions, autant qu'on peut, de façon à satisfaire tous ceux qui partagent entr'eux.

## REMARQUE.

164. Quand la partie RF, qu'il faut prendre sur la hauteur du

triangle, se trouve plus grande que la perpendiculaire OG, le Probleme ne peut se résoudre selon la méthode que nous venons d'enseigner, parce qu'alors la base AH, qui est la quatriéme proportionnelle aux trois lignes GO, RF, AC, devient plus grande que la base AC, & qu'ainsi le triangle AOH, sortiroit hors du triangle total; c'est pourquoi au lieu de commencer la division du triangle ABC par le triangle AOH, il faut la commencer par une ligne droite, qui passe par le point O, & cette maniere dont on doit l'invention au Pere Tacquet dans sa Géometrie Pratique, est aussi ingénieuse qu'elle peut être utile, comme on pourra en juger ci-dessous.

## PROBLEME LXX.

165. *Diviser un triangle ABC* (Fig. 89.), *en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes paralleles à un côté AB.*

Divisez l'un des deux autres côtez BC, en autant de parties égales que le triangle doit en avoir, par exemple, en trois, aux points D, F; prenez une moyenne proportionnelle CG, entre le côté CB, & son tiers CD, & tirez la ligne GI, parallele à AB; prenez une moyenne proportionnelle CF, entre le côté BC, & ses deux tiers CE, & tirez FH, parallele à AB, & le triangle ABC, sera divisé en trois parties égales par les lignes GI, FH.

### DEMONSTRATION.

Les triangles ABC, IGC, étant semblables à cause des paralleles AB, IG, ils sont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez homologues CB, CG; mais par la construction on a :: CB. CG. CD. Donc $\overline{CB}^2$. $\overline{CG}^2$ :: CB. CD. Or CB, est à CD, comme 3 est à un; donc le triangle ABC, est triple du triangle IGC. On prouvera de même que le triangle ABC, est au triangle HFC, comme 3 est à 2, & que par conséquent le triangle HFC, est les deux tiers du triangle ABC; donc ôtant du triangle HFC, le triangle IGC, qui est le tiers du total, le trapezoïde restant, HFIG, est aussi le tiers du triangle ABC, & le trapezoïde ABFH, en est le tiers restant.

### COROLLAIRE.

166. Si au lieu de trois parties égales, on avoit voulu trois parties

ties inégales qui eussent été entr'elles en raison donnée, on auroit coupé le côté BC, en trois parties, qui auroient été en même raison que les trois lignes, & l'on auroit achevé le reste comme ci-dessus.

## PROBLEME LXXI.

167. *Diviser un triangle ABC* (Fig. 90.), *en autant de parties égales que l'on voudra, par des perpendiculaires tirées sur l'un des côtez AC.*

De l'angle opposé B, tirez la perpendiculaire BD, sur le côté AC, laquelle doit tomber en-dedans du triangle; car autrement le Probleme seroit impossible, comme on verra bien-tôt. Partagez le segment DC, en autant de parties que le triangle doit en avoir, par exemple, en trois aux points E, F, prenez une moyenne proportionnelle HC, entre le tiers FC du segment, & le côté entier AC, & du point H, élevez HR, perpendiculaire sur AC. De même prenez une moyenne proportionnelle CG, entre les deux tiers E, C, du segment, & le côté entier AC, & du point G, élevez la perpendiculaire GS, le triangle ABC, sera divisé en trois parties égales par les perpendiculaires HR, GS.

### DEMONSTRATION.

A cause des paralleles DB, HR, les triangles DBC, HRG, sont semblables, & donnent CD. DB :: CH. HR, & multipliant les deux premiers termes par AC, & les deux derniers par CH, on a CD×AC. DB×AC :: $\overline{CH}^2$. HR× CH, & mettant au lieu de $\overline{CH}^2$, le rectangle CF×AC, qui lui est égal, parce que les trois lignes CF. CH. CA, étant en proportion continuë, donnent CF×CA = $\overline{CH}^2$, on aura CD×AC. DB×AC :: CF×AC. HR×CH. Or le premier antecedent CD×AC, est triple du second antecedent CF×AC, parce que ces deux rectangles ayant la même base AC, sont entr'eux comme leurs hauteurs CD, CF; donc le premier conséquent DB×AC, est triple du second conséquent HR×CH. Mais le triangle ABC, est la moitié du rectangle DB×AC, & le triangle HRC, est la moitié du rectangle HR×CH; donc le triangle ABC, est triple du triangle HRC, & par conséquent HRC, est le tiers de ABC. On prouvera de même que le triangle GSC, est les deux tiers du triangle ABC;

ôtant donc de GSC, le triangle HRC, le trapezoïde restant GSHR, est le tiers du triangle ABC, & le trapeze ABGS, est l'autre.

### COROLLAIRE I.

168. Dans la figure 90, les moyennes proportionnelles CH, CG, sont sur le même segment DC, ce qui fait que les perpendiculaires HR, GS, rencontrent un même côté BC, & forment par conséquent des triangles sur lesquels la démonstration est fondée. Mais si le triangle étoit fait de telle sorte, que les perpendiculaires ne rencontrassent pas le même côté, comme il arrive au triangle ABC (*Fig* 91.), que nous supposons devoir être divisé en quatre parties égales, alors la méthode que nous venons de donner, ne peut servir que pour les parties comprises entre le point A & la perpendiculaire BD ; c'est pourquoi voici comme il faut faire dans ces occasions. Divisez le segment AD, en quatre parties égales ; prenez une moyenne proportionnelle entre l'une de ces parties & le côté AC, & élevez la perpendiculaire FG. Prenez de même une moyenne proportionnelle entre la moitié du segment & le côté AC, & si cette moyenne proportionnelle ne passe pas au-delà de D, tirez la perpendiculaire EN. Cela fait, comme la moyenne proportionnelle que vous prendriez entre les trois quarts du segment AD, & le côté AC, tomberoit en-delà de D, & que par conséquent la perpendiculaire venant à rencontrer l'autre côté BC, formeroit un quadrilatere, & non pas un triangle, passez à l'autre segment DC, & le divisant en quatre parties égales, prenez une moyenne proportionnelle entre l'une de ces parties & le côté AC, & tirez la perpendiculaire RH, & le triangle sera divisé en quatre parties égales ; car par la démonstration précédente, le triangle AGF, & le trapezoïde NGFE, en sont chacun le quart, & par la même démonstration le triangle RHC, en est aussi le quart ; d'où il suit que le pentagone irregulier ENBHR, doit en être aussi la quatriéme partie.

### COROLLAIRE. II.

169. Si au lieu de perpendiculaires on vouloit que ce fussent des lignes obliques sur AC, & qui fissent avec AC, un angle donné, en sorte qu'elles fussent paralleles entr'elles, du sommet B, on tireroit BD, qui feroit le même angle avec AC, & le reste

s'acheveroit comme ci-dessus, en tirant de l'extrêmité des moyennes proportionnelles, des lignes paralleles à BD.

### COROLLAIRE III.

170. Et si au lieu de parties égales on vouloit des parties inégales, on couperoit le segment, ou les deux segmens en même raison, & l'on acheveroit comme il vient d'être dit.

### COROLLAIRE IV.

171. Si la perpendiculaire ou la ligne oblique tomboit hors du triangle, il est visible que le Probleme seroit impossible.

### PROBLEME LXXII.

172. *Diviser un triangle ABC* (Fig. 92.) *en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes dont l'une soit parallele à un côté AC.*

De l'angle opposé B, abbaissez la perpendiculaire BD, & supposant qu'il faille diviser le triangle en quatre parties égales, divisez cette perpendiculaire en quatre parties égales entr'elles, puis prenez une moyenne proportionnelle BO, entre l'une de ces parties BI, & la perpendiculaire entiere, & tirez EF, parallele à AC, le triangle EBF, sera le quart du triangle total, parce que ces deux triangles étant semblables, sont entr'eux comme les quarrez de leurs hauteurs BO, BD, & que les quarrez $\overline{BO}^2$. $\overline{BD}^2$, sont entr'eux comme BI, est à DB, ou comme 1 à 4, à cause des lignes BI. BO. BD, qui sont en proportion continuë. Ainsi il ne restera plus qu'à prendre un point O, où vous voudrez, sur le contour du trapezoïde AEFC, & par ce point divisant le trapezoïde en trois parties égales, comme nous l'enseignerons ci-dessous, le triangle ABC sera divisé en quatre parties égales.

Si on avoit voulu quatre parties inégales qui eussent été entr'elles comme quatre lignes, on auroit coupé la hauteur BD, en sorte que BI, eût été à toute la hauteur, comme la premiere ligne à la somme des lignes, & achevant le reste comme ci-dessus, le triangle EBF, auroit été au triangle total, comme la premiere ligne à la somme des lignes, après quoi on auroit divisé le trapezoïde par un point O, pris sur son contour en partie proportionnelle aux trois autres lignes.

## PROBLEME LXXIII.

173. *Retrancher d'un triangle ABC* (Fig. 93.) *un triangle donné DEG.*

Changez le triangle DEG, en un autre SHG, qui lui ſoit égal, & qui ait la hauteur égale à la hauteur du triangle ABC; puis portez la baſe GS, ſur la baſe AC, du triangle ABC, de C en R, & tirez au ſommet B, la ligne RB, qui retranchera du triangle ABC, le triangle RBC, égal au triangle SHF, puiſque ces deux triangles ont la baſe égale à la baſe, & la hauteur à la hauteur; d'où il ſuit que le triangle retranché RBC, eſt auſſi égal au triangle donné DEG.

## PROBLEME LXXVI.

174. *Retrancher du triangle ABC* (Fig. 94.), *un triangle égal à un triangle donné* abc, *par une parallele à un côté AC.*

Prenez une moyenne proportionnelle GH, entre la hauteur BD, & la baſe AC, du triangle ABC, & de même une moyenne proportionnelle IK, entre la hauteur *bd*, & la baſe *ac*, du triangle *abc*; puis prenez une quatriéme proportionnelle BO, aux trois lignes GH, IK, BD, & par le point O, tirez RS, parallele à la baſe, & cette ligne retranchera du triangle ABC, le triangle RBS, égal au triangle *abc*.

### DEMONSTRATION.

Les trois lignes BD. GH. AC, étant en proportion continuë, on a $\overline{GH}^2 = BD \times AC$; mais le triangle BAC, eſt la moitié du rectangle BD×AC, donc il eſt auſſi la moitié de $\overline{GH}^2$. Par la même raiſon le triangle *bac*, eſt la moitié de $\overline{IK}^2$; & par conſéquent le triangle BAC, eſt au triangle *bac*, comme $\overline{GH}^2$, eſt à $\overline{IK}^2$; donc le triangle ABC, doit être auſſi au triangle qu'on doit lui retrancher, comme $\overline{GH}^2$, eſt à $\overline{IK}^2$. Mais le triangle ABC, & celui qu'on doit lui retrancher, étant ſemblables à cauſe des baſes paralleles, ces deux triangles doivent être entr'eux comme les quarrez de leurs hauteurs, c'eſt-à-dire, comme $\overline{BD}^2$ à $\overline{BO}^2$; donc $\overline{GH}^2 . \overline{IK}^2 :: \overline{BD}^2 . \overline{BO}^2$. Or quand les quarrez ſont proportionnels,

les racines ſont auſſi proportionnelles ; donc GH. IK :: BD. BO, & par conſéquent la quatriéme proportionnelle BO, aux trois GH. IK. BD, eſt la hauteur du triangle qu'on doit retrancher.

## PROBLEME LXXV.

175. *Un angle ZAX, étant donné* (Fig. 95.), *& un point D, ſur l'une de ſes jambes, tirer de ce point une ligne DS, qui faſſe avec l'angle donné un triangle SAD, égal à un triangle donné HIP.*

Du ſommet I, du triangle HIP, abbaiſſez ſur ſa baſe la perpendiculaire IQ, qui ſera ſa hauteur. Puis prenez une quatriéme proportionnelle aux trois lignes AD, HP, IQ, & élevez-la perpendiculairement ſur l'extrêmité A, de la ligne AD, de A en T. Du point T, tirez TS, parallele à AD, & du point S, où elle coupe le côté AZ, de l'angle donné ; tirez SD, & le triangle SAD, ſera égal au triangle HIP : car par la conſtruction ces deux triangles ont les baſes AD, HP, réciproques aux hauteurs IQ, AT.

## PROBLEME LXXVI.

176. *Un angle ZAF, étant donné* (Fig. 96.), *& un point B, hors de cet angle, tirer une ligne BE, qui faſſe un triangle EAG, égal à un triangle donné X.*

Du point B, tirez BH, parallele au côté AF, juſqu'à ce qu'elle rencontre en N, l'autre côté AZ prolongé. Du même point tirez une ligne BK, qui faſſe avec l'angle ZNB, un triangle égal au triangle donné (*n.* 175.) ; enſuite ſur la ligne indéfinie NZ, déja coupée en K, & en A, prenez un autre point E en ſorte que NK, AE, NE, ſoient en proportion continuë (*Partie* 1. *n.* 313.), & du point E, au point B, tirez la droite EB, qui formera le triangle EAG, égal au triangle donné X.

### DEMONSTRATION.

Les triangles NBK, NBE, ayant le ſommet commun en B, ſont entr'eux comme leurs baſes NK, NE ; or les trois lignes NK, AE, NE, étant en proportion continuë, NK, eſt à NE, en raiſon doublée de NK, à AE, ou de AE, à NE ; donc les triangles NBK, NBE, ſont en raiſon doublée de AE à NE. Mais les triangles AGE, NBE, étant ſemblables, ſont auſſi en raiſon doublée de AE, à NE. Donc le triangle NBE, ayant même rapport au triangle NBK, qu'au triangle AGE, le triangle AGE,

est égal au triangle NBK, & par conséquent au triangle donné X.

## REMARQUE.

177. Il peut arriver que le point K, tombe entre les points A, N, où qu'il tombe en-deça de A, ou enfin qu'il tombe sur le point A. Dans les deux premiers cas on trouvera le point E, selon qu'il a été dit (*Partie* 1. *n.* 313.); mais dans le troisiéme, on prendra une ligne NK (*Fig.* 97.) égale à la ligne NA; sur le point K, on élevera la perpendiculaire KL, égale à la moitié de NK; du point L, on décrira un cercle, & du point N, on tirera la ligne NMLP, laquelle on portera de K, en E, & la ligne NE, étant portée sur NZ (*Fig.* 96.), de N en E, on aura :: NK. AE. NE. Car puisque NP (*Fig.* 97.), est égal à KE; donc $\overline{KE}^2$ est égal à $\overline{PN}^2$, mais $\overline{PN}^2$, est égal aux deux rectangles PM×PN, MN×PN; & le rectangle PM×PN, est égal à EK×KN, à cause que EK, est égal à PN, & KN à PM, par la construction; de même que le rectangle MN×PN, est égal à $\overline{KN}^2$, à cause que KN, est tangente du cercle, & PN, secante. Donc $\overline{KE}^2$, est égal à EK×KN, plus $\overline{KN}^2$, ou à EN×NK: Prenant donc pour les extrêmes d'une proportion NK, EN; & pour la moyenne KE, on aura :: NK. KE. NE. ou NK. AE. NE. à cause de KE = AE.

## PROBLEME LXXVII.

178. *Diviser un triangle ABC, en autant de parties égales ou inégales en raison donnée qu'on voudra, par des lignes tirées d'un point exterieur D* (Fig. 98. 99.).

Il peut arriver ou que le point D, se trouve sur le prolongement de l'un des côtez AB, ou qu'il n'y soit pas.

Dans le premier cas, supposant qu'on veüille que le triangle soit divisé en trois parties égales, coupez le côté BC, aussi en trois parties égales, & de l'angle opposé A, tirez aux points de division les lignes AE, AI, qui couperont le triangle en trois également. Cela fait, du point D, tirez une ligne qui fasse avec l'angle C, un triangle GHC, égal au triangle AEC, qui est le tiers du triangle total. De même par le point D, tirez une ligne qui fasse avec le même angle C, un triangle ORC, égal au triangle AIC,

qui eſt les deux tiers du triangle total, & le triangle ABC, ſera diviſé en trois parties égales par les lignes OR, GH ; car ſi du triangle ORC, qui eſt les deux tiers du triangle total, on ôte le triangle GHC, qui en eſt le tiers, le trapeze ORHG, ſera le tiers du triangle, & par conſéquent le trapeze ABRO, en ſera auſſi le tiers.

Dans le ſecond cas (*Fig. 99.*), tirez du point D, à l'angle oppoſé A, la ligne AD ; puis diviſez le côté BC en trois parties égales, & par le point de diviſion tirant des lignes au ſommet A, le triangle ABC, ſera diviſé en trois parties égales ; c'eſt pourquoi du point D, vous tirerez une ligne qui faſſe avec l'angle C, un triangle RSC, qui ſoit égal au tiers du triangle ABC ; enſuite comme l'autre point de diviſion ſe trouve ici au-delà de la ligne DA, vous tirerez du point D, une ligne DVI, qui faſſe avec l'angle B, un triangle VBI, égal au tiers du triangle ABC, & alors la figure IVARS, ſera auſſi le tiers du triangle ABC.

Si les points de diviſion du côté BC, tomboient tous d'un même côté de la ligne DA, comme par exemple, du côté de l'angle C, on feroit d'abord avec cet angle un triangle égal au tiers du triangle ABC, puis avec le même angle on en feroit un autre égal aux deux tiers, &c.

Que ſi on vouloit diviſer en parties inégales en raiſon donnée, on couperoit le côté BC, en même raiſon, & le reſte s'acheveroit comme ci-deſſus.

Et ſi la ligne DA, paſſoit par l'une des diviſions du côté BC ; alors le triangle OAC, ſeroit ou le tiers, ou les deux tiers du triangle, ou une partie proportionnelle, ſelon la diviſion par où cette ligne paſſeroit.

## REMARQUE.

179. Il ne nous reſte qu'à parler de la maniere de diviſer un triangle en deux parties, qui ſoient en raiſon donnée par une ligne droite tirée d'un point donné dans l'aire, & c'eſt ce que nous allons executer en ſuivant les traces du Pere Tacquet, qui en eſt l'inventeur, & faiſant voir en même tems comment on peut rendre ce Probleme général pour la diviſion d'un triangle, en tel nombre de parties qu'on voudra, lorſque le cas eſt poſſible.

## LEMME.

180. *Une ligne AZ* (Fig. 100.), *indéfinie du côté de Z, ayant été coupée aux trois points N, X, M, a été coupée ensuite en un autre point O, en sorte que ON, est égal à XA, & il se trouve que le rectangle MO×ON, est plus petit que le rectangle MN×NA. On demande en quel point, comme K, on peut couper cette ligne, en sorte que le rectangle × KOON, soit égal à KN×NA, & duquel côté ce point doit être à l'égard du point M.*

Prenez une troisiéme proportionnelle aux deux lignes XN, XA, & portez-la de N, en K, le point K, sera le point qu'on cherche, & ce point sera en-delà de M, du côté de Z. De plus, ON, étant égale à XA, ôtant de part & d'autre XN, on aura OX = NA.

### DEMONSTRATION.

En premier lieu, supposons la chose faite, & que le rectangle KO×ON, c'est-à-dire KRSO, soit égal au rectangle KN×NA, ou KNVT, portez la hauteur NV, ou NA, ou OX du rectangle KN×NA, sur la hauteur OS du rectangle KRSO, & tirez la parallele PQ, à la base KO; le rectangle KOQP, sera égal au rectangle KOLT; ainsi le rectangle restant ONVL, sera égal au rectangle restant QPRS: & comme ces rectangles sont sur des bases inégales de même que les hauteurs, la hauteur PS, ou XN, son égale, est à la hauteur NV, ou NA, réciproquement comme la base ON, est à la base KO; on a donc XN. NA :: ON. KO, & *componendo*, XN. XN+NA :: ON. ON+KO, ou XN. XA :: ON. NK, & mettant au lieu de ON, son égal XA, on a enfin XN. XA :: XA. MK, & par conséquent MK, doit être troisiéme proportionnelle aux deux XN, XA.

En second lieu, le point K doit se trouver au-delà de M, ou entre M, & Z; car puisque le rectangle MO×ON, ou MOSE, est plus petit que le rectangle MNVH, par la supposition si l'on prend un point *a*, en-deçà de M, le rectangle *a*OSD, sera encore moindre que le rectangle *a*NV*b*; pour le prouver, considerez que la hauteur OS, ou ON, étant égale à XA, est plus grande que NA, ou que la hauteur NV; ainsi le rectangle M*ab*H, est moindre que le rectangle M*ad*E, qui a même base que lui. Si donc du rectangle MOSE, on retranche le rectangle M*ad*E, & du rectangle

rectangle MNVH, le rectangle M*ab*H, il eſt évident que le rectangle reſtant *a*OS*d*, ſera encore moindre que le reſtant *a*NV*b*.

### COROLLAIRE I.

181. Si XN, eſt égal à NA, & NM, quadruple de NA, alors le point K, tombera ſur le point M; car XA, étant double de XN, la troiſiéme proportionnelle aux deux XN, XA, doit être quadruple de XN; & par conſéquent elle eſt égale à XM, & en ce cas le rectangle MO×ON, eſt égal au rectangle MN×NA, en ſuppoſant toujours que ON, eſt pris égal à XA.

### COROLLAIRE II.

182. Si NM, eſt quadruple de NA, & que XN, ſoit plus grand ou moindre que NA; alors la troiſiéme proportionnelle NK, eſt plus grande que NM: car ſi après avoir pris ON, égal à XA (*Fig.* 101.), vous diviſez MN, en deux également au point S, cette ligne MN, étant auſſi diviſée en deux parties inégales au point O, le rectangle MO×ON, des parties inégales, ſera moindre que le quarré de l'une des parties égales SN (*Partie* 1. *n.* 237.); mais le quarré de SN, eſt égal à deux rectangles de SN, par NA, ou au rectangle de MN, par NA; donc le rectangle MO×ON, eſt plus petit que le rectangle MN×NA, & par conſéquent le point K, où l'on peut faire ces deux rectangles égaux, eſt en-delà de M; donc la troiſiéme proportionnelle NK, eſt plus grande que NM.

### PROBLEME LXXVIII.

183. *Par un point donné B. dans un angle SA Z* (Fig. 102.), *tirer une ligne qui faſſe avec cet angle le moindre triangle qu'elle puiſſe faire.*

Du point B, tirez BN, parallele à l'un des côtez SA, faites NC, égal à NA, & du point C, par le point B, tirez la ligne CP, le triangle CAP, ſera le moindre qu'on puiſſe faire par une ligne qui paſſe par le point B.

### DEMONSTRATION.

Prenez un autre point X en-deſſous, ou en-deſſus de N, d'où vous tirerez XBR; enſuite prenez une troiſiéme proportionnelle NM, aux deux lignes CN, CA, & une troiſiéme proportionnelle

NG, aux deux XN, XA; la ligne NM, ſera quadruple de NA (*n.* 181.), & NG, ſera plus grande que NM (*n.* 182.). Or les triangles CBN, NBM, ayant même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes CN, NM, ou en raiſon doublée de CN, CA, à cauſe des trois proportionnelles CN, CA, NM, & les triangles ſemblables CBN, CPA, ſont auſſi en raiſon doublée de CN, CA; donc les triangles NBM, CPA, ſont égaux entr'eux, ayant même raiſon au triangle CBN.

De même les triangles XBN, NBG, ſont entr'eux comme leurs baſes NX, NG, ou en raiſon doublée de XN, XA, à cauſe des trois proportionnelles XN, XA, NG, & les triangles ſemblables XBN, XRA, ſont auſſi en raiſon doublée de XN, XA; donc les triangles NBG, XRA, ſont égaux entr'eux, ayant même raiſon au triangle XBN; mais le triangle NBG, eſt plus grand que NBM: donc le triangle XRA, égal à NBG, eſt plus grand que le triangle CPA, égal à NBM, & par conſéquent CPA, eſt le moindre triangle qu'on puiſſe faire par une ligne tirée du point B.

### COROLLAIRE I.

184. Il ſuit de-là qu'afin que le triangle NMB, ſoit égal au moindre CPA, il faut que NM, ſoit quadruple de NA.

### COROLLAIRE II.

185. Il ſuit encore que ſi on prend ſur la parallele NBO, un point quelconque O, en-deſſous, ou en-deſſus de B, la ligne qu'on tirera de C par O, formera le moindre triangle qu'on puiſſe faire par un ligne tirée du point O.

## LEMME.

186. *Une ligne droite KA, étant coupée en N* (Fig. 103.), *la couper de nouveau en E, en ſorte qu'on ait* :: *NK. AE. NE.*

Prenez une moyenne proportionnelle NF, entre NA, NK; ſur KN, pris pour diametre, décrivez le demi-cercle KRN. Du point F, tirez FM, parallele à KA, ſi cette parallele coupe le demi-cercle en un point H, abbaiſſez de ce point la perpendiculaire HQ; portez QN de A en *e*, & QK, de A en E, & vous aurez :: KN. AE. NE, & :: KN. A*e*. N*e*; c'eſt-à-dire que le Probleme aura deux ſolutions. Mais ſi FM, touche le demi-cercle

ſans le couper, le Probleme n'aura qu'une ſolution, parce qu'alors QN ſera égal à QK, & ſi FM, ne coupe ni ne touche le cercle, le Probleme ſera impoſſible.

### DEMONSTRATION.

Les demi-cercles KHN, KFA, étant inégaux, la ligne HQ, eſt plus grande par rapport au petit demi-cercle que FN, qui eſt égale à HQ, ne l'eſt par rapport au grand demi-cercle; ainſi HQ eſt plus près du centre du petit demi-cercle, que FN, n'eſt près du centre du grand, & la fléche QN, eſt par conſéquent plus grande par rapport à HQ, que la fléche NA, par rapport à FN; donc QN, eſt plus grand que NA; donc auſſi le point *e* tombera entre les points Q, N, & Q*e* ſera égal à NA. Cela poſé :

Les quarrez $\overline{QH}^2$, $\overline{NF}^2$, étant égaux, les rectangles KQ×QN, KN×NA, égaux à ces quarrez, ſont auſſi égaux entr'eux, & ajoûtant de part & d'autre le quarré $\overline{QN}^2$, on aura KN×QN $=$KN×NA$+\overline{QN}^2$, ou KN×NA$+\overline{Ae}^2$, & ôtant d'une part le rectangle KN×Q*e*, & de l'autre le rectangle KN×NA, égal à KN×Q*e*, on aura KN×N*e*$=\overline{Ae}^2$. Donc :: KN. A*e*. N*e*.

De même ſi aux rectangles égaux NQ×QK, AN×NX, on ajoûte le quarré $\overline{KQ}^2$, on aura NK×KQ$=$AN×NK$+\overline{KQ}^2$; mais NK×KQ $=$ NK×AE, par la conſtruction; donc NK×AE $=$AN×NK$+\overline{KQ}^2$; ôtant donc de part & d'autre le rectangle KN×NA, il reſte KN×NE$=\overline{KQ}^2$, ou KN×NE$=\overline{AE}^2$; donc :: KN. AE. NE.

### COROLLAIRE I.

187. Puiſqu'il faut néceſſairement, pour rendre le Probleme poſſible, que FM, touche du moins le demi-cercle, & qu'elle ne peut le toucher qu'au point R, qui eſt le milieu de la circonference, il s'enſuit qu'alors NF, ou HQ, eſt égal à la moitié de KN, & qu'elle ne ſçauroit être plus grande ſans rendre le Probleme impoſſible. Dans ce même cas NA, eſt égal au quart de KN, à cauſe des trois proportionnelles :: KN. NE. NA, dont la premiere étant double de la ſeconde, doit par conſéquent être

quadruple de la troiſiéme ; d'où il ſuit que ſi NA, eſt plus grand que le quart de NK, le Probleme ne peut ſe réſoudre.

## PROBLEME LXXIX.

188. *Par un point donné B, au-dedans d'un angle ZAX* (Fig. 104.), *tirer une ligne droite qui faſſe avec cet angle un triangle égal à un triangle donné.*

Du point B, tirez BN, parallele à un des côtez AX, & du même point B, tirez la droite BK, qui faſſe avec l'angle BNK, un triangle BNK, égal au triangle donné (*n.* 175.). Cela fait, ſi NK eſt égal à 4NA, faites NE, égal à NA, & tirez de, E par B, la droite EG, qui formera le triangle EGA, égal au triangle donné ; & ce ſera même le moindre triangle qu'on puiſſe faire par une ligne droite tirée du point B (*n.* 183. 184.).

Si KN, eſt plus grand que 4NA, coupez la ligne AK, en un point E, en ſorte que vous ayiez :: NK. AE. NE, & vous trouverez un ou deux points E, *e* (*n* 186.), de chacun deſquels vous tirerez une ligne par le point B, ce qui vous donnera EGA, *eg*A, qui réſoudront également le Probleme (*Fig.* 104. 105.) ; car les deux triangles EBN, KBN, ayant le ſommet commun, ſont entr'eux comme leurs baſes NE, NK, ou en raiſon doublée NE, AE, à cauſe des trois proportionnelles NK, AE, NE. De même les triangles ſemblables EBN, EGA, ſont en raiſon doublée de leurs côtez homologues NE, AE ; donc le triangle EGA, eſt égal au triangle KBN, puiſque ces deux triangles ont même raiſon au triangle EBN ; on prouvera de même que le triangle *eg*A eſt égal au triangle KBN, à cauſe des trois proportionnelles NK, A*e*, N*e*, &c.

Enfin ſi NK, eſt moindre que 4NA, le Probleme eſt impoſſible, puiſqu'alors le triangle NBK, eſt moindre que le moindre triangle qu'on puiſſe faire avec l'angle A, par une ligne tirée du point B.

### COROLLAIRE.

189. Lorſque :: EN. AE. NK quelque point I, que l'on prenne ſur la parallele IBA (*Fig.* 105.), les lignes tirées par E, & par I, ou par *e*, & par I, réſoudront également le Probleme en ſuppoſant que le triangle KBE, aye ſon ſommet au point I, & non plus en B.

## LEMME.

190. *La moindre partie qu'on puisse retrancher d'un triangle ABC* (Fig. 106.), *par un point K, dans l'aire, est un triangle, & non pas un trapeze.*

Si l'on prétend que le trapeze EDCB, soit la moindre partie qu'on puisse retrancher du triangle ABC, par une droite tirée du point K; tirez les diagonales DC, EB: puis donc que le trapeze EDCB, est moindre que le triangle EAD; à plus forte raison le triangle DCB, sera moindre que le triangle DCA: & comme ces triangles ont le sommet commun en C, il s'ensuit que la base BD, est moindre que la base BA; on démontrera de même que CE, est moindre que EA.

D'autre part, ou les deux lignes EK, KD, sont égales, ou l'une des deux KD, est plus grande que l'autre, supposons qu'elle soit plus grande, & tirant de son extrêmité D, la droite DF, parallele à AC, tirez ensuite de F, par K, la droite FG, les deux triangles FKD, EKG, étant semblables, DF, sera plus grand que EG, à cause de KD, plus grand que EK, & DF seroit égal à EG, si KD, étoit égal à EK; or dans les triangles semblables CBA, FBD, BD, étant moindre que DA, & par conséquent moindre que la moitié de BA, FD, est aussi moindre que la moitié de CA; donc EG, qui est ou moindre, ou égal à FD, selon que EK, est ou moindre, ou égal à KD, est aussi moindre que la moitié de AC; & comme CE, est moindre que la moitié de AC, il s'ensuit que CG, est moindre que AC. Donc la ligne FG, retranche du triangle ABC, le triangle CGF; mais le triangle CFG, est moindre que le trapeze; donc, &c.

### REMARQUE.

191. Ce Lemme n'est ici que pour faire voir que par le mot de moindre triangle, on entend absolument la moindre partie qu'on puisse retrancher d'un triangle par un point donné dans l'aire.

## PROBLEME LXXX.

191. *D'un point donné E, dans l'aire d'un triangle ABC* (Fig. 107.), *retranchez de ce triangle le moindre triangle qu'on puisse en retrancher.*

Du point E, tirez les droites GH, IK, RS, paralleles aux trois côtez chacune à chacun, si quelqu'une de ces paralleles, comme par exemple, RS coupe sur un côté AB, un segment RB, compris entr'elle & le côté parallele BC, lequel soit plus grand que le segment RA, compris entre la même parallele RS, & l'angle A, opposé au côté parallele, vous choisirez l'angle A, pour faire avec lui le plus petit triangle qu'on puisse retrancher du triangle ABC; & pour cela vous vous servirez ou de GE, qui est parallele à la jambe AC, ou de IK, qui est parallele à la jambe AB, en faisant GD, égal à AG, ou IQ, égal à IA; car si du point D, par le point donné E, vous tirez DQ, ou si du point Q, par le même point E, vous tirez QD, la ligne DQ, ou QD, formera le triangle ADQ, qui sera le moindre qu'on puisse retrancher du triangle ABC, du côté de l'angle A; car puisque RB, est plus grand que RA, à plus forte raison BG, sera plus grand que AG; ainsi portant AG, de G en D, le point D, tombera sur le côté AB, entre A & B; on prouvera de même que le point Q, doit tomber entre A & C, & que par conséquent la ligne QD, sera toute entiere dans le triangle ABC, de même que le triangle retranché QDA; or ce triangle est le moindre qu'on puisse faire par le point E, avec l'angle A, puisque GD, est égal à GA, & IQ, égal à IA (*n.* 183.); donc il est aussi le moindre qu'on puisse retrancher du triangle ABC, du côté de l'angle A.

Quant à l'angle B, il est vrai que la partie BK, coupée par la parallele IK, sur son côté BC, étant moindre que l'autre partie KC, si l'on porte BK, de K en Z, le point Z, tombera entre les points B & C; mais comme la partie RB, coupée par l'autre parallele RS, est plus grande que la partie restante RA, il s'ensuit que si l'on porte RB, de R en X, le point X, tombera au-delà de A; mais si l'on tire du point Z, par E, la ligne ZX, ou du point X, par E, la ligne XZ, le triangle XBZ, sera le moindre triangle qu'on puisse faire avec l'angle B, & ce moindre triangle auroit une partie hors du triangle ABC; donc on ne peut retrancher du triangle ABC, par le point E, un moindre triangle du côté de l'angle B. On prouvera de même qu'on ne peut retrancher du triangle ABC, par le point E, un moindre triangle du côté de l'angle C, à cause que CS, étant plus grand que SA, le double de CS, tomberoit au-delà de A, & que par conséquent le moindre triangle qu'on pourroit faire par le point E, avec l'angle C, auroit une partie hors du triangle ABC.

Il suit de-là 1°, que lorsqu'un segment compris entre une parallele & le côté parallele, est plus grand que le segment compris entre le même parallele & l'angle opposé, on ne peut retrancher du triangle ABC, qu'un seul moindre triangle, lequel doit être pris du côté de l'angle opposé à la parallele. En second lieu, que pour pouvoir retrancher d'un triangle ABC, du côté d'un angle A, un moindre triangle, il faut que les deux lignes GH, IK, tirées par le point E, parallelement aux deux jambes de cet angle, fassent sur ces jambes des segmens AG, AI, moindres que les segmens restans GB; IC; car si l'un d'eux étoit plus grand, le Probleme ne seroit pas possible.

Présentement si tous les segmens compris entre les paralleles & les côtez opposés, sont moindres que les segmens compris entre les mêmes paralleles & les angles opposés (*Fig.* 108.), il est évident qu'on pourra retrancher du triangle ABC, un moindre triangle du côté de chaque angle; mais pour sçavoir lequel des trois est absolument le moindre, prenez sur un même côté BC, les segmens CH, BK, & sur l'autre jambe de l'angle C, le segment CS, & cherchant une quatriéme proportionnelle Z, à ces trois segmens, comparez ensemble le segment AI, qui appartient à l'angle A, le segment SC, qui appartient à l'angle C, & la ligne Z, que vous regarderez comme appartenant à l'angle B. Si ces trois lignes sont égales entr'elles, les trois moindres triangles seront aussi égaux, comme on verra dans le Probleme suivant; mais si elles sont inégales, & que Z, soit la moindre, le moindre triangle fait avec l'angle B, est aussi le moindre des trois.

## DEMONSTRATION.

Du point E, tirez ET, perpendiculaire sur le côté AC, & EP, perpendiculaire sur BC. Le moindre triangle qu'on puisse faire avec l'angle A, est égal à un triangle dont la hauteur est ET, & la base 4AI (*n.* 184.); de même le moindre triangle qu'on puisse avec l'angle C, est égal à un triangle qui a la même hauteur ET, & pour base 4SC. Donc ces deux triangles sont entr'eux, comme 4AI, 4SC, ou comme AI, SC: Par la même raison les moindres triangles qu'on peut faire avec les angles C, B, sont entr'eux 4CH, 4BK, ou comme CH, BK; mais CH. BK :: CS. Z. Donc les moindres triangles qu'on puisse faire avec les angles C, B, sont entr'eux comme CS. Z; les trois lignes AI, SC, Z, marquent donc les raisons des trois triangles entr'eux; mais Z,

eſt la moindre des trois lignes par la ſuppoſition; donc le triangle fait avec l'angle B, eſt auſſi le moindre qu'on puiſſe retrancher du triangle ABC.

### COROLLAIRE.

192. Donc ou deux des moindres triangles qu'on peut faire avec les angles d'un triangle ABC, tombent en partie hors de ce triangle, ou tous les trois ſont entierement dans le triangle, & jamais tous les trois ne peuvent tomber en partie en-dehors.

## PROBLEME LXXXII.

193. *Trouver dans l'aire d'un triangle ABC* (Fig. 109.), *un point E, par lequel on puiſſe faire avec les trois angles, trois moindres triangles qui ſoient égaux entr'eux.*

Du ſommet B, tirez ſur le milieu D de la baſe AC, la droite BD, dont vous prendrez le tiers de D en E, & le point E ſera le point cherché; car ſi de ce point vous tirez des paralleles aux trois côtez, les trois triangles HBM, IAG, FCK, formés par ces paralleles, ſeront égaux entr'eux, & ce ſeront les moindres triangles qu'on puiſſe faire avec les angles A, B, C.

### DEMONSTRATION.

Puiſque AD, eſt égal à DC, HE, eſt égal à HM; mais à cauſe des paralleles HA, EF, on a AF égal à HE; & par la même raiſon GC, égal à EM; d'où il ſuit que AF, eſt égal à GC. Or à cauſe des triangles ſemblables DAB, DFE, FD, eſt la moitié de AF, de même que DE eſt la moitié de EB, par la conſtruction, & on prouvera de même que DG, eſt la moitié de GC. Donc FD + DG, ou FG, eſt égal à AF, ou à GC, & par conſéquent la baſe AC, eſt diviſée en trois parties égales aux points F, G. Il eſt aiſé de voir par un ſemblable raiſonnement, que les côtez AB, BC, ſont diviſés chacun en trois parties égales. Cela poſé:

Les triangles AIG, FKC, ſont ſemblables, & de plus la baſe AG, eſt égale à la baſe FC; donc ces deux triangles ſont égaux, de même les triangles AIG, HBM, ſont ſemblables, & leurs baſes AI, HB, ſont égales; donc ces deux triangles ſont auſſi égaux; donc tous les trois ſont égaux entr'eux. Mais le triangle IAG, eſt le moindre qu'on puiſſe faire du point E, avec l'angle A, puiſque HI, eſt égal à AH, & FG, égal à AF (*n.* 183.), & il en eſt de même des deux autres triangles FKC, HBM, faits avec

avec les angles C, & B; donc ces trois triangles égaux entr'eux, sont les moindres qu'on puisse faire avec les angles A, C, B, & il est évident que ces trois triangles sont tous entiers dans le triangle ABC.

### COROLLAIRE.

194. Si après avoir trouvé dans un triangle ABC (*Fig.* 110.), le point E, par où les paralleles tirées aux côtez, forment avec les trois angles A, B, C, trois triangles égaux, on prend un autre point O, sur la ligne BD, en-dessous du point E, & qu'on tire les paralleles *pq*, *ru*, *gt*, les deux moindres triangles qu'on pourra faire avec les angles A, C, seront égaux entr'eux; car *p*O, étant égal à O*q*, A*t*, est par conséquent égal à *u*C; or les moindres triangles qu'on puisse faire avec les angles A, C, sont entr'eux comme A*t*, *u*C (*n.* 191.), donc ils sont égaux entr'eux. De plus, le moindre triangle qu'on puisse faire avec l'angle B, est plus grand que chacun des deux qu'on peut faire avec les angles A, C; car puisque BK, est égal à CM, B*g*, est par conséquent plus grand que C*q*. Ainsi si l'on prend une quatriéme proportionnelle X, aux trois segmens C*q*, B*g*, C*u*, cette quatriéme proportionnelle sera plus grande que C*u*. Mais les trois moindres triangles qu'on puisse faire avec les angles A, C, B, ont même rapport qu'on puisse faire avec les angles A, C, B, ont même rapport entr'eux que les trois lignes A*t*, C*u*, X (*n.* 191.), dont les deux premieres sont égales; donc le triangle qu'on peut faire avec l'angle B, est plus grand que chacun des deux autres.

## PROBLEME LXXXIII.

195. *Diviser un triangle ABC, en deux parties, qui soient entr'elles comme deux lignes R, S* (Fig. 111.) *par un point donné E.*

Coupez un côté BC, en D, en sorte que CD soit à DB, comme R, est à S, & de l'angle opposé A, tirez la ligne AD, les triangles ACD, ADB, seront entr'eux comme les lignes R, S. Du point E, retranchez du triangle ABC, le plus petit triangle FBQ; si ce triangle est égal au petit triangle ADB, le Probleme est résolu.

Si FBQ, est plus grand que ADB, le Probleme est impossible, puisqu'on ne peut pas retrancher par le point E, un moindre triangle.

Enfin si FBQ, est moindre que ADB, faites du point E, avec chaque angle A, B, C, un ou deux triangles, s'il se peut, égaux

chacun à ADB (*n.* 188.), & de même un ou deux triangles égaux chacun au triangle ADC, & ceux de ces triangles qui seront tous entiers dans le triangle ABC, résoudront le Probleme.

## REMARQUE I.

196. Pour rendre ce Probleme général pour tel nombre de parties égales ou inégales qu'on voudra, supposons, par exemple, qu'on voulût diviser par le point E, le triangle ABC, en quatre parties égales, on prendroit la partie BD, égale à la quatriéme partie du côté AC, & le triangle ADB, seroit le quart du triangle. Faisant donc comme il vient d'être enseigné, & supposant que le triangle FEB, fût égal au triangle ADB, il ne resteroit plus qu'à diviser le trapeze AFEC, en trois parties égales par le point E, comme nous allons voir dans le Probleme suivant.

De même si on vouloit diviser le même triangle en quatre parties inégales, qui fussent entr'elles comme quatre lignes, on prendroit la partie BD, en sorte qu'elle fût au côté C, comme l'une des lignes à la somme des lignes, & achevant le reste à l'ordinaire, le triangle FED, seroit au total comme la ligne proportionnelle à BD, est à la somme des lignes; c'est pourquoi on diviseroit ensuite le trapeze AFQC, par le point E, en trois parties proportionnelles aux trois autres lignes.

Que si en prenant le rapport de l'une des lignes à la somme des lignes pour trouver la partie BD, le Probleme étoit impossible, on prendroit le rapport d'une autre ligne à la somme des lignes, &c. & si nul rapport de chaque ligne ne rendoit le Probleme possible, ce seroit une marque qu'on ne pourroit le résoudre.

## REMARQUE II.

197. Comme on a souvent besoin lorsqu'il s'agit de diviser les triangles en plusieurs parties égales ou inégales, de sçavoir diviser les trapezes ou les figures d'un plus grand nombre de côtez en plusieurs parties par un point pris sur leur contour, je vais en enseigner la maniere dans le Probleme suivant; après quoi je traiterai en particulier de la division des rectangles, des parallelogrames, des trapezes, &c.

## PROBLEME LXXXIV.

198. *Diviser un polygone quelconque regulier ou irregulier en autant*

*de parties qu'on voudra, égales ou inégales, en raison donnée par un point pris sur son contour* (Fig 112.).

Soit la figure irreguliere ABCDEF, qu'on propose de diviser par le point O, en trois parties, qui soient entr'elles comme les lignes *ab*, *bc*, *cd*; du point O, tirez aux angles de la figure les droites OF, OE, OD, OC, qui partageront la figure en cinq triangles; réduisez ces triangles à avoir la même hauteur (*n.* 89. 90.) & alors ils seront entr'eux comme leurs bases; c'est pourquoi vous diviserez la ligne *ad*, en cinq parties PQ, QR, RS, ST, TV, qui soient entr'elles comme les cinq bases des triangles réduits; cela fait, comme la seconde de ces parties est divisée au point *b*, en deux parties Q*b*, *b*R, par la premire ligne; divisez la base du second triangle FOE, en parties proportionnelles à Q*b*, *b*R, & du point Z, tirant ZO, la figure AOZ, sera à la figure entiere comme la ligne donnée *ab*, à la somme des trois lignes *ab*, *bc*, *cd*; car par la construction le triangle FOE, est à la figure entiere, comme la partie QR, à toute la ligne PV, ou *ad*, & *permutando*, le triangle FOE, est à QR, comme la figure entiere à la ligne *ad*. Mais par la même construction le triangle ZOE, est au triangle ZOF, comme *b*R, est à Q*b*, & *componendo*, FOE, est à ZOF, comme QR, est à Q*b*, & *permutando*, FOE, est à QR, comme FOZ, est à Q*b*. Donc FOZ, est à Q*b*, comme la figure entiere est à la ligne *ad*, ou *permutando*, FOZ, est à la figure comme Q*b*, est à *ad*. Or le triangle AOF, est à la figure entiere, comme PQ, à la ligne *ab*; donc AOF + FOZ, c'est-à-dire, la partie AOZ, est à la figure entiere, comme PQ + Q*b*, c'est-à-dire, comme la premiere des lignes *ab*, est à *ad*.

Maintenant comme la seconde ligne *bc*, coupe la quatriéme partie ST, coupez la base du quatriéme triangle COD, en parties proportionnelles aux parties S*c*, *c*T, & du point X, tirez XO, ce qui vous donnera la figure ZOX, qui sera à la figure entiere comme la seconde ligne *bc*, à la somme des trois lignes, & par conséquent la figure OBCX, sera à la figure entiere, comme la ligne *cd*, à la somme des trois lignes; d'où il suit que les trois figures AOZ, ZOX, XOBC, seront entr'elles comme les trois lignes, ce qui se démontre, comme nous venons de faire.

Si on avoit voulu diviser la figure en trois parties égales, on auroit pris trois lignes *ab*, *bc*, *cd*, égales entr'elles, & le reste se feroit achevé comme ci-dessus.

Et si le point par où il auroit fallu diviſer le polygone, eût été à un ſommet A, de l'un des angles (*Fig.* 113.), on auroit tiré aux autres angles les lignes AE, AB, AC, qui n'auroient partagé la figure qu'en quatre triangles; c'eſt pourquoi on n'auroit diviſé la ligne *ad* qu'en quatre parties PQ, QR, RS, ST, qui auroient été entr'elles en même raiſon que ces triangles, &c.

## PROBLEME LXXXV.

199. *Diviſer un rectangle ABCD, en autant de parties égales ou inégales, en raiſon donnée qu'on voudra, par des lignes paralleles à un côté AB* (Fig. 114.).

Diviſez l'autre côté AD, en un même nombre de parties, ou égales ou en raiſon donnée, & par les points de diviſion, tirez des paralleles au côté AB, & le rectangle ſera diviſé en autant de rectangles égaux, ou en raiſon donnée; ce qui eſt évident, puiſque ces rectangles ayant la hauteur commune, ſeront entr'eux comme leurs baſes.

### COROLLAIRE.

200. Si la figure donnée étoit un parallelograme (*Fig.* 115.), on le diviſeroit de la même façon.

## PROBLEME LXXXVI.

201. *Diviſer un rectangle ABCD* (Fig. 116.), *en autant de parties égales ou inégales en raiſon donnée qu'on voudra, par des lignes tirées de l'un de ſes angles C.*

Ce Probleme peut ſe réſoudre par la méthode du Probleme 84; mais ſi on en veut une plus commode, ſuppoſons que le nombre de parties qu'on demande, ſoit pair, tirez la diagonale AC, qui diviſera le rectangle en deux triangles égaux; diviſez la baſe AD, du triangle ACD, en trois parties égales, qui ſont la moitié de ſix qu'on demande, & par les points de diviſion, tirez des lignes au ſommet C, qui diviſeront le triangle ACD, en trois triangles égaux; de même diviſez la baſe AB, du triangle ABC, en trois parties égales, & tirant des lignes au ſommet C, le triangle ABC, ſera auſſi diviſé en trois parties égales, & par conſéquent le rectangle ſera diviſé en ſix.

Si le nombre de parties égales qu'on demande, eſt impair, comme par exemple, en trois (*Fig* 117.), diviſez la baſe AD, du triangle ACD, en trois parties égales, & la baſe AB du

triangle ABC, auſſi en trois, & tirant des lignes au point C, le rectangle ſera diviſé en ſix parties égales ; c'eſt pourquoi joignant enſemble ces parties deux à deux, leur nombre ſe réduira à trois, qui eſt le nombre demandé.

Que ſi on demande un nombre impair de parties égales, comme 5, & qu'on veüille outre cela que ces parties ſoient faites par des lignes tirées les unes de l'angle C, & les autres de l'angle oppoſé A (*Fig.* 118.), diviſez la baſe AD, du triangle ACD, en cinq parties égales, & tirez des lignes au point C ; diviſez de même la baſe BC, du triangle ABC, en cinq parties égales, & tirez des lignes au point A, le rectangle ſera diviſé en dix parties égales, leſquelles étant priſes deux à deux, ſe réduiront à cinq.

Mais ſi l'on demande que le triangle ſoit diviſé en nombre pair ou impair de parties inégales en raiſon donnée par des lignes tirées de l'angle C, vous réſoudrez la queſtion par la méthode du Probleme 84.

Enfin s'il eſt queſtion de diviſer un rectangle ABCD, en un nombre pair ou impair de parties inégales, comme par exemple, en trois, qui ſoient entr'elles comme les lignes *ab*, *bc*, *cd*, & qu'il faille que cette diviſion ſe faſſe par des lignes dont les unes ſoient tirées de l'angle C, & les autres de l'angle A ; tirez la diagonale AC, & diviſez la ligne *ac*, en deux également en R, à cauſe que la diagonale diviſe le rectangle en deux triangles égaux ; puis diviſez le côté BC, en E, en ſorte que BE, ſoit à EC, comme *ab*, *b*R, & tirant la ligne EA, le triangle BAE, ſera au triangle EAC, comme *ab*, *b*R. De même diviſant le côté AD, en H, en ſorte que AH, ſoit à DH, comme R*c*, eſt à *cd*, & tirant HC, le triangle ACH, ſera au triangle HCD, comme R*c*, eſt à *cd*, & par conſéquent le rectangle ABCD, ſera diviſé en trois parties BEA, AECH, HCD, qui ſeront entr'elles comme les trois lignes données.

### COROLLAIRE.

202. Les mêmes pratiques ſervent également pour les paralellogrames.

## PROBLEME LXXXVII.

203. *Un côté AD, d'un rectangle ABCD* (Fig. 120.), *étant diviſé en pluſieurs parties inégales aux points P, Q, R, diviſer ce rectangle*

*par des lignes tirées de ces points en autant de parties qui soient égales entr'elles.*

Diviſez le côté AD, en autant de parties égales, c'eſt-à-dire en quatre dans l'exemple préſent aux points I, L, H, par leſquels vous tirerez des paralleles au côté AB, & le rectangle ſera diviſé en quatre parties égales; diviſez les paralleles chacune en deux également aux points O, T, &c. & des points P, Q, R, tirez par les points O, T, &c. les droites PX, Qr, &c. & le rectangle ſera diviſé en quatre parties égales.

### DEMONSTRATION.

Les triangles ſemblables POI, ZOX, ayant le côté IO égal au côté OZ, ſont égaux entr'eux; donc ſi du rectangle BAZI, qui eſt le quart du rectangle total, on retranche le triangle POI, & qu'à ſa place on ſubſtitue le triangle ZOX, le trapeze ABPX, ſera auſſi le quart du rectangle donné. Par la même raiſon le trapeze PX*a*L, étant égal au rectangle ZI*a*L, qui eſt auſſi le quart du rectangle total, ſi on retranche de ce trapeze le triangle QTL, & qu'on mette à ſa place le triangle *a*Tr, égal à QTL, le trapeze PXQr, ſera le quart du rectangle donné; & continuant le même raiſonnement, il ſera facile de prouver que le rectangle ABCD, eſt diviſé en quatre parties égales.

### COROLLAIRE I.

204. Si on vouloit diviſer le rectangle ABCD, en quatre parties inégales en raiſon donnée, on diviſeroit la baſe AD, en quatre parties qui fuſſent entr'elles en même raiſon, & le reſte s'acheveroit comme ci-deſſus.

### COROLLAIRE II.

205. S'il arrive que quelqu'une des lignes tirées par les points donnés P, Q, R, après avoir coupé par le milieu la parallele qui lui correſpond, vienne à couper les paralleles ſuivantes, alors le Probleme devient un peu plus difficile, & voici comment on doit le réſoudre.

Soit le rectangle ABCD (*Fig.* 121.), qu'il faut diviſer en quatre parties égales par les points donnés P, Q, R, après avoir fait tout ce que le Probleme requiert, je trouve que la derniere ligne RI, ayant coupé ſa parallele correſpondante ZX, coupe encore le côté parallele CD, au point I; ainſi je vois bien que le trapeze

BrAP, eſt égal au quart BaiA, du rectangle, & le trapeze *ru*PQ, égal au quart *aid*; mais je trouve que la figure *u*QRIC, eſt moindre que le quart *td*ZX, & que par conſéquent IRD, eſt plus grand que le dernier quart ZXDC; car ſi je prolonge BC, & la ligne RI, juſqu'à leur rencontre en K, le triangle RNX, eſt égal au triangle ZNK; d'où il ſuit que le trapeze ZNIC, eſt moindre que le triangle RNX, de tout le triangle CIK, ou du triangle RH*d*, qui eſt ſemblable & égal au triangle CIK, à cauſe que *d*X, étant égal à ZC, la baſe R*d*, eſt égale à la baſe CK. Donc ſi du quart *td*XZ, je retranche le triangle *tSu*, & que je ſubſtitue à ſa place le triangle QS*d*, le trapeze *u*QXZ, ſera égal au quart *td*XZ, & ſi de ce trapeze je retranche le trapeze *d*HNX, & que je lui donne le trapeze ZNIC, égal à *d*HNX, la figure Q*d*HIC*u*, ſera égale au quatt *td*XZ; mais Q*d*HIC*u*, eſt plus grand que QRIC*u*, de tout le triangle RH*d*; donc QRIC*u*, eſt moindre que le quart *td*XZ; & par conſéquent IRD, eſt plus grand que le quart ZXDC, de tout le triangle RH*d*.

Pour corriger donc ce défaut, je prens une quatriéme proportionnelle aux trois lignes RD, R*d*, *d*H, & portant cette quatriéme proportionnelle de I, en M, je tire de M, la droite MR, & le triangle MRD, eſt égal au quart du rectangle ABCD; car les deux triangles R*d*H, IMR, ayant les hauteurs RD, R*d*, réciproques aux baſes *d*H, IM, ſont égaux entr'eux; c'eſt pourquoi retranchant le triangle IRM, du triangle IRD, j'en ai retranché l'excès, dont ce triangle IRD, ſurpaſſoit le quart du rectangle; & par conſéquent le triangle MRD, eſt égal au quart de ce rectangle, de même que la figure RMC*u*Q, qui a été augmentée du même triangle IRM, qui lui manquoit.

De même ſuppoſons le rectangle ABCD (*Fig.* 123.), qu'il faille diviſer en cinq parties égales par les points P, Q, R, S, j'execute tout ce qui eſt ordonné par ce Probleme, & je trouve que les trois dernieres lignes ayant coupé leurs paralleles correſpondantes, coupent encore celles qui viennent après. Ainſi j'examine d'abord que le trapeze APFB, vaut le cinquiéme du rectangle, parce qu'il eſt égal au rectangle A*u*BE. Enſuite je vois que ſi du cinquiéme EG*uz*, j'ôte le triangle EFO, en lui donnant le triangle OP*u*, le trapeze P*z*GF, ſera égal à ce cinquiéme, & ſi de ce trapeze j'ôte le triangle *r*Q*z*, en lui donnant le triangle G*r*I, le trapeze FPQI, ſera encore égal au cinquiéme du rectangle total. De-là je paſſe au cinquiéme G*zq*H, duquel re-

tranchant le trapeze G*rn*H, & lui donnant le trapeze *rtuz*, j'ai le trapeze *ntuq*, égal au cinquiéme G*zq*H; & ſi de ce trapeze je retranche le triangle *a*R*q*, en lui donnant le triangle H*a*L, j'ai la figure *tu*RLH*n*, égale encore au cinquiéme; c'eſt pourquoi retranchant de cette figure le triangle H*n*I, & lui donnant le triangle *t*Q*u*, j'ai le trapeze QRLI, encore égal au cinquiéme. Par un ſemblable raiſonnement, je trouve que la figure RSNCL, eſt moindre que le cinquiéme H*qm*K, de tout le triangle CNM. Par conſéquent retranchant du triangle NSD, le triangle NS*y*, égal au triangle CNM, j'ai la figure RS*y*CL, égale au cinquiéme du rectangle ABCD, & le triangle *y*SD, auſſi égal au cinquiéme.

En agiſſant ainſi, il n'y a point de cas dans ce Probleme qu'on ne vienne à bout de réſoudre, quand même les lignes tirées des points donnés, viendroient à ſe croiſer. Soit par exemple, le rectangle ABCD(*Fig.* 122.),à diviſer en quatre parties égales par les points P, Q, R, après avoir fait tout ce que le Probleme preſcrit, je vois que les trapezes APSB, PQIS, RDCT, valent chacun le quart du rectangle; mais ce dernier a une partie, c'eſt-à-dire TVI, qui tombe dans le quart précedent, ce qui fait que le triangle QVR, doit être plus grand que le quart du rectangle de tout le triangle TVI. C'eſt pourquoi je réduis le triangle TVI, en un triangle qui ait même hauteur que le triangle QVR, dont je prens le côté QR pour baſe, puis portant la baſe du petit triangle ſur QR, de R en X, je tire XV, & le triangle XVR, eſt égal au triangle TVI. Ainſi le triangle QVX, eſt égal au quart du rectangle, de même que la figure XVICD.

Voyez plus bas (*n.* 216.), ou nous donnons une méthode générale pour toutes ſortes de figures, beaucoup plus facile que celle-ci.

## PROBLEME LXXXVIII.

206. *Diviſer un rectangle ABCD* (Fig. 124.), *en autant de parties égales ou inégales en raiſon donnée qu'on voudra, par des lignes tirées d'un point exterieur O.*

Si on veut, par exemple, qu'il ſoit diviſé en trois parties égales, prenez une ligne quelconque *ad*, que vous diviſerez en trois également aux points *b*, *c*; enſuite du point donné O, tirez les droites OA, OD, aux angles interieurs oppoſés, ces lignes diviſeront le rectangle ABCD, en deux triangles & un trapezoïde; exprimez en lignes les rapports de ces trois figures (*n.* 94.), & diviſer la ligne

ligne *ad* en trois parties, qui soient en même raison aux points P, Q, en sorte que la raison de *a*P, à PQ, soit égale à celle du triangle BEA, au trapezoïde EADF, & la raison de PQ, à Q*d*, soit égale à celle du trapezoïde EADF, au triangle FDC. Cela fait, comme la premiere partie égale *ab*, coupe la partie PQ, proportionnelle au trapezoïde AEFD, au point *b*, coupez l'un des côtez paralleles EF, en H, en raison des parties P*b*, *b*Q, & tirez la ligne OR, le trapezoïde EHAR, sera au trapezoïde HFDR, comme P*b*, est à *b*Q, car les triangles OAR, ORD, ayant même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases AR, RD, & par la même raison les triangles OEH, OHF, sont entr'eux comme leurs bases EH, HF; mais à cause des paralleles EF, AD, on a AR. RD :: EH. HF; donc la raison des triangles OAR, ORD, est egale à celle des triangles OEH, OHF: retranchant donc les deux derniers des deux premiers, le trapeze EARH, est encore au trapeze HRDF, comme EH, HF, ou comme P*b*, à *b*Q. D'où il est aisé de conclure que comme P*b*, est à toute la ligne *ad*, ainsi le trapeze EARH, est à tout le rectangle, & comme *a*P+P*b*, ou *ab*, est à *ad*; ainsi le triangle BEA, plus le trapezoïde EARH, c'est-à-dire le trapeze BARH, est à tout le rectangle, & par conséquent ce trapeze est égal au tiers du rectangle.

Maintenant comme la seconde partie égale *bc*, coupe encore la partie PQ, proportionnelle au trapezoïde EADF, en *c*, coupez le côté EF, en I, en sorte que EI, soit à IF, comme P*c*, est à *c*Q, & tirez la ligne OIS, le trapezoïde HIRS, sera aussi le tiers du rectangle total, comme il est facile de le démontrer, & par conséquent le trapezoïde ISDC, sera le tiers restant.

Si quelqu'une des parties égales divisoit une partie proportionnelle à l'un des triangles, comme dans la figure 125, où je suppose que le rectangle doive être divisé en quatre parties égales, & que les parties *a*P, PQ, Q*e*, expriment les rapports du triangle BRA, du trapezoïde RVAD, & du triangle VDC; alors comme la quatriéme partie égale coupe la partie Q*e*, proportionnelle au triangle VDC, on fera un triangle qui soit au triangle VDC, comme *ed*, est à *e*Q; puis du point O, on tirera OH, qui fasse avec l'angle C, un triangle égal à ce petit triangle, & XHC, sera le quart du rectangle, & le reste s'achevera comme cidessus.

Si le point O, se trouve dans le prolongement de l'un des côR

tez AB, comme dans la figure 126, où je suppose que le rectangle doive être divisé en trois parties égales, tirez à l'angle interieur opposé la ligne OD, puis divisez la ligne *ad*, en deux parties proportionnelles au trapeze BSAD, & au triangle SDC, & achevez le reste comme il vient d'être prescrit.

Enfin si le point O, étoit dans le prolongement de la diagonale (*Fig.* 127.), on diviseroit la ligne *ad*, en deux parties égales, à cause que la diagonale divise le rectangle en deux également, &c.

On voit assez ce qu'il faudroit faire, si on vouloit diviser le rectangle en parties inégales en raison donnée, sans que je sois obligé de m'y arrêter.

### COROLLAIRE.

207. Il suit de tout ce que nous venons de dire, que si deux trapezoïdes EAHR, HRFD (*Fig.* 124.), de même hauteur, ont les côtez paralleles proportionnels aux côtez paralleles chacun à chacun, ces trapezoïdes sont entr'eux comme les côtez proportionnels, c'est-à-dire comme AR, à RD, ou comme EH à HF.

## PROBLEME LXXXIX.

208. *Diviser un trapeze ABCD, en autant de parties qu'on voudra par le point H, où ses deux côtez AD, BC, prolongés, vont aboutir* (Fig. 128.).

Prolongez les deux autres côtez AB, DC, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en R, puis prenez une ligne *ac*, que vous diviserez en autant de parties égales qu'on en demande pour le trapeze, comme par exemple, en deux; ensuite faites comme le trapeze ABCD, est au triangle BRC; ainsi la ligne *ac*, à la ligne *cd*, faites un triangle qui soit au triangle BRC, comme *bd* à *cd*, & du point H, tirez une ligne HE, qui fasse avec l'angle R, un triangle ERF, égal à ce triangle, & le Probleme sera résolu; car puisque le triangle BRC, est au triangle ERF, comme *cd*, à *bd*, vous aurez *dividendo*, le trapeze BCEF, est au triangle BRC, comme *bc*, à *cd*; mais le double de *bc*, c'est-à-dire *ac*, est à *cd*, comme le trapeze total au triangle; donc la moitié *bc*, est à *cd*, comme la moitié du trapeze est au triangle; donc BCEF, est la moitié du trapeze.

Si le point H, n'étoit pas le même que celui où se rencontrent

AD, BC prolongés (*Fig.* 129.), on tireroit aux angles interieurs oppofés les droites HB, HA, & le reſte s'acheveroit comme ci-deſſus.

## PROBLEME XC.

209 *Diviſer une figure ABCDEG, de pluſieurs côtez reguliers, ou irreguliere, en autant de parties égales qu'on voudra* (Fig. 130.), *par un point exterieur O.*

Suppoſons qu'on demande trois parties égales, prenez une ligne quelconque *ad*, que vous diviſerez en trois parties égales aux points *b*, *c*; du point O, tirez des droites aux angles autant qu'il en faudra pour réduire la figure en triangles & en trapezes: dans le cas préſent vous aurez quatre trapezes & un triangle; diviſez la ligne *ad*, en cinq parties proportionnelles à ces cinq figures aux points P, Q, R, S; enſuite comme la premiere partie égale *ab* coupe la partie *a*P, proportionnelle au premier trapeze GABR, coupez ce trapeze en deux parties, qui ſoient entr'elles comme *ab*, eſt à *b*P, & le trapeze ZABT, ſera le tiers du triangle. Enſuite comme la ſeconde partie égale *bc*, coupe la partie QR, proportionnelle au troiſiéme trapeze, diviſez ce trapeze en deux parties, qui ſoient entr'elles comme Q*c*, à *c*R, & la figure ſera diviſée en trois parties égales, comme il eſt aiſé de le démontrer par les Problemes précedens.

## PROBLEME XCI.

210. *Diviſer un rectangle en pluſieurs parties par un point donné O dans l'aire* (Fig. 131.).

Toute la difficulté de ce Probleme conſiſte à trouver la premiere partie; car celle-la une fois trouvée, les autres ne ſouffrent preſque plus de difficulté. Ainſi ſuppoſons qu'on veüille diviſer le rectangle ABCD, en trois parties, qui ſoient entr'elles comme les lignes *ab*, *bc*, *cd*, par le point interieur O; ſi le Probleme eſt poſſible, la ligne qui donnera la premiere partie, ou coupera quelqu'angle du rectangle où elle coupera deux côtez oppoſez.

Tentez donc la ſolution d'abord par l'angle A, & après avoir fait un triangle qui ſoit au rectangle comme la premiere ligne *ab*, eſt à la ſomme *ad*, des trois lignes, faites avec l'angle A, par le point O, un triangle égal à ce triangle, ſi la ligne EI coupe les côtez BA, AD, le triangle EAI, ſera au rectangle comme la premiere ligne *ab*, à la ſomme *ad*; c'eſt pourquoi il ne reſtera

plus qu'à diviſer la figure EBCDI, par le point O, en deux parties qui ſoient entr'elles comme les deux autres lignes *bc*, *cd*.

Mais ſi la ligne EI, coupe deux côtez paralleles, alors il faudra tenter la ſolution par les côtez en diviſant la baſe au point E, en raiſon de *ab*, à *ad* (*Fig.* 132.), & tirant ES parallele au côté AB, après quoi vous diviſerez cette parallele en deux également en R, & du point O, par le point R, vous tirerez ZT; ſi cette ligne coupe deux côtez oppoſés, le trapeze BTAZ, ſera au rectangle comme *ab*, à *ad*. Ainſi par le point O, vous diviſerez le trapeze TZDC, en deux parties en raiſon de *bc*, à *cd*.

Si la ſolution ne réuſſit pas, vous la tenterez par les deux autres côtez de la même façon, & ſi rien de tout cela ne réuſſit, le Probleme eſt impoſſible.

Comme les parallelogrames n'ont pas tous leurs angles égaux, après avoir tenté la ſolution par l'un des angles, vous le tenterez par l'autre qui lui eſt inégal, &c.

## PROBLEME XCII.

211. *Diviſer un trapeze ABCD, en pluſieurs parties par un point interieur O* (Fig. 133.).

Suppoſons qu'on veüille le diviſer en trois parties, qui ſoient entr'elles comme *ab*, *bc*, *cd*; tentez la ſolution d'abord par chacun des angles, en faiſant un triangle qui ſoit au trapeze comme *ab*, eſt à *ad*, & ſi quelqu'un de ces angles vous donne un triangle RAZ, qui ſoit tout entier dans le trapeze, il ne reſtera plus qu'à couper la figure reſtante RZDCB, en raiſon de *bc*, à *cd*.

Mais ſi dans toutes ces tentatives vous trouvez que la ligne RZ, coupe deux côtez oppoſez, vous tenterez la ſolution par les côtez; & pour cela vous prolongerez les côtez AB, DC, juſqu'à ce qu'ils ſe coupent en H (*Fig.* 134.), enſuite vous ferez comme le trapeze eſt au triangle HBC, ainſi *ad*, eſt à *de*; & par le point O, vous ferez avec l'angle H, un triangle qui ſoit au triangle AHD, comme *be*, eſt à *ae*; & ſi la baſe RS de ce triangle, coupe deux côtez oppoſés, du point O, vous diviſerez le trapeze RBCS, en raiſon de *bc*, à *cd*; que ſi cela ne réuſſit pas, vous prolongerez les côtez CB, DA, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent, & vous tenterez la ſolution de la même façon; que ſi elle n'a pas plus de ſuccès, le Probleme eſt impoſſible.

## PROBLEME XCIII.

212. *Diviſer un polygone regulier, ou irregulier en pluſieurs parties égales, ou inégales en raiſon donnée par un point interieur O* (Fig. 135.).

Suppoſons qu'on veüille le diviſer en quatre parties égales, tentez d'abord la ſolution par les angles, en faiſant un triangle égal au quart du polygone, & tirant par le point O, une ligne qui faſſe avec quelque angle, comme par exemple, avec l'angle C, un triangle BSC, égal à ce triangle; cela fait, du point O, diviſez le reſte du polygone en trois parties égales.

Mais ſi la tentative par les angles ne réuſſit pas, prenez une ligne quelconque *ae*, (*Fig.* 136.), que vous diviſerez en quatre parties égales; puis tirez dans le polygone une droite AH, qui enferme le point O, dans un trapeze, & diviſez la ligne *ae*, en deux parties *a*P, P*e*, qui ſoient en raiſon du trapeze AEDH, au trapeze AHCB. Cela fait, par le point O, coupez le trapeze AEDH, en deux parties, qui ſoient entr'elles comme *ab*, à *b*P, (*n.* 211.) & la partie REDS, ſera le quart du trapeze, &c.

Que ſi la figure avoit un ſi grand nombre de côtez, qu'on ne peut pas enfermer le point donné dans un trapeze, on tireroit des lignes qui diviſeroient la figure en trapezes & en triangles, en ſorte que le point O fût enfermé dans un triangle (*Fig.* 137.). Enſuite ſuppoſant qu'on voulût diviſer la figure en trois parties égales, on prendroit une ligne *ab*, diviſée en trois parties égales aux points *b*, *c*, & on la diviſeroit enſuite aux points P, Q, R, en raiſon des trapezes & des triangles. Cela fait, comme le tiers *cd*, coupe la partie QR, proportionnelle au triangle DAE, dans laquelle ſe trouve le point O, on tireroit de ce point une ligne qui feroit avec l'angle AED, un triangle qui feroit au triangle AED, comme Q*c* à *c*R, & la figure AXICB, ſoient le tiers de la figure donnée. Après quoi prolongeant XI, en Z, on diviſeroit la figure ZHGFEI, en deux parties égales par la droite OT, & l'on retrancheroit de la partie ZHTO, un petit triangle *u*TO, égal à la moitié du petit triangle XZA.

Que ſi nulle de ces pratiques ne pouvoit réuſſir, le Probleme ſeroit impoſſible.

## PROBLEME XCIV.

213. *Diviſer un trapezoïde ABCD* (Fig. 138.), *en pluſieurs par-*

*ties égales, ou inégales, en raiſon donnée par des lignes paralleles à la baſe.*

Suppoſons qu'on veüille le diviſer en trois parties égales, prenez une ligne *ad*, que vous diviſerez en trois parties égales aux points *b*, *c*. Prolongez les côtez non paralleles du trapezoïde, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en O, & faites: comme le trapezoïde eſt au triangle BOC, ainſi *ad*, eſt à *de*; prenez une moyenne proportionnelle *e*P, entre *de*, qui repréſente le triangle, & *ce*, qui repréſente le triangle, plus le tiers du trapeze, & en ſuite une quatriéme proportionnelle à *ed*, *e*P, & le coté OB, du triangle, & portant cette quatriéme proportionnelle de O en H, tirez HI, parallele à la baſe du trapezoïde, le trapezoïde BCHI, ſera le tiers du trapezoïde; car puiſque les trois lignes *ed*, *e*P, *ec*, ſont proportionnelles, on a $\overline{ed}^2 . \overline{eP}^2 :: ed . ec$, c'eſt-à-dire comme le triangle BOC, au triangle BOC, plus le tiers du trapezoïde. Or par la conſtruction $ed . eP :: OB . OH$; donc $\overline{ed}^2 . \overline{eP}^2 :: \overline{OB}^2 . \overline{OH}^2$, & par conſéquent $\overline{OB}^2 . \overline{OH}^2 :: ed . ec$. Mais les triangles OBC, OHI, étant ſemblables, ſont entr'eux comme $\overline{OB}^2 . \overline{OH}^2$. Donc OBC. OHI :: *ed*. *ec*, & *dividendo*, OBC. OHI — OBC :: *ed*. *ec* — *ed*, ou OBC. BCHI :: *ed*. *cd* C'eſt-à-dire comme le triangle OBC, repréſenté par *de*, eſt au trapeze BCHI, repréſenté par *cd*. mais *cd*. eſt le tiers de *ac*, qui repréſente le trapeze total; donc BCHI, eſt auſſi le tiers du trapeze total.

Maintenant prenez une moyenne proportionnelle *e*Q, entre *ec*, & *eb*, & une quatriéme proportionnelle aux trois *ec*, *e*Q, OH, & le portant de O, en R, tirez la parallele RS, qui fera les deux trapezoïdes HIRS, RSAD, égaux, chacun au tiers du total, comme il eſt aiſé de le démontrer.

## PROBLEME XCV.

214. *Diviſer un polygone regulier, ou irregulier, en pluſieurs parties égales, ou inégales, en raiſon donnée, par des lignes paralleles à une ligne TS* (Fig. 139.).

Suppoſons qu'on veüille diviſer ce polygone en trois parties égales; des angles tirez des lignes paralleles à la ligne TS, autant qu'il en faudra pour diviſer la figure en triangles & en trapezes. Prenez enſuite une ligne *ad*, que vous diviſerez d'abord en trois parties égales aux points *b*, *c*: puis en parties proportionnelles aux

triangles & aux trapezes de la figure. Cela fait, examinez laquelle de ces parties eſt coupée par la premiere partie égale, & trouvant que c'eſt PQ, qui repréſente le trapezoïde AE, diviſez ce trapezoïde en raiſon de P*b*, à *b*Q, par une ligne parallele à TS, & cette ligne couperale tiers de la figure, & vous trouverez de la même façon les deux autres tiers, &c.

### COROLLAIRE.

215. Ce Probleme eſt d'une très grande étenduë ; car on peut s'en ſervir pour diviſer un polygone quelconque en tel nombre de parties qu'on voudra par des paralleles à un côté, comme il eſt évident, par des lignes perpendiculaires à un côté, ou qui faſſent avec un côté tel angle qu'on voudra, puiſqu'il n'y qu'à tirer une perpendiculaire ſur ce côté, ou une ligne qui faſſe l'angle requis, & faire enſuite la diviſion par des paralleles à cette ligne.

## PROBLEME XCVI.

216. *Diviſer un polygone quelconque ABCDE, par des points donnés P, Q, R, ſur un des côtez en autant de parties que ces points en forment ſur ce côté AB* (Fig. 140.).

Comme il y a ici trois points, diviſez la figure par le point P, en deux parties, qui ſoient entr'elles comme 1 eſt à 3 (*n.* 198.), & le trapeze AEHP, ſera le quart de la figure entiere. De même diviſez la figure reſtante PBCDH, par le point Q, en deux parties qui ſoient entr'elles comme 1 à 2, & la figure PQIDH, ſera auſſi le quart de la figure entiere, puiſqu'elle eſt le tiers des trois quarts. Enfin par le point R, diviſez le trapeze QBCI, en deux parties égales, & les deux trapezes QRKI, RBCK, ſeront chacun égaux au quart du polygone donné. La figure 141. repréſente la même choſe.

### REMARQUE.

217. Cette méthode eſt beaucoup plus facile à pratiquer que celle que j'ai donnée pour les rectangles en particulier ſur le même ſujet (*n.* 202.).

### COROLLAIRE.

218. On peut encore ſe ſervir de cette méthode, lorque les point donnés ne ſont pas tous ſur le même côté, & à l'imitation

de ce Probleme, on peut encore diviſer un polygone en autant de parties, plus une, qu'on auroit de points donnés, ou dans l'aire, ou en dehors.

### REMARQUE.

219. Toutes les méthodes que nous venons de donner dans cette Section, ſont générales, & il n'eſt point de diviſions poſſibles de figures rectilignes, dont on ne puiſſe venir à bout par leur moyen, pourvû qu'on les comprenne bien.

## SECTION VII.

*De la Méthode des indiviſibles, des raiſons, proportions, & progreſſions Arithmetiques, & de l'Arithmetique des infinis par rapport à la Géometrie.*

### DEFINITION XIV.

220. La méthode des *indiviſibles* apprend à trouver l'aire des ſurfaces, la ſolidité des corps, & les rapports des aires entr'elles, de même que les rapports des ſolides entr'eux par la connoiſſance de leurs élemens.

### DEFINITION XV.

221. Si l'on conçoit qu'une ligne ſoit diviſée en parties égales entr'elles, & moindres chacune que tout ce qu'on peut aſſigner, il eſt évident qu'une ligne qui contiendra deux ou trois fois autant de ces parties, ſera double, ou triple de la premiere ligne, de même qu'elle n'en ſeroit que le tiers, ou le quart, ſi elle ne contenoit que le tiers ou le quart de ces parties. Or ce ſont ces parties égales, & indéfiniment petites, qu'on appelle *Elemens* des lignes, & ces élemens, comme on voit, doivent être non-ſeulement égaux entr'eux dans une même ligne, mais encore dans toutes les lignes qu'on voudra comparer enſemble, parce qu'autrement ces lignes n'auroient pas une commune meſure, ce qui eſt cependant eſſentiel, lorſqu'on veut comparer les grandeurs en les meſurant.

DEFIN.

## DEFINITION XVI.

222. Si l'on conçoit que de tous les élemens d'une ligne AB (*Fig.* 142.), il s'éleve des perpendiculaires ſur cette ligne, leſquelles nous ſuppoſerons toutes égales entr'elles pour le préſent. 1°. Ces perpendiculaires auront la largeur égale, & moindre que tout ce ce qu'on peut aſſigner, puiſqu'elle ſera égale à la largeur des élemens de la ligne AB. 2°. Elles ſeront paralleles & ſe toucheront dans toute leur longueur; d'où il ſuit qu'elles formeront un rectangle ABCD: donc la ſurface ne ſera pas différente de la ſomme de ces lignes. Or comme la ſomme de ces lignes eſt la même choſe que la premiere BC, priſe autant de fois qu'il y a de lignes, ou multipliée par le nombre des lignes, lequel eſt exprimé par la ligne AB, à cauſe qu'il y a autant de perpendiculaires que AB à d'élemens, il eſt ſur que la ſurface du rectangle eſt égale au produit de la ligne BC, par AB. D'autre part, ſi l'on a un rectangle qui contienne deux ou trois fois autant de perpendiculaires égales en longueur à celle-ci, il eſt encore ſûr que ce rectangle ſera double ou triple du premier, de même qu'il n'en ſeroit que le tiers ou le quart s'il ne contenoit que le tiers ou le quart de ces perpendiculaires. Or ce ſont ces lignes qu'on appelle les élemens des ſurfaces, leſquels doivent être égaux en épaiſſeur, non-ſeulement dans une même ſurface, mais encore dans toutes les ſurfaces qu'on veut comparer enſemble.

### COROLLAIRE.

223. Comme les mêmes lignes venant à tomber ſur une ligne, prennent ſur elle des points plus grands ou plus petits, ſelon qu'elles ſont plus ou moins inclinées, & que parmi ces points les moindres de tous, ſont ceux qu'elles prennent en tombant perpendiculairement (*Partie* 1. *n.* 225.), il s'enſuit que la ligne que l'on doit prendre pour marquer le nombre des élemens d'une ſurface, doit être celle ſur laquelle les élemens ſont perpendiculaires.

Soit, par exemple, le parallelograme ABCD (*Fig.* 143.), dont les élemens ſont paralleles à la baſe, ſi l'on veut trouver une ligne qui exprime le nombre de ſes élemens, on prend la perpendiculaire EF, & non pas le côté AB, parce que ces élemens prenant ſur EF, les moindres points qu'ils puiſſent prendre, ſont par conſéquent en auſſi grand nombre que les élemens de la

ligne EF, au lieu qu'étant obliques sur AD, ils prennent des points plus grands que les élemens de cette ligne; & qu'ainsi ils ne sont pas en aussi grand nombre que les élemens de la ligne AD.

## DEFINITION XVII.

224. Si l'on conçoit que de tous les élemens de la ligne AB (*Fig.* 144.), il s'éleve des surfaces perpendiculaires sur cette ligne, lesquelles nous supposerons pour le présent égales en longueur, & en largeur. 1°. Ces surfaces auront l'épaisseur égale, & moindre que tout ce qu'on peut assigner. 2°. Elles seront paralleles & se toucheront dans toute leur longueur & leur largeur; d'où il suit qu'elles formeront un solide, dont la solidité sera égale à la somme de ces surfaces, ou à la premiere surface multiplié par la ligne AB, qui en exprime le nombre. D'autre part si un autre solide contient deux ou trois fois autant de ses surfaces, il sera double ou triple du premier solide, de même qu'il n'en seroit que le tiers ou le quart, s'il n'en contenoit que le tiers ou le quart. Ces surfaces s'appellent *Elemens* du solide.

## REMARQUE.

225. Comme nous n'avons point encore expliqué les propriétés des solides, nous ne parlerons dans tout le reste de cette Section que des surfaces, & l'on verra dans la suite que ce que nous en dirons, s'applique également aux solides. Or comme ce que nous venons de dire au sujet des surfaces, ne peut servir que pour les rectangles & les parallelogrames, dont les élemens sont d'égale longueur, ou tout au plus, pour les surfaces qui ont une certaine quantité d'élemens égaux, puis une autre quantité d'élemens aussi égaux, mais inégaux aux premiers, & ainsi de suite (*Fig.* 145.), auquel cas on prend chaque somme en particulier d'élemens égaux pour en faire une somme totale; nous allons donner les principes nécessaires pour les surfaces dont les élemens vont toujours en croissant en longueur.

Au reste, ce que nous avançons ici n'empêche pas qu'on ne puisse & qu'on ne doive dire en bonne Géometrie, qu'une petite ligne peut être divisée en autant de parties qu'une grande, de même qu'une petite surface, ou un petit corps peuvent être divisés en autant de lignes ou de surfaces, qu'une grande surface ou un grand corps; mais alors ces parties sont des parties proportionnelles, qui ne doivent être employées que pour prouver la

similitude, ou la dissimilitude des figures ou des solides, & non pas leur égalité, ou leur inégalité; & c'est de quoi il s'agit présentement. On trouvera dans la suite de cet Ouvrage, bien des endroits où nous nous servirons des parties proportionnelles, mais toujours uniquement lorsqu'il s'agira de prouver que certaines surfaces, ou certains solides, sont semblables entr'eux.

## *Des raisons, proportions & progressions Arithmetiques.*

### DEFINITION XVIII.

226. Lorsqu'on ne considere dans deux grandeurs que l'excès dont l'une surpasse, ou est surpassée par l'autre, cela s'appelle une *raison Arithmetique*. Ainsi 3 surpasse 2 de 1, la raison de 3 à 2, est Arithmetique, & l'excès 1 en est la différence.

### DEFINITION XIX.

227. Deux raisons Arithmetiques égales, forment une proportion Arithmetique que l'on écrit ainsi 4. 5 .·. 7. 8. & quand la proportion est continuë, on l'écrit de cette façon .·. 4. 5. 6.

La principale proprieté de ces proportions est que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens, & si la proportion est continuë, la somme des extrêmes est égale au double de la moyenne. Soit, par exemple, la proportion Arithmetique 4. 5 .·. 7. 8. puisque 5 surpasse 4 de 1, la raison 4. 5, est la même que la raison 4. 4+1, & de même la raison 7. 8, est la même que la raison 7. 7+1; par conséquent la proportion 4. 5 .·. 7. 8, est la même que la proportion 4. 4+1 .·. 7. 7+1; mais dans celle-ci la somme 4+7+1 des extrêmes, est égale à la somme 4+1+7 des moyens, puisque ces deux sommes sont composées de nombres égaux; donc aussi dans la raison 4. 5 .·. 7. 8, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens.

De même soit la proportion continuë .·. 4. 5. 6, cette proportion est la même que celle-ci 4. 5 .·. 5. 6; mais dans celle-ci la somme 4+6 des extrêmes, est égale à la somme 5+5 des moyens, & 5+5 est le double de 5; donc dans la proportion continuë .·. 4. 5. 6, la somme des extrêmes est égale au double de la moyenne.

### DEFINITION XX.

228. Une suite de plusieurs grandeurs qui vont en se surpassant

également, s'appelle une *progreſſion Arithmetique*, & voici quelles en ſont les principales proprietés.

En premier lieu, le dernier terme eſt toujours égal au premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes qui précédent le dernier. Soit, par exemple, la progreſſion 2. 3. 4. 5. 6. dont la différence eſt 1, cette progreſſion peut ſe changer en celle-ci; 2. 2+1. 2+1+1. 2+1+1+1, 2+1+1+1+1, où vous voyez que le dernier terme contient le premier terme, & quatre fois la différence; c'eſt-à-dire la différence 1, multipliée par 4, qui eſt le nombre des termes qui précédent le dernier; & ceci eſt encore vrai pour tout autre terme: car le quatriéme 2+1+1+1 contient de meme le premier terme 2 & trois fois la différence, ou la différence multipliée par 3, qui eſt le nombre des termes qui précédent le terme 2+1+1+1.

En ſecond lieu, dans toute progreſſion Arithmetique 2. 3. 4. 5. 6. 7. la ſomme de deux termes 3 & 6 également éloignés des extrêmes, eſt égale à la ſomme des extrêmes; car 3 ſurpaſſe 2 de la différence 1, & 6 au contraire eſt moindre que 7 de la même différence; donc 3+6 doit être égal à 2+7, puiſque ce que la premiere ſomme gagne d'un côté, elle le perd de l'autre. Par la même raiſon la ſomme 4+5 des deux termes 4, 5 eſt égale à la ſomme 2+7. Que ſi la progreſſion eſt impaire, comme 2. 3. 4. 5. 6. le double du terme moyen 4, également éloigné des extrêmes, eſt égal à la ſomme des extrêmes; car les trois termes 3. 4. 5. étant en proportion continuë, le double du moyen 4, c'eſt-à-dire 8, eſt égal à la ſomme 3+5 des extrêmes 3 & 5; mais la ſomme 3+5 eſt égale à la ſomme 2+6 des extrêmes de la progreſſion; donc 8 eſt auſſi égal à 2+6.

En troiſiéme lieu, dans toute progreſſion Arithmetique 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. la ſomme de la progreſſion eſt égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes; car puiſqu'en joignant les termes également éloignés deux à deux, on a autant de ſommes égales à la ſomme des extrêmes, & qu'il ſe trouve ici 8 termes, il eſt évident que l'on aura quatre ſommes égales à la ſomme des extrêmes; mais quatre ſommes égales à la ſomme des extrêmes, ſont la même choſe que la ſomme des extrêmes multipliée par 4, qui eſt la moitié du nombre des termes; donc, &c.

Si la progreſſion eſt impaire, comme 2. 3. 4. 5. 6. le même principe ſubſiſte encore; car en ſuppoſant qu'il y ait cinq termes,

comme ici, il y aura deux ſommes égales, & le terme moyen ſera la moitié de l'une de ces ſommes; ainſi il y aura en tout deux ſommes & demi, mais deux ſommes & demi ſont égales à la ſomme des extrêmes multipliée par deux & demi; donc, &c.

### COROLLAIRE.

229. Il ſuit de-là (pour l'obſerver en paſſant), que deux lignes AB, CD, étant données (*Fig.* 146.), on peut trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra à ces deux lignes. Car ſuppoſé qu'on en demande trois, la progreſſion entiere ſera cinq. Ainſi ſi l'on retranche la petite ligne AB, de la grande CD, le reſte HD, ſera le différence multipliée par 4, ou le quadruple de la différence. C'eſt pourquoi ſi on diviſe ce reſte en quatre parties, & qu'on en ajoûte une à la ligne AB, on aura la ligne PQ, qui ſera la premiere des trois moyennes proportionnelles, & ajoûtant à celle-ci une autre partie, on aura la ligne RS, qui ſera la ſeconde; enfin ajoûtant à celle-ci une autre partie, TV, ſera la troiſiéme, & les cinq lignes AB, PQ, RS, TV, CD, ſeront en progreſſion Arithmetique.

De même ſi on avoit deux lignes AB, PQ, & qu'on voulût continuer la progreſſion Arithmetique, on prendroit la différence de PQ à AB, & ajoûtant cette différence à PQ, on auroit RS, qui ſeroit la troiſiéme proportionnelle, & ajoûtant la différence à RS, on auroit TV, qui ſeroit la quatriéme, & ainſi de ſuite.

### *Application des principes précédens à quelques exemples de Géometrie, en ſe ſervant de la méthode des indiviſibles.*

230. Soit un triangle ABC, dont il faille trouver la meſure par les élemens (*Fig* 147.), je conçois que la ligne AB, qui eſt perpendiculaire ſur la baſe, ſoit diviſée en ſes élemens que je ſuppoſe être les parties AD, DE, EF, FG, GB, égales entr'elles. De tous les points de diviſion j'éleve les perpendiculaires DI, EL, FM, GN, qui ſeront paralleles à la baſe. Or à cauſe des triangles ſemblables ADI, AEL, AFM, &c. les baſes DI, EL, FM, &c. ſont entr'elles comme les hauteurs AD, AE, AF, &c. & ces hauteurs ſont en progreſſion Arithmétique, puiſqu'elles ſe ſurpaſſent toutes également; donc les baſes ſont auſſi en progreſſion Arithmetique; mais ces baſes ſont les élemens du triangle: car on les ſuppoſe infiniment proches les unes des autres; donc

les élemens du triangle ſont en progreſſion Arithmetique : or le premier de ces élemens du côté de A, étant infiniment petit, eſt égal à zero ; donc ajoûtant cet élement au dernier, la ſomme ſera le dernier BC ; & multipliant cette ſomme par la moitié du nombre des termes, ou par la moitié de la perpendiculaire AB, qui exprime le nombre des termes, le produit ſera la ſomme de la progreſſion, & par conſéquent l'aire du triangle.

Si le triangle ABC (*Fig* 148.) n'étoit pas rectangle, on tireroit du ſommet A, la perpendiculaire AD, ſur la baſe, & le triangle ſeroit diviſé en deux triangles ADC, ADB ; or on prouveroit, comme ci-deſſus, que les élemens du triangle ADC, ſeroient en progreſſion Arithmetique, & que les élemens du triangle ADB, ſeroient dans la même progreſſion, & auroient le même nombre de termes ; donc ajoûtant enſemble les élemens des deux triangles chacun à chacun, les élemens du triangle ABC, ſeroient encore dans la même progreſſion, & leur valeur, ou l'aire du triangle, ſe trouveroit en multipliant la baſe BC, qui eſt le plus grand élement par la moitié de la hauteur AD.

Et ſi la perpendiculaire AD (*Fig.* 149.), tomboit hors du triangle, alors les élemens du triangle CAD, & ceux du triangle BAD, ſeroient également en progreſſion, & le nombre des termes ſeroit égal de part & d'autre ; c'eſt pourquoi retranchant des élemens du triangle BAD, ceux du triangle CAD, le reſte ſeroit les élemens du triangle BAC, qui ſeroient encore en progreſſion ; & par conſéquent leur ſomme ou l'aire de ce triangle ſe trouveroit en multipliant la baſe BC, par la moitié de la hauteur.

231. De même ſoit le triangle ABC (*Fig.* 150.), & qu'il ſoit propoſé d'en trouver un double, je prolonge la baſe AC, faiſant CD égal à AC, & je tire AD, ce qui me donne le triangle ABD, double du triangle ABC ; car les élemens du triangle ABD, ſont en progreſſion Arithmetique, de même que ceux du triangle ABC, & le nombre des termes eſt le même de part & d'autre ; ainſi le triangle ABC, eſt le produit de ſa baſe AC, par la moitié du nombre des termes ou de ſa hauteur, & le triangle ABD, eſt le produit de ſa baſe AD, par la moitié du même nombre des termes ; mais le multiplicateur eſt le même de part & d'autre ; donc ces produits ſont entr'eux comme AC, à AD.

232. Soient encore les triangles ABC, DEF (*Fig.* 151.), de même hauteur, entre leſquels on propoſe de trouver deux moyens proportionnels Arithmetique, je retranche de la baſe du grand,

la partie CH, égale à la base du petit, le reste est la différence de la progression que feront les quatre triangles, multipliée par le nombre des termes qui précéderont le dernier, c'est-à-dire par 3; ainsi je coupe AH, en trois parties égales, & en ajoûtant une à la base DF du petit triangle, j'ai le triangle DIE, qui est le second triangle de la progression, & ajoûtant à la base de celui-ci une partie, j'ai le triangle DLE, qui est le troisiéme triangle. Donc les quatre triangles DEF, DEI, DEL, ABC, sont en progression Arithmetique; car leurs élemens sont en progression Arithmetique, & le nombre des termes étant le même par tout: leur somme, ou les aires des triangles, sont entr'elles comme leurs bases DF, DI, DL, AC, qui sont en progression, puisque la différence est toujours la même.

233. Soit le trapezoïde ABCD (*Fig.* 152.), dont on me demande de trouver l'aire, je prolonge les côtez non paralleles jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en O. Du point O, j'abbaisse la perpendiculaire OI, sur la base AD, je conçois que la hauteur IE, du trapezoïde soit divisée en ses élemens, que je suppose être les parties égales EF, FG, GH, HI, & des points de division j'éleve les perpendiculaires RL, PM, QN, qui feront les élemens du trapezoïde; les triangles OBC, ORL, OPM, étant semblables, leurs bases BC, RL, PM, &c. sont entr'elles comme leurs hauteurs OE, OF, OG, &c. mais ces hauteurs sont en progression Arithmetique; donc les bases ou les élemens du trapezoïde sont en progression Arithmetique; ajoûtant donc ensemble le premier élement BC, au dernier AD, & multipliant leur somme par la moitié du nombre des termes, c'est-à-dire par la moitié de la hauteur EI, qui exprime le nombre des termes, le produit sera la somme de la progression, ou l'aire du trapezoïde.

234. Soit un cercle ABC (*Fig.* 153.), que l'on propose de mesurer, je tire le rayon AO, je le conçois divisé en ses élemens, que je suppose être les parties égales AD, DG, GO. Du centre O, & de tous les points de division, je conçois qu'on ait mené les circonferences DEF, GHI, qui feront les élemens du cercle ABC, parce que ces circonferences étant infiniment proches les unes des autres, se touchent toutes & rempliſſent l'aire. Les cercles ABC, DEF, GHI, étant semblables, leurs circonferences seront entr'elles comme leurs rayons OA, OG, OD; or ces rayons sont en progression Arithmetique: donc les circonferences sont aussi en progression Arithmetique; mais ces circonfe-

rences étant conçuës infiniment proches, la premiere, c'eſt-à-dire celle qui ſera la plus proche du centre O, ſera infiniment petite & égale à zero; ajoûtant donc cette circonference à la derniere ABC, la ſomme ſera encore la circonference ABC, & multipliant cette circonference par la moitié du nombre des termes, c'eſt-à-dire par la moitié du rayon AO, le produit ſera l'aire du cercle, ou la ſomme de la progreſſion.

235. Soit une couronne ABC*rh*, formée par deux cercles concentriques ABC, *rh* (*Fig.* 154.), & qu'il ſoit propoſé d'en trouver l'aire, je tire le rayon AO, & je conçois que ſa partie Ar, compriſe entre les deux cercles, ſoit diviſée en ſes élemens, & que par tous les points de diviſions il paſſe autant de circonference qui ayent le même centre O, toutes ces circonferences ſeront entr'elles comme leurs rayons Or, Os, Ot, OA; & par conſéquent elles ſeront en progreſſion Arithmetique: ajoûtant donc la premiere *rh*, à la derniere ABC, & multipliant leur ſomme par la moitié du nombre des termes, c'eſt-à-dire par la moitié de *r*A, le produit ſera la ſomme de la progreſſion, ou l'aire de la couronne.

## DEFINITION XXI.

236. La ligne ſur laquelle les élemens d'une figure ſont perpendiculaires s'appelle la *ligne des abſciſſes*, les élemens ſe nomment les *ordonnées* à cette ligne, & chaque élement a ſon *abſciſſe* correſpndante. Ainſi dans le triangle ABC (*Fig.* 147.) la ligne AB, eſt la ligne des *abſciſſes*, les lignes DI, EL, FM, &c. ſont les *ordonnées* à cette ligne, & les parties AD, AE, AF, &c. de la ligne des abſciſſes, qui répondent à chaque ordonnée depuis le ſommet A, qui en eſt l'origine, s'appellent les *abſciſſes* des ordonnées correſpondantes.

## COROLLAIRE.

237. Quand les ordonnées d'une figure ſont entr'elles comme les abſciſſes, & que les abſciſſes ſont en progreſſion Arithmetique, ſi la premiere ordonnée, c'eſt-à-dire celle qui eſt la plus proche de l'origine des abſciſſes, eſt infiniment petite, la figure eſt ou un triangle (*Fig.* 147.), ou un cercle (*Fig.* 153), & ſi la premiere ordonnée n'eſt pas infiniment petite, la figure eſt ou un trapeze (*Fig.* 152.), ou une couronne de cercle (*Fig.* 154.), en prenant

prenant pour les ordonnées du cercle les circonferences concentriques.

## REMARQUE.

238. Comme il n'arrive pas dans toutes les figures que les ordonnées ſoient entr'elles comme les abſciſſes, nous allons donner d'autres principes qui ſerviront à réſoudre certains Problemes où cette condition ne ſe trouve pas.

## *De l'Arithmetique des infinis.*

### DEFINITION XXII.

239. La progreſſion infinie des nombres naturels 0. 1. 2. 3. 4. 5. &c. qui commence par zero étant donnée, l'*Arithmetique des infinis*, apprend à trouver quel eſt le rapport de la ſomme de la progreſſion au plus grand terme multiplié par le nombre des termes, de même quel eſt le rapport de la ſomme des quarrez, ou des cubes, ou des quatriémes puiſſances des termes de la progreſſion au plus grand quarré, ou au plus grand cube, ou à la plus grande quatriéme puiſſance, &c. multiplié par le nombre des termes, de même quel eſt le rapport des racines quarrées, cubiques, &c. des termes de la progreſſion à la plus grande racine quarrée, cubique, &c. multipliée par le nombre des termes, &c.

J'ai expliqué les principes de cette ſcience dans mon Arithmetique des Géometres, où l'on en trouvera toutes les propoſitions démontrées par l'algebre; c'eſt pourquoi je n'en donnerai ici qu'un précis, qui ne laiſſera pas que d'être ſuffiſant pour ceux qui ne voudront pas avoir recours à cet Ouvrage.

En premier lieu, ſi l'on a une ſuite infinie de grandeurs, qui ſoient entr'elles comme la ſuite des nombres naturels 0. 1. 2. 3. 4. &c. la ſomme de ces grandeurs eſt à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1 eſt à 2; car puiſque ces grandeurs ſont en progreſſion Arithmetique, & que le premier terme eſt égal à zero, la ſomme de la progreſſion eſt égale au dernier terme multiplié par la moitié du nombre des termes; ainſi cette ſomme eſt au même dernier terme multiplié par le nombre des termes tout entier, comme 1. eſt à 2. Dans le triangle ABC, par exemple (*Fig.* 147.), dont les élemens ſont en nombre infini, & en pro-

greſſion Arithmetique, dont le premier terme commence par zero, la ſomme de la progreſſion, ou l'aire du triangle eſt égale au plus grand élement BC, multiplié par la moitié de la hauteur AB, & cette ſomme eſt au même élement BC, multiplié par la hauteur entiere AB, ou au rectangle de BC, par AB, comme 1. eſt à 2.

En ſecond lieu, la ſomme des quarrés d'une ſuite infinie de grandeurs, qui ſont en progreſſion Arithmetique, comme 0. 1. 2. 3. 4. &c. eſt au plus grand quarré multiplié par le nombre des termes, comme 1. eſt à 3. Car ſi l'on prend les quarrés 0. 1. 4. des trois premiers termes, la ſomme ſera 5, & le plus grand quarré 4 multiplié par le nombre terme 3, ſera 12, dont le tiers eſt quatre & non pas cinq; ainſi il s'en faut d'un cinquiéme que ce tiers ne ſoit égal à la ſomme 5; ſi l'on prend donc les ſix premiers quarrés, la ſomme ſera 55, & le plus grand quarré 25, multiplié par le nombre des termes 6, ſera 150, dont le tiers eſt 50, & non pas 55; ainſi il s'en faut d'un onziéme que 50 ne ſoit égal à la ſomme 55, & ce défaut commence à devenir moindre que le précédent. Si l'on prend donc les neuf premiers quarrez, la ſomme ſera 204, & le plus grand 64 multiplié par le nombre des termes, ſera 576, dont le tiers eſt 192, & non pas 204; & ainſi il s'en faut d'un $\frac{1}{17}$ que ce tiers ne ſoit égal à la ſomme de ces quarrez, & ce défaut eſt encore moindre; donc puiſqu'à meſure qu'on prend un plus grand nombre de quarrés, le défaut devient moindre, il s'enſuit que lorſque les quarrés ſeront en nombre infini, la ſomme des quarrés ſera exactement égale au tiers du plus grand quarré multiplié par le nombre des termes.

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| *ſomme* 5 | *défaut* $\frac{1}{5}$ |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| *ſomme* 55 | *défaut* $\frac{1}{11}$ |
| 6 | 36 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| *ſomme* 204 | *défaut* $\frac{1}{17}$ |

En troiſiéme lieu, ſi l'on ſe ſert de la même induction, on trouvera que la ſomme des cubes de la progreſſion infinie 0. 1. 2. 3. &c. eſt au plus grand cube multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à 4, que la ſomme des quatriémes puiſſances eſt à la plus grande quatriéme puiſſance multipliée par le nombre des

termes, comme 1 eſt à 5, & ainſi de ſuite pour les rapports des puiſſances plus élevées.

## COROLLAIRE.

240. Les rapports de la ſomme des termes, de celle des quarrés, des cubes, des quatriémes puiſſances, &c. au plus grand terme, ou au plus grand quarré, ou au plus grand cube, &c. multiplié par le nombre des termes, ſont donc entr'eux comme les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. c'eſt-à-dire en progreſſion Arithmetique. Ainſi connoiſſant le raport 1. 3. de la ſomme des quarrés au plus grand quarré multiplié par le nombre des termes, on connoîtra celui de la ſomme des racines à la plus grande racine multipliée de la même façon, en prenant un moyen proportionnel Arithmetique 2, entre 1 & 3, & le rapport 1. 2, ſera celui des racines; de même le rapport de la ſomme des cubes étant 1. 4, on prendra deux moyennes proportionnelles Arithmetiques 2, 3, entre un & quatre, & le rapport 1. 2, ſera celui des racines cubiques, &c. d'où il ſuit que ſi les quarrés d'une ſuite infinie de grandeurs, ſont entr'eux comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3. &c. ces quarrés ſeront au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à 2; & prenant une moyenne proportionnelle Arithmetique $\frac{3}{2}$, entre 1 & 2, on connoîtra que la ſomme de ces grandeurs eſt à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{3}{2}$, ou comme $\frac{3}{2}$ à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 eſt à 3.

De même ſi les cubes d'une ſuite infinie de grandeurs, ſont entr'eux comme les quarrés des nombres 0. 1. 2 3. &c. la ſomme de ces cubes ſera au plus grand multipliée par le nombre des termes, comme 1 à 3, & prenant deux moyennes proportionnelles arithmetiques $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, entre 1 & 2, on connoîtra que la ſomme des racines cubiques, c'eſt-à-dire des grandeurs, eſt à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{7}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{5}{3}$, ou 3 à 5.

Que ſi on connoît que les termes d'une ſuite infinie de grandeurs ſont entr'eux comme les cubes des nombres naturels 0. 1. 2. 3. &c. on connoîtra auſſi que la ſomme de ces termes eſt au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 4; c'eſt pourquoi ſi l'on veut ſçavoir quel ſera le rapport de leurs quarrés

au plus grand multiplié par le nombre des termes, on prendra un troisiéme proportionnel Arithmetique 7 à 1 & 4, & le rapport 1. 7, sera le rapport cherché; & si on vouloit le rapport de leurs cubes, on prendroit une quatriéme proportionnelle 10 à 1, 4, 7, & le rapport 1. 10, seroit le rapport des cubes, & ainsi des autres. C'est de cette façon qu'on a calculé la Table suivante pour les rapports des différentes puissances, de la suite infinie 0. 1. 2. 3. &c. pour ceux de leurs racines, & des racines de leurs puissances.

| *Rapports.* | | *Des racin. quarr.* | *Des racin. cubiq.* | *Des racin. 4emes* | *Des racin. 5emes.* | *Des racin. 6emes* | *Des racin. 7emes.* | *Des 8emes.* | *Des 9emes.* | *Des 10mes.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *De la somm. de term. au plus g.* | 1/2 | 2/3 | 3/4 | 4/5 | 5/6 | 6/7 | 7/8 | 8/9 | 9/10 | 10/11 |
| *Des quarrés.* | 1/3 | 2/4 | 3/5 | 4/6 | 5/7 | 6/8 | 7/9 | 8/10 | 9/11 | 10/12 |
| *Des cubes.* | 1/4 | 2/5 | 3/6 | 4/7 | 5/8 | 6/9 | 7/10 | 8/11 | 9/12 | 10/13 |
| *Des 4es puiss.* | 1/5 | 2/6 | 3/7 | 4/8 | 5/9 | 6/10 | 7/11 | 8/12 | 9/13 | 10/14 |
| *Des 5emes.* | 1/6 | 2/7 | 3/8 | 4/9 | 5/10 | 6/11 | 7/12 | 8/13 | 9/14 | 10/15 |
| *Des 6emes.* | 1/7 | 2/8 | 3/9 | 4/10 | 5/11 | 6/12 | 7/13 | 8/14 | 9/15 | 10/16 |
| *Des 7emes.* | 1/8 | 2/9 | 3/10 | 4/11 | 5/12 | 6/13 | 7/14 | 8/15 | 9/16 | 10/17 |
| *Des 8emes.* | 1/9 | 2/10 | 3/11 | 4/12 | 5/13 | 6/14 | 7/15 | 8/16 | 9/17 | 10/18 |
| *Des 9emes.* | 1/10 | 2/11 | 3/12 | 4/13 | 5/14 | 6/15 | 7/16 | 8/17 | 9/18 | 10/19 |
| *Des 10emes.* | 1/11 | 2/12 | 3/13 | 4/14 | 5/15 | 6/16 | 7/17 | 8/18 | 9/19 | 10/20 |

Le premier rang perpendiculaire à gauche, contient les rap-

ports de la somme des termes, de la somme des quarrés, des cubes, &c. au plus grand terme, au plus grand quarré, au plus grand cube, &c. multiplié par le nombre des termes. Ainsi $\frac{1}{2}$ marque le rapport de la somme des termes au plus grand terme, &c. $\frac{1}{3}$ marque le rapport de la somme des quarrés au plus grand quarré, &c. & de même des autres.

Le second rang perpendiculaire contient le rapport des racines quarrées des termes, ou des quarrés, ou des cubes, &c. à la plus grande racine quarrée des termes, ou des quarrés, ou des cubes, &c. ainsi $\frac{2}{3}$ marque le rapport des racines quarrées des termes à la plus grande racine, &c. $\frac{3}{4}$ marque le rapport des racines quarrées des quarrés à la plus grande racine, & ainsi des autres.

Les autres rangs contiennent de la même façon les rapports des racines troisiémes, quatriémes, &c. des termes, ou des quarrés, ou des cubes, &c.

Maintenant pour montrer l'usage de cette Table, supposons une suite infinie de grandeurs qui soient entr'elles comme les sixiémes puissances des nombres naturels, le rapport $\frac{1}{7}$, qui se trouve dans le premier rang perpendiculaire vis-à-vis les sixiémes puissances, vous fera voir que la somme de ces grandeurs est à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1 est à 7; & si vous voulez sçavoir quel sera le rapport de leurs racines quatriémes, suivez des yeux le rang horizontal, qui commence par le rapport , jusqu'à ce qu'il coupe le rang perpendiculaire, au haut duquel est écrit, *racines quatriémes*, & le rapport $\frac{4}{10}$ commun à ces deux rangs, vous fera connoître que la somme des racines quatriémes de ces grandeurs, est à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 4 est à 10, & ainsi des autres.

Avant d'appliquer ceci à des exemples de Géometrie, je vais donner deux Problemes qui enseigneront à trouver une suite de lignes qui soient entr'elles comme les racines quarrées, ou cubiques, &c. des nombres 0. 1. 2. 3. &c. ou comme les racines quarrées, cubiques, &c. de telles puissances de ces nombres qu'on voudra, & à trouver aussi une suite de lignes qui soient entr'elles comme les quarrés ou les cubes de ces mêmes nombres.

## PROBLEME XCVII.

241. *Trouver une ſuite de lignes qui ſoient entr'elles comme les racines quarrées des nombres* 0. 1. 2. 3. *&c.*

Prenez une ligne indéfinie AZ (*Fig.* 155.), portez-y pluſieurs parties égales AB, BC, CD, DE, &c. prenez une moyenne proportionnelle Géometrique AH, entre AB, & AC; enſuite une moyenne proportionnelle AG, entre AB, & AD; puis une autre entre AB, & AE, & ainſi de ſuite, la ligne AB, & les moyennes proportionnelles AH, AG, &c. ſeront entr'elles comme les racines quarrées des nombres 1, 2, 3, 4, &c. & ſi vous conſiderez le point A, comme une ligne infiniment petite, & par conſéquent égale à zero, vous aurez A, AB, AH, AI, &c. qui ſeront entr'elles comme les racines des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c.

### DEMONSTRATION.

Les lignes AB, AC, AD, AE, ſont entr'elles comme les nombres naturels 1. 2. 3. &c. mais les trois lignes AB, AH, AC, étant en progreſſion continuë, on a $\overline{AB}^2$. $\overline{AH}^2$ :: AB. AC, ou comme 1 eſt à 2, & $\overline{AB}^2$, vaut 1; donc $\overline{AH}^2$, vaut 2; donc AB, vaut la racine de 1: car la racine de 1 eſt 1, & AH, vaut la racine de 2. On prouvera de même que AG, vaut la racine de 3, & ainſi des autres; donc les lignes A, AB, AH, AG, &c. ſont entr'elles comme les racines des nombres 0. 1. 2. 3. &c.

### COROLLAIRE I.

242. Si on vouloit une ſuite de lignes qui fuſſent entr'elles comme les racines cubiques des nombres 0. 1. 2. 3. &c. on prendroit deux moyennes proportionnelles Géometriques entre AB, & AC, & l'on feroit AH, égale à la premiere des deux moyennes, on prendroit de même deux moyennes proportionnelles Géometriques entre AB, & AD, & l'on feroit AG égale à la premiere des deux, & ainſi de ſuite; car alors le cube de AB, ſeroit au cube de AH, comme AB, à AC; c'eſt-à-dire comme 1 eſt à 2, & comme le cube de AB eſt 1, dont la racine cubique eſt 1, le cube de AH, ſeroit 2, & AH, ſeroit la racine cubique de deux, par la même raiſon AG, ſeroit la racine cubique de trois, &c. donc les lignes A, AB, AH, AG, &c. ſeroient entr'elles comme les

racines cubiques des nombres o. 1. 2. 3. &c. & l'on feroit de même pour les racines des puiſſances plus élevées, en augmentant le nombre des moyennes proportionnelles à proportion des degrez de ces puiſſances.

## COROLLAIRE II.

243. Et ſi on vouloit, par exemple, que ces lignes fuſſent entr'elles comme les racines cubiques des quarrés des nombres o. 1. 2. 3. &c. on prendroit une ligne indéfinie AZ (*Fig.* 156.), que l'on couperoit au point B, C, D, &c. en ſorte que les lignes AB, AC, AD, &c. fuſſent entr'elles comme les quarrés 1, 4, 9, &c. comme on verra au Probleme ſuivant; enſuite on prendroit deux moyennes proportionnelles Géometriques entre AB, & AC, & l'on mettroit la premiere des deux de A en E, on prendroit de même deux moyennes entre AB, & AD, & l'on mettroit la premiere des deux de A en F, & ainſi des autres, & les lignes A, AB, AE, AF, &c. ſeroient entr'elles comme les racines cubiques des quarrés o. 1. 4. 9. &c. car AE étant la premiere des deux moyennes entre AB & AC, on auroit $\overline{AB}^3$. $\overline{AE}^3$. :: AB. AC, ou comme 1 à 4; & comme $\overline{AB}^3$, vaut 1, $\overline{AE}^3$, vaudroit 4; donc AB vaudroit la racine troiſiéme de 1, & AE la racine troiſiéme de 4, & de même des autres.

## PROBLEME XCVIII.

244. *Trouver une ſuite de lignes qui ſoient entr'elles comme les quarrés des nombres* o. 1. 2. 3. *&c.*

Prenez une ligne indéfinie AZ (*Fig.* 157.) coupez-la en parties égales, prenez-en une de A en B, quatre de A en C, neuf de A en D, & ainſi de ſuite, prenant autant de parties égales que les quarrés ont d'unités, & regardant le point A, comme une ligne infiniment petite, égale à zero, vous aurez A, AB, AC, AD, &c. qui ſeront entr'elles comme les quarrez o. 1. 4. 9. &c. ce qui eſt évident.

Si on vouloit une ſuite de lignes qui fuſſent entr'elles comme les cubes o. 1. 8. 27. &c. des nombres o. 1. 2. 3. &c. on prendroit une partie égale de A en B, 8 de B en C, 27, de C en D,

&c. & ainſi des autres puiſſances.

Mais ſi on vouloit, par exemple, que ces lignes fuſſent entr'elles comme les cubes des racines quarrées des nombres 0. 1. 2. 3. &c, on prendroit une ſuite de lignes qui fuſſent entr'elles comme les racines quarrées des nombres 1. 2. 3. &c. après quoi on prendroit aux deux premieres lignes une troiſiéme proportionnelle Géometrique, & enſuite une quatriéme, & la premiere ſeroit à cette quatriéme comme le cube de la racine quarrée de 1, au cube de la racine de 2; on prendroit de même à la premiere & à la troiſiéme ligne une troiſiéme proportionnelle Géometrique, puis une quatriéme, & la premiere ligne ſeroit à cette quatriéme, comme le cube de la racine quarrée de 1, au cube de la racine de 3, & ainſi des autres.

## *Application de l'Arithmetique des infinis à quelques exemples de Géometrie.* (Fig. 158.).

245. Soit une ligne droite AB, diviſée en ſes élemens, que je ſuppoſe être les parties égales AC, CD, DE, &c. ſoit une autre ligne AN, diviſée de façon que les lignes AH, AI, AK, AL, &c. ſoient entr'elles comme les racines quarrées des nombres 1. 2. 3. 4. &c. par les points C,D,E, &c. ſoient tirées les droites CT, DS, ER, &c. paralleles à AN, leſquelles rencontrent aux points T, S, R, Q, &c. les droites HT, IS, KR, &c. paralleles à AB; enfin ſoient joints les points A, T, S, R, Q, &c. par une ligne courbe, laquelle formera avec les droites AB, BO, un eſpace mixtiligne AOB; je dis que pour trouver l'aire de cet eſpace, il faut prendre les deux tiers du rectangle OBAN, formé par le plus grand élement OB, & la ligne AB.

### DÉMONSTRATION.

Les abſciſſes AC, AD, AE, &c. ſont entr'elles comme les nombres 1. 2. 3. 4. &c. & comme les Parties AC, CD, DE, &c. ſont infiniment petites, il y a donc une infinité d'abſciſſes entre A & B, & la premiere doit être regardée comme zero; donc ces abſciſſes ſont entr'elles comme la ſuite infinie 0. 1. 2. 3. &c. Or les élemens de la figure ou les ordonnées CT, DS, ER, &c.

&c. étant égaux chacun à chacun aux droites AH, AI, AK, &c. à cause des paralleles, sont entr'eux comme les racines des nombres 1. 2. 3. &c. & la premiere de ces ordonnées, ou celle qui est la plus proche du point A, ne differe pas de ce point, & est égale à zero; donc ces ordonnées sont entr'elles comme les racines quarrées de la suite infinie 0. 1. 2. 3. &c. mais par la Table précédente la somme des racines quarrées de cette suite, est à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 2 est à 3. Donc la somme des ordonnées CT, DS, QR, &c. est à la plus grande OB, multipliée par le nombre des termes AB, comme 2. est à 3; & par conséquent l'espace mixtiligne OAB, vaut les deux tiers du rectangle OBAN.

## COROLLAIRE I.

246. Si les lignes AH, AI, AK, AL, AM, &c, étoient entr'elles comme les racines cubiques, ou quatriémes, ou cinquiémes, &c. des nombres 1. 2. 3. 4. &c. l'aire de la figure AOB, seroit au rectangle OBAN, comme 3 à 4, ou comme 4 à 5, ou comme 5 à 6, &c. ce qui est évident par la Table ci-dessus.

## COROLLAIRE II.

247. Si les lignes AH, AI, AK, &c. étoient entr'elles comme les nombres 1. 2. 3. 4. &c. la figure AOB, seroit un triangle, & si elles étoient comme les quarrés, ou comme les cubes, ou comme les quatriémes puissances des mêmes nombres, la figure AOB, seroit au rectangle OBAN, comme 1 à 3, ou comme 1 à 4, ou comme 1 à 5, &c. & par conséquent au lieu d'avoir sa courbure tournée du côté de N, elle l'auroit tournée du côté de B, puisque cette figure seroit moindre que le triangle qui est au rectangle, comme 1 est à 2.

## COROLLAIRE III.

248. Donc quand les lignes AH, AI, AK, &c. sont entr'elles comme quelques racines des nombres 1. 2. 3. 4, &c. la convexité de la courbe est tournée de l'autre côté de la ligne AB des abscisses, & quand elles sont entr'elles comme quelques puissances

de ces nombres, la convexité de la courbe eſt du côté de cette ligne.

## *Paralogiſmes qu'il faut éviter en ſe ſervant de l'Arithmetique des infinis.*

249. En premier lieu, ſi les termes d'une ſuite infinie de grandeurs ſont entr'eux comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3. &c. on peut toujours en conclurre que la ſomme de ces grandeurs eſt à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1. à 2. Mais ſi l'on ſçait ſimplément que la ſomme d'une ſuite infinie de grandeurs, eſt à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1. à 2. on ne peut pas conclurre légitimement que ces grandeurs ſoient entr'elles comme la ſuite infinie 0. 1. 2. 3. &c. & pour le prouver.

Soit le triangle rectangle ABC, dont je ſuppoſe que la hauteur AB, ſoit diviſée en ſes Elemens aux points D, E, F, G, &c. les perpendiculaires DL, EM, FN, &c. ſur AB, ſeront les Elemens de ce triangle; & par conſéquent leur ſomme ſera au plus grand BC, multiplié par le nombre des termes AB, comme 1 à 2. Maintenant ſi au premier Element DL, j'ajoûte la partie LS, & que de l'Element HP, je retranche VP, égal à LS, les deux Elemens DS, HV, pris enſemble, ſeront encore égaux aux Elemens DL, HP, pris enſemble; de même ſi à l'Element EM, j'ajoûte MT, en retranchant de l'Element IQ, la partie QX, égale à MT, & qu'à l'Element FN, j'ajoûte NY, en retranchant de l'Element KR, la partie RZ, égale à NY, il eſt évident que la ſomme des Elemens de la figure ATOXC, ſera égale à la ſomme des Elemens du triangle, & comme le dernier Element BC, eſt commun à l'une & à l'autre ſomme, il s'enſuit que la ſomme des Elemens de la figure ATOXC, eſt au plus grand Element BC, multiplié par le nombre des termes, comme 1. eſt à 2. mais il eſt évident que les Elemens de la figure ATOXC, ne ſont pas entr'eux comme les nombres 0. 1. 2. 3. &c. Donc, &c.

On pourra donc conclurre à la vérité que la figure ATOXC, eſt égale au triangle dont la baſe eſt BC, & la hauteur AB; mais on ne pourra pas en conclurre que cette figure ſoit un triangle.

En second lieu, si l'on a une suite infinie de quarrez qui soient entr'eux comme les quarrez des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c. on pourra toujours en inferer que la somme de ces quarrez est au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3, & que leurs racines sont entr'elles comme les nombres 0. 1. 2. 3. &c. ou que la somme de leurs racines est à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1 à 2; mais si l'on sçait simplement que la somme de ces quarrez est au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3, on n'aura pas droit d'en inferer que ces quarrez sont entr'eux comme les quarrez des nombres 0. 1. 2. 3. &c. ni que leurs racineus soient entr'elles comme ces nombres, ni enfin que la somme de leurs racines soit à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1 à 2; car supposons qu'on me donne une suite infinie de quarrez, qui soient entr'eux comme les quarrez des nombres 0. 1. 2. 3. &c. je laisse subsister le plus grand quarré & un certain nombre de ceux qui le précédent, ensuite je retranche les autres deux à deux, & à mesure que j'en retranche deux, j'en substituë deux autres, qui pris ensemble, leur soient égaux (*n.* 71. 72. *&c.*) il est évident que la somme des quarrez substitués, sera égale à la somme des retranchés; ajoûtant donc les substitués à ceux que j'ai laissé subsister, la somme sera égale à la somme donnée des quarrez. Mais comme les substitués ne sont pas égaux aux retranchés chacun à chacun, il s'ensuit que les termes de la somme des substirués, joints à ceux que j'ai laissé subsister, ne seront pas entr'eux comme les termes de la somme donnée; c'est-à-dire comme les quarrez 0. 1. 4. 9. &c. De plus les racines des substitués ne seront point égales ni une à une, ni deux à deux aux racines des retranchés; donc la somme des racines des quarrez égaux à la somme donnée ne sera point égale à celle des quarrez de la somme donnée, & ces racines ne seront pas entr'elles comme les racines des quarrez donnés, ou comme 1 à 2.

Ce que nous venons d'observer par rapport à une suite infinie de grandeurs, ou de quarrez, doit s'observer de même par rapport à une suite infinie de cubes, ou de puissances plus élevées; & sans cette précaution, on peut commettre des fautes grossieres, dont je pourrai donner quelques exemples dans la suite.

Nous n'avons expliqué ici que les premiers principes de l'Arithmetique des infinis, pour ne pas nous écarter trop de notre deſſein; mais nous traiterons cette matiere à fond dans un autre Ouvrage, où nous donnerons auſſi la maniere de meſurer les ſurfaces & les ſolides, par la connoiſſance des centres de gravité; & nous eſperons que l'on verra avec plaiſir, l'étenduë preſque immenſe de ces deux principes dans les applications que nous en ferons à la Géometrie.

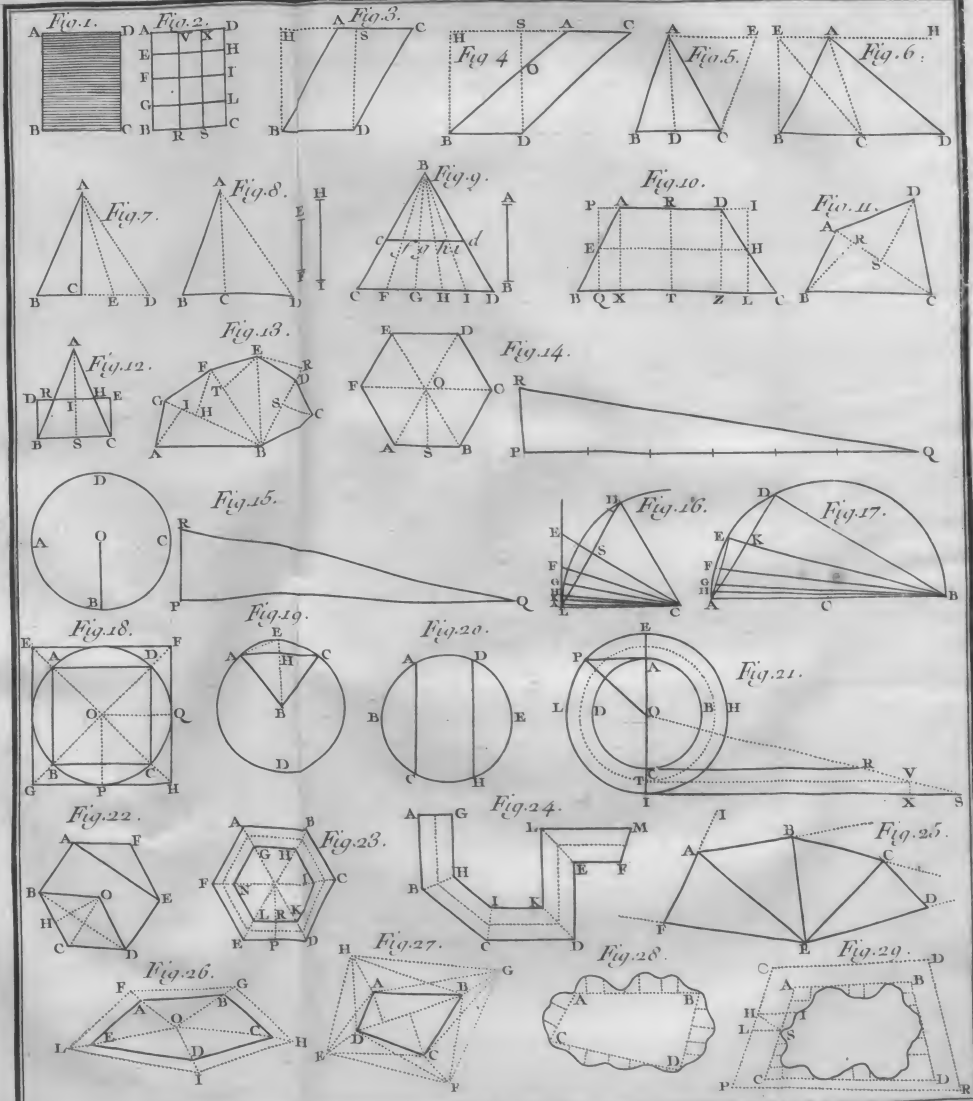


Fig.1.
Fig.2.
Fig.3.
Fig 4
Fig.5.
Fig.6.
Fig.7.
Fig.8.
Fig.9.
Fig.10.
Fig.11.
Fig.12.
Fig.13.
Fig.14.
Fig.15.
Fig.16.
Fig.17.
Fig.18.
Fig.19.
Fig.20.
Fig.21.
Fig.22.
Fig.23.
Fig.24.
Fig.25.
Fig.26.
Fig.27.
Fig.28.
Fig.29.

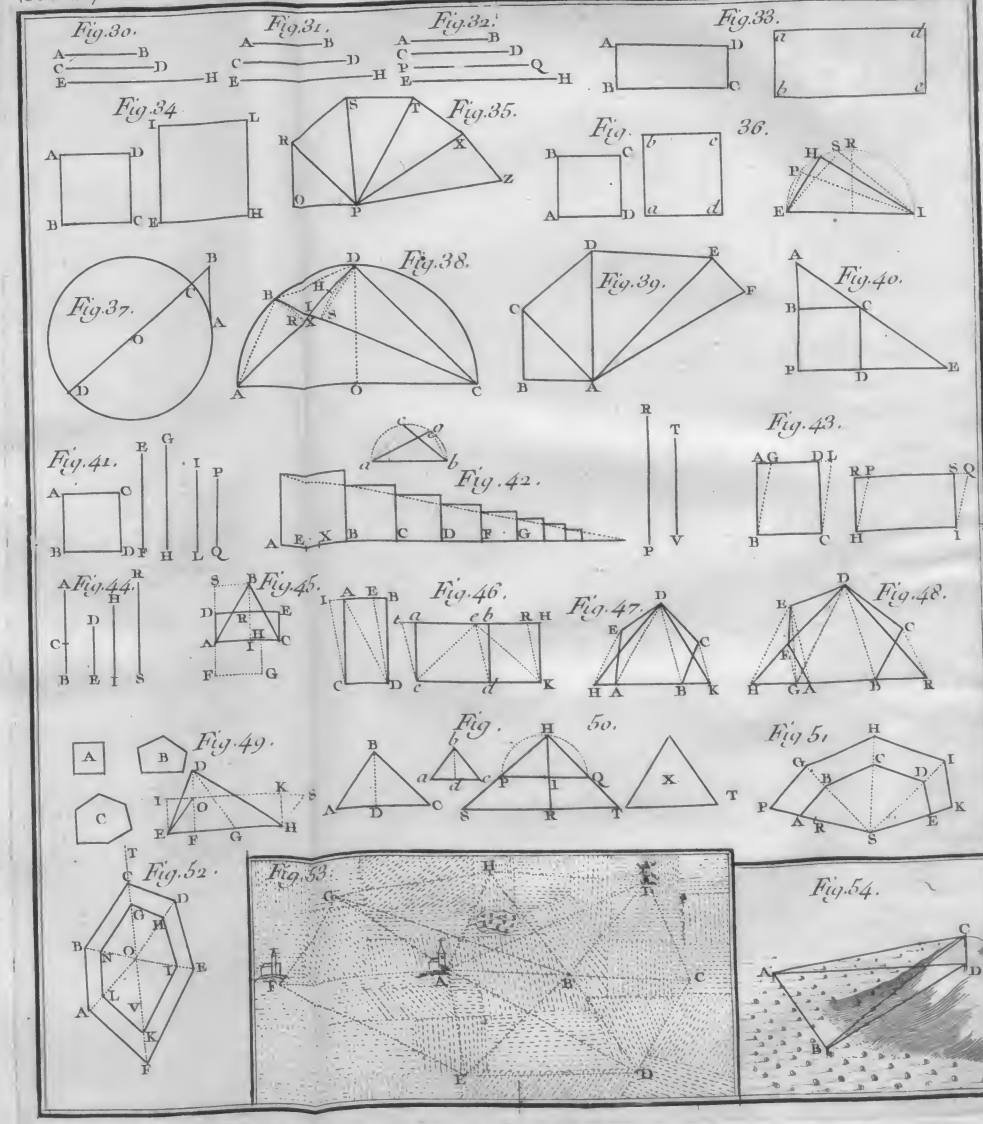


Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.

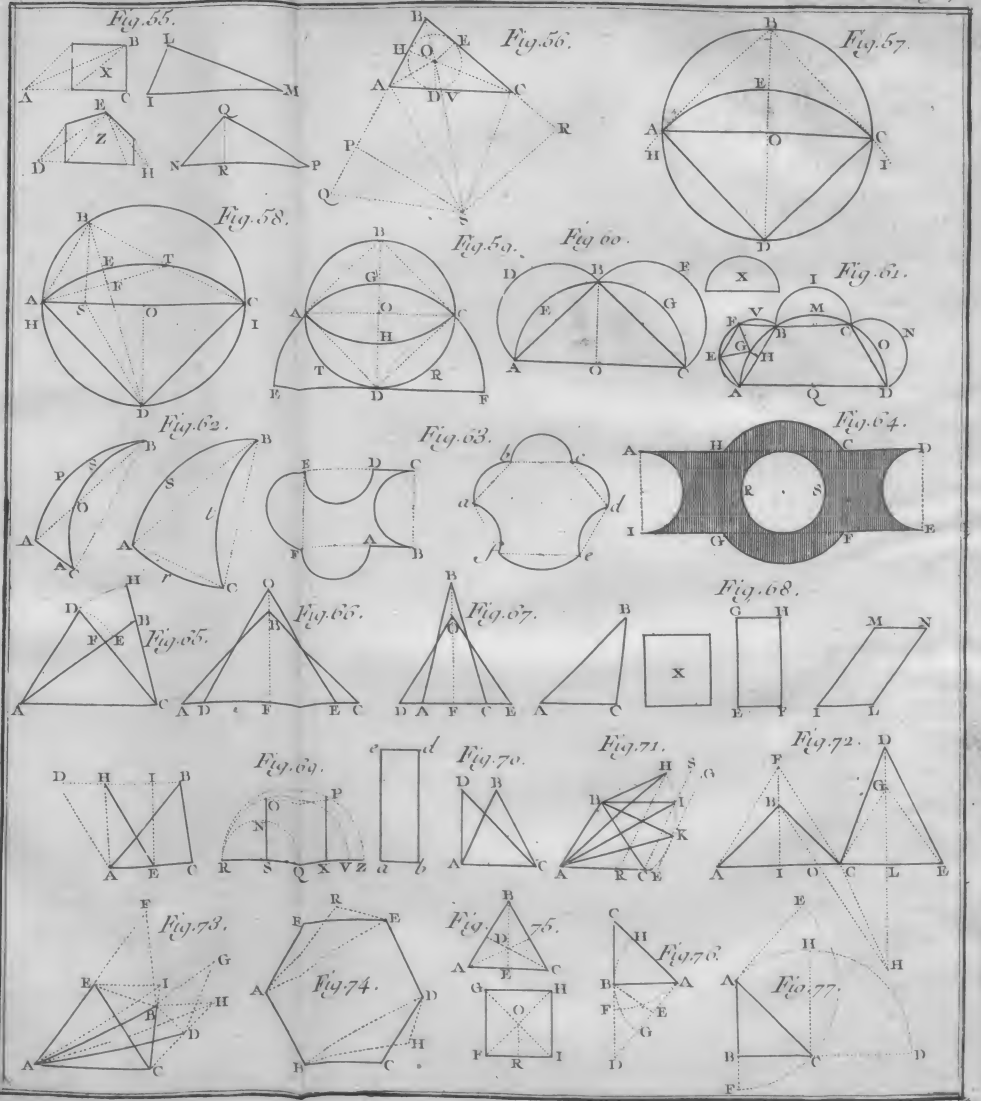


Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.

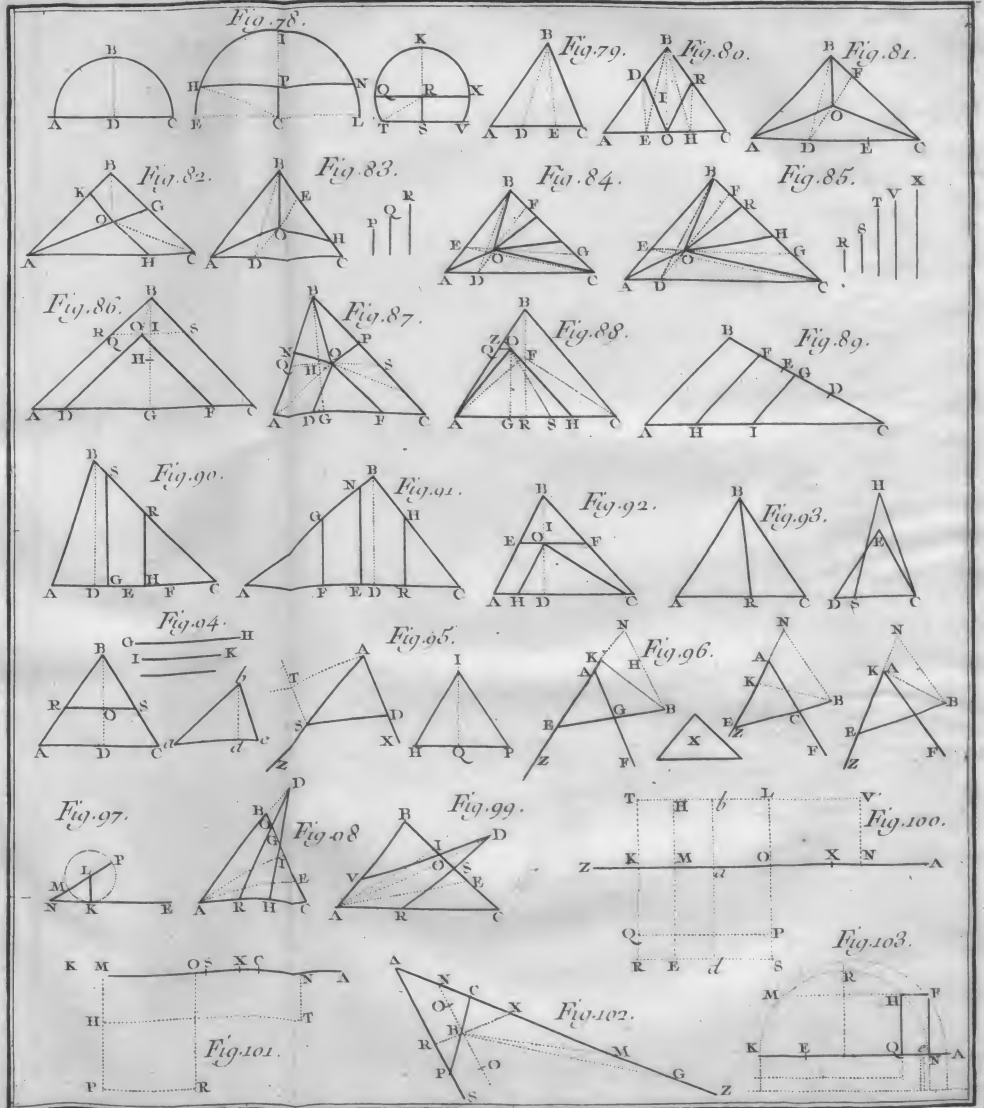
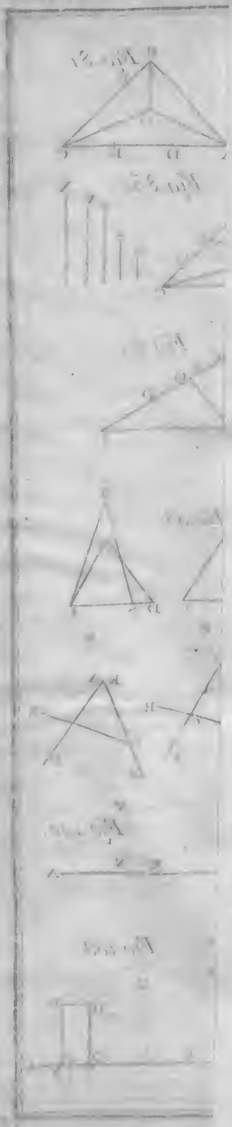


Fig.78.
Fig.79.
Fig.80.
Fig.81.
Fig.82.
Fig.83.
Fig.84.
Fig.85.
Fig.86.
Fig.87.
Fig.88.
Fig.89.
Fig.90.
Fig.91.
Fig.92.
Fig.93.
Fig.94.
Fig.95.
Fig.96.
Fig.97.
Fig.98
Fig.99.
Fig.100.
Fig.101.
Fig.102.
Fig.103.



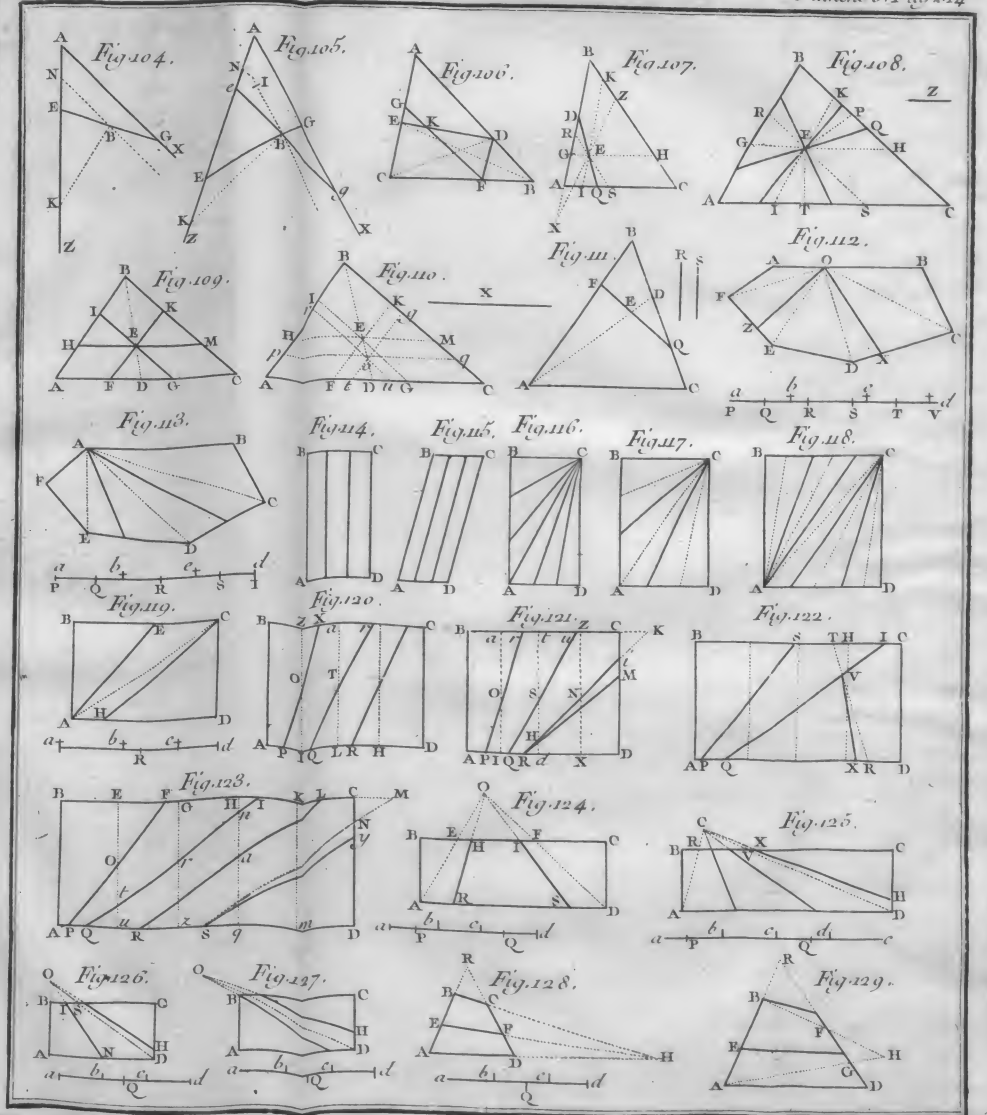


Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.

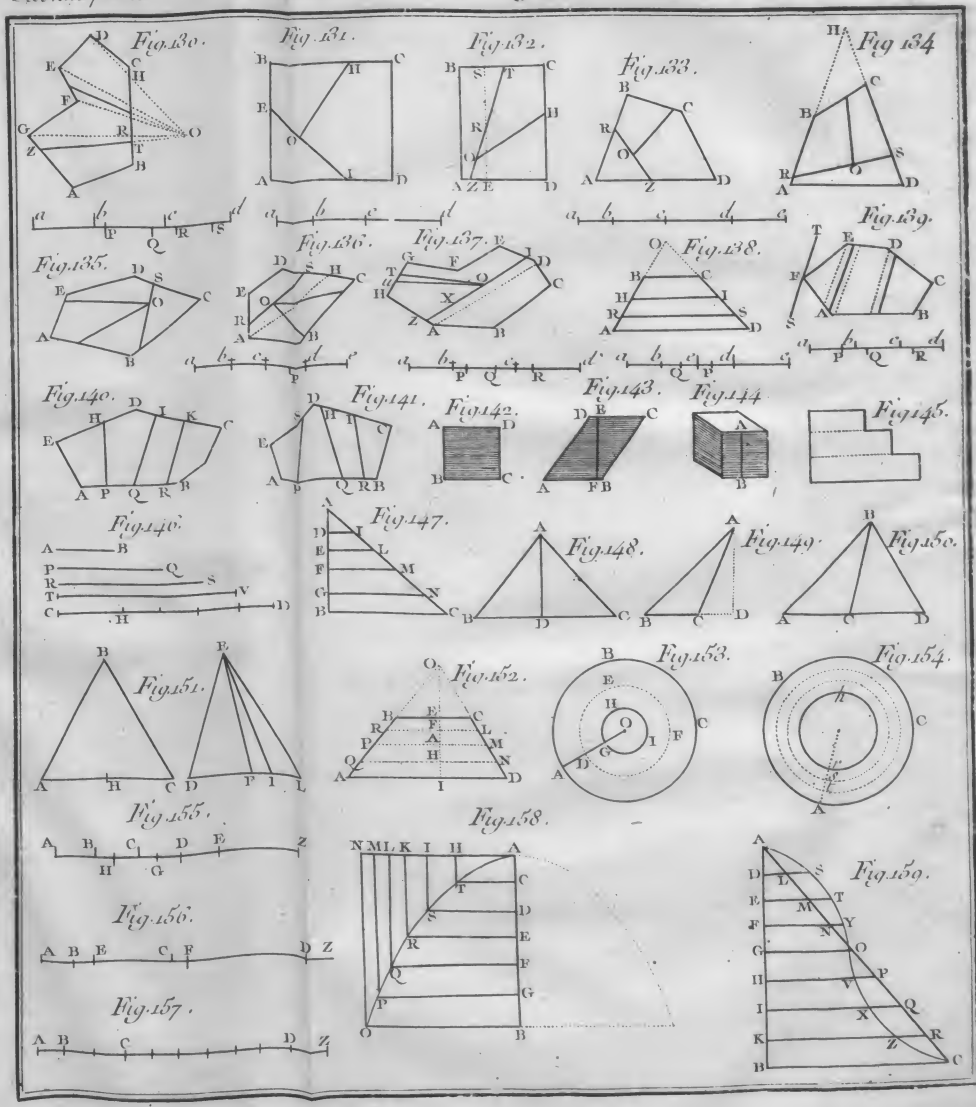
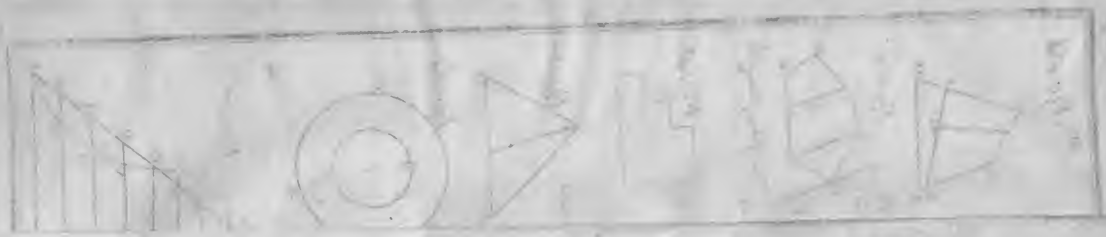


Fig.130.
Fig.131.
Fig.132.
Fig.133.
Fig 134
Fig.135.
Fig.136.
Fig.137.
Fig.138.
Fig.139.
Fig.140.
Fig.141.
Fig.142.
Fig.143.
Fig.144.
Fig.145.
Fig.146.
Fig.147.
Fig.148.
Fig.149.
Fig.150.
Fig.151.
Fig.152.
Fig.153.
Fig.154.
Fig.155.
Fig.156.
Fig.157.
Fig.158.
Fig.159.



# LA THEORIE ET LA PRATIQUE DU GEOMETRE.

## TROISIE'ME PARTIE.

*Des proprietés des Sections Coniques, de la Ligne ſpirale & de la* Cycloïde *ou Roulette.*

### SECTION I.

*Contenant les définitions & les proprietés principales des Sections Coniques conſiderés dans le Cone.*

DEFINITION I.

1. SOIT un cercle ABCD (*Fig.* 1.), du centre duquel ſoit élevée verticalement, ou à plomb, une ligne droite OE; à l'extrêmité E de cette ligne ſoit attachée une autre ligne EA, qui demeurant fixe au point E, tourne autour de la circonference, juſqu'à ce qu'elle ſoit retournée au point A, d'où elle eſt partie; cette ligne dans ſon mouvement

renfermera un espace solide, qu'on appelle *Cone droit*, le cercle ABCD, en est *la base*, le point E en est *le sommet*, la ligne OE *l'axe*, & l'espace parcouru par la ligne EA, en est la surface.

Il est évident que toutes les lignes droites qu'on peut tirer du sommet à la circonference de la base, sont égales à la ligne EA, & se trouvent sur la surface du cone.

Mais si la ligne OE, s'éleve obliquement sur le plan du cercle (*Fig.* 2.), alors le cone s'appelle *oblique*, & toutes les lignes droites tirées du sommet à la circonference de la base, sont inégales, à cause que le point E, n'est pas egalement distant de tous les points de la circonference.

## DEFINITION II.

2. Lorsque l'on coupe un cone par un plan (*Fig.* 3. 4. 5, *&c.*), le passage de ce plan forme dans le cone une nouvelle surface qui s'appelle Section conique, & qui peut être de cinq espeees différentes. 1°. Si le plan coupant passe par le sommet, & tombe perpendiculairement sur la base (*Fig.* 3.), la section ABC, est un triangle. En second lieu, si le plan coupe le cone parallelement à la base (*Fig.* 4.), ou antiparallelement, lorsque le cone est scalene (*Fig.* 5.) la section est un cercle. 3°. Si le plan coupe le cone obliquement (*Fig.* 6.), la section est un *ovale*, ou *Ellipse*. 4°. Si le plan coupe le cone parallelement à un côté, (*Fig.* 7.) la section est une *parabole*. 5°. Enfin si le plan coupe le cone parallelement à l'axe (*Fig* 8.), la section est une *hyperbole*.

## REMARQUE.

3. Comme nous avons expliqué dans les deux parties précédentes toutes les proprietez du triangle & du cercle, je me contenterai de démontrer ici en passant que la section qui passe par le sommet, & qui est perpendiculaire à la base, est un triangle, & que celle qui est ou parallele à la base, ou antiparallele, lorsque le cone est scalene, est un cercle.

Soit donc le cone ABC (*Fig.* 3.), & le plan AEFC, qui passant par le sommet B, tombe perpendiculairement sur la base, il est visible que ce plan passera par le centre, de même que l'axe, & qu'il coupera la base en deux parties égales par la droite ADC. Des extrêmités A, C, de cette droite tirez au sommet B, les lignes droites AB, CB, qui seront communes à la surface du cone &

au plan coupant, & ces trois lignes AC, AB, CB, seront le perimetre ou le contour de la section ; mais toute figure comprise sous trois lignes droites, est un triangle ; donc cette section est un triangle.

Soit de même un cone droit ABC (*Fig. 9.*), coupé par un plan parallele à la base, je dis que la section IGKH, est un cercle. Tirez sur le cercle de la base deux diametres AC, DB, & par leurs extrêmités tirez au sommet les droites AB, CB, DB, EB, qui seront égales entr'elles, & qui se trouveront toutes quatre sur la surface du cone ; c'est pourquoi elles formeront avec les diametres deux triangles égaux & équiangles ABC, DBE ; des points I, K, où les côtez du premier triangle rencontrent la section ; tirez la droite IK, qui sera parallele à la base AC, du triangle ABC, & les deux triangles ABC, IBK, seront semblables ; par la même raison les deux triangles DBE, GBH, seront aussi semblables : mais les deux triangles ABC, IBK, sont entr'eux comme les quarrez de leurs hauteurs BF, BO, de même que les deux triangles DBE, GBH ; donc ABC. IBK :: DBE, GBH ; & comme ABC, est égal à DBE, IBK est par conséquent égal à GBH ; mais IBK, & GBH, ayant la hauteur commune BO, sont entr'eux comme leurs bases IK, GH ; donc IK, est égal à GH. Dautre part dans les triangles semblables BFC, BOK, on a FC. OK :: BF. BO, & dans les triangles semblables BFA, BOI, on a FA. OI :: BF. BO ; donc FC. OK :: FA. OI ; & comme FC, est égal à FA, OK est par conséquent égal à OI. On prouvera de la même façon que GO, est égal à OH ; donc le point O, est également éloigné des quatre points I, G, K, H, du perimetre IGKH de la section. Or comme de quelque maniere qu'on tire un diametre sur le cercle de la base, il arrivera que la parallele à ce diametre qu'on tirera dans la section sera égale à IK, & coupée en deux également au point O, il s'ensuit que tous les points du perimetre de la section, sont également éloignés du point O, & que par conséquent cette section est un cercle.

Soit enfin un cone Scalene ABC (*Fig.* 10.), dont la section triangulaire est ABC, & que ce cone soit coupé par un plan antiparallele à la base, & perpendiculaire sur le plan du triangle ABC, je dis que la section RHSP, est un cercle. Concevons une autre section THVP, faite par un plan parallele à la base, & perpendiculaire aussi au triangle, la section commune PH, du

plan antiparallele & du parallele, ſera perpendiculaire ſur le triangle, & par conſéquent aux lignes TV, RS, qui ſont ſur le plan du triangle; car ſi cela n'étoit pas, l'un ou l'autre des deux plans ne ſeroit pas perpendiculaire au triangle, comme nous le démontrerons mieux en parlant des ſolides.

Cela poſé, puiſque les lignes RS, AC, ſont antiparalleles, les lignes RS, TV, ſont auſſi antiparalleles, & par conſéquent les deux triangles SOV, TOR, ayant les angles oppoſés au ſommet égaux, l'angle OSV, égal à l'angle OTR, & l'angle OVS, égal à l'angle ORT, ſont équiangles & ſemblables; donc SO. OV :: TO. OR; & par conſéquent SO×OR = OV×TO. Mais la ſection THVP, eſt un cercle, parce qu'elle eſt parallele à la baſe, & la ligne TV, en eſt le diametre; donc OV×TO = $\overline{OH}^2$, & par conſéquent SO×OR, eſt auſſi égal à $\overline{OH}^2$. Mais de toutes les figures il n'y a que le cercle ou le quarré d'une ligne OH, perpendiculaire ſur une ligne RS, ſoit égal au rectangle SO×OR, des ſegmens qu'elle fait ſur cette ligne; donc la ſection antiparallele HRSP, eſt un cercle.

## DEFINITION III.

4. Une ligne courbe ABC, dont la concavité eſt toujours du même ſens, étant donnée (*Fig.* 12.), ſi une ligne droite BD, coupe l'eſpace que cette courbe embraſſe en deux parties égales, enſorte que les perpendiculaires AC, EG, HK, ſur BD, ſe trouvent diviſées chacune en deux parties égales, la ligne BD, s'appelle *axe* de la courbe, le point B, en eſt le *ſommet*, les demi-perpendiculaires IK, FG, &c. ou IH, FE, &c. ſont les *ordonnées* à l'axe, & les parties de l'axe BI, BF, &c. compriſes entre le ſommet, & chaque ordonnée ſont les abſciſſes.

Que ſi dans le même eſpace (*Fig.* 13.), on tire d'autres lignes AH, IL, MB, &c. paralleles entr'elles, mais obliques à l'axe BD, & qu'une ligne PQ, coupe chacune de ces paralleles en deux parties égales, la ligne PQ s'appelle *diametre* de la courbe, le point P eſt le ſommet de ce diametre; les demi-paralleles ſont les *ordonnées* à ce diametre, & les parties du diametre entre le point P, & chaque ordonnée ſont les abſciſſes.

Enfin ſi d'un point O, pris ſur la courbe (*Fig.* 13.), on tire une ligne OT, qui touche la courbe ſans la couper, & qu'on prolonge l'axe juſqu'à ce qu'il rencontre OT, en T, la ligne OT, s'appelle

s'appelle *tangente*, la partie MT de l'axe compriſe entre l'ordonnée OM, tirée du point d'attouchement, & le point T, s'appelle *ſoutangente*, la ligne OX, perpendiculaire à la tangente au point d'attouchement, & qui aboutit à l'axe, s'appelle *perpendiculaire* à la courbe, & la ligne XM, compriſe entre la perpendiculaire & l'ordonnée à l'axe OM, tirée du point d'attouchement, ſe nomme la *ſouperpendiculaire*.

C'eſt par la connoiſſance de ces lignes & des rapports qu'elles peuvent avoir entr'elles, qu'on parvient à connoître les propriétés des courbes.

*Proprietés principales de la parabole conſiderée dans le cone.*

5. Soit le cone ABC (*Fig.* 11.), dont la ſection triangulaire eſt ABC, ſi l'on coupe ce cone par un plan parallele au côté BC, la ſection HDG, ſera une parabole par la définition 2, & cette parabole ſera perpendiculaire au triangle ABC, de même que la ligne HG, où elle coupe la baſe, ſera perpendiculaire au diametre AC, parce qu'autrement le plan coupant approcheroit plus d'un côté que de l'autre de la ligne BC, & ne lui ſeroit plus parallele. Donc la ligne HG, ſera coupée en deux également en E, & par conſéquent la ligne ED, ſera perpendiculaire à la ligne HG, puiſque ſon point D, eſt également éloigné des extrêmitez H, G, de même que le point E; donc ED, ſera l'axe de la parabole, & la ligne HE, ou EG, ſera une ordonnée. Or je dis que ſi l'on tire d'autres ordonnées à l'axe, les quarrez des ordonnées ſeront entr'eux comme les abſciſſes correſpondantes.

Concevons que le cone ſoit coupé par un plan parallele à la baſe & perpendiculaire au triangle, la ſection RPSQ, ſera un cercle dont le diametre RS, ſera parallele au diametre AC, de la baſe, de même que la ligne PQ, où elle coupe la parabole, ſera parallele à la ligne HG; d'où il ſuit que PQ, ſera perpendiculaire au diametre RS, & à l'axe ED, de la parabole, & que PO ſera ordonnée à cet axe. Ainſi il s'agit de montrer que $\overline{HE}^2$. $\overline{PO}^2$:: DE. DO. & pour cela.

Conſiderez que dans le cercle AHCG, on a $\overline{HE}^2 = AE \times EC$,

& que dans le cercle RPSQ, on a $\overline{PO}^2 = OS \times RO$; mais OS, eſt égal à EC, à cauſe des paralleles OE, SC; donc $\overline{PO}^2 = RO \times EC$. Donc $\overline{HE}^2 . \overline{PO}^2 :: AE \times EC . RO \times EC$; mais ces deux rectangles ayant la hauteur commune EC; ſont entr'eux comme AE, RO; donc $\overline{HE}^2 . \overline{PO}^2 :: AE . RO$. Or les triangles AED, ROD, étant ſemblables, on a AE. RO :: DE. DO; donc $\overline{HE}^2 . \overline{PO}^2 :: DE . DO$. & par conſéquent les quarrez des ordonnées HE, PO, ſont entr'eux comme leurs abſciſſes DE, DO.

*Proprieté principale de l'Ellipſe conſiderée dans le cone.*

6. Soit un cone ABC (*Fig.* 14.), dont la ſection triangulaire ſoit ABC, concevons qu'on coupe ce cone par deux ſections DIEH, FRGX, paralleles à la baſe, & qui ſeront par conſéquent perpendiculaires au triangle ABC; & par une autre ſection SRIZHX, qui ne ſoit ni parallele à la baſe, ni antiparallele, ſi le cone eſt ſcalene; cette ſection ſera une Ellipſe par la définition ſeconde; & ſi l'on ſuppoſe que ſon plan ſoit perpendiculaire au triangle ABC, la ligne HI, où elle coupe le cercle DIEH, ſera perpendiculaire au triangle, de même que la ligne XR, où elle coupe le cercle FRGX; d'où il ſuit que la ligne HI, ſera perpendiculaire aux lignes DE, SZ, qui ſont dans le plan du triangle, & la ligne XR, perpendiculaire aux lignes FG, SZ, qui ſont auſſi dans le même plan. Mais la ligne HI, eſt coupée en deux parties égales par le diametre DE; & XR, eſt coupée de même par le diametre FG. Donc SX, eſt l'axe de l'Ellipſe, & OI, QR, ſont ordonnées à cet axe. Or je dis que les quarrez de OI, QR, ſont entr'eux comme les rectangles ZO×OS, ZQ×QS, des parties de l'axe, que ces ordonnées coupent, & pour le prouver:

Conſiderez que les triangles ZOE, ZQG, étant ſemblables, donnent ZO. OE :: ZQ. QG. & que par la même raiſon les triangles SQF, SOD, donnent SO. OD :: SQ. QF. Multipliant donc les termes de la premiere proportion par les termes ZO. OE :: ZQ. QG / SO. OD :: SQ. QF

de la seconde, on aura ZO×OS. OE×OD :: ZQ × QS. QG ×QF ; mais dans le cercle DIEH, on a OE×OD = $\overline{OI}^2$, & dans le cercle FRGX on a QG×QF = $\overline{QR}^2$; donc ZO×OS. $\overline{OI}^2$ :: ZQ×QS. $\overline{QR}^2$. & *permutando* ZO×OS. ZQ×QS :: $\overline{OI}^2$. $\overline{QR}^2$. Donc les quarrez des ordonnées OI, QR, sont entr'eux comme les rectangles ZO×OS, ZQ×QS des parties de l'axe qu'elles coupent.

ZO×OS. OE×OD :: ZQ×QS. QG×QF

ZO×OS. $\overline{OI}^2$ :: ZQ×QS. $\overline{QR}^2$

ZO×OS. ZQ×QS :: $\overline{OI}^2$. $\overline{QR}^2$

*Proprieté principale de l'hyperbole considerée dans le cone.*

7. Soit un cone ABC (*Fig.* 15.), dont la section triangulaire est ABC : concevons qu'on coupe ce cone par un plan parallele à la base, & perpendiculaire au triangle, la section TQUP, sera un cercle ; concevons aussi qu'on le coupe par un plan parallele à l'axe, la section VPHQS, sera une hyperbole par la définition seconde, & supposant qu'elle soit perpendiculaire au plan du triangle, la ligne YS, où elle coupe la base, sera perpendiculaire au diametre AC, qui la coupera en deux également, de même que la ligne PQ, ou l'hyperbole coupe le cercle TQVP, sera perpendiculaire au diametre TV, qui la coupera aussi en deux également ; donc la ligne RH, sera l'axe de l'hyperbole, & les lignes RS, OQ, seront ordonnées à cet axe. Or je dis que si on prolonge le côté opposé AB, & l'axe RH, jusqu'à leur rencontre en Z, les quarrez des ordonnées RS, OQ, seront entr'eux comme les rectangles HR×ZR, HO×ZO, de leurs abscisses par ces mêmes abscisses ajoûtées au prolongement HZ de l'axe ; & pour le prouver.

Considerez que les triangles semblables ZOT, ZRA, donnent AR. TO :: ZR. ZO, & que les triangles semblables HOV, HRC, donnent RC. OV :: HR. HO. multipliant donc les termes de la premiere proportion par ceux

de la seconde, on aura $AR \times RC. TO \times OV :: ZR \times RH. ZO \times OH$; mais dans le cercle ASCY, on a $AR \times RC = \overline{RS}^2$, & dans le cercle TQVP, on a $TO \times OV = \overline{OQ}^2$; donc

$$AR. TO :: ZR. ZO$$
$$RC. OV :: HR. HO$$

$$AR \times RC\ TO \times OV :: ZR \times RH.\ ZO \times HO$$
$$\overline{RS}^2.\ \overline{OQ}^2 :: ZR \times RH.\ ZO \times HO$$

on a aussi $\overline{RS}^2. \overline{OQ}^2 :: ZR \times RH. ZO \times HO$, & par conséquent les quarrez des ordonnées, RS, OQ, sont entr'eux, &c.

## DEFINITION IV.

8. Dans la démonstration précédente, j'ai appellé la ligne HR (*Fig.* 15.), *axe* de l'hyperbole, selon la définition troisiéme, qui est généralemeut pour toutes les courbes. Cependant il faut sçavoir qu'à l'égard de l'hyperbole en particulier, on appelle la ligne ZH, *premier axe*, ou *axe transversal*, pour le distinguer du second axe, dont nous parlerons dans la suite, & que la ligne HR des abscisses s'appelle le prolongement de l'axe, de façon que la ligne entiere s'appelle *axe prolongé*.

Ainsi pour énoncer la proprieté de l'hyperbole, il faut dire que les quarrez des ordonnées à l'axe prolongé, sont entr'eux comme les rectangles des abscisses par l'axe prolongé jusqu'à l'extrêmité des abscisses.

## REMARQUE.

9. Comme il seroit trop embarassant de chercher les autres proprietés de la parabole, de l'Ellipse, & de l'hyperbole dans le cone, nous allons examiner ces figures en elles-mêmes, & sans les rapporter au solide dans lequel elles se forment.

# SECTION II.

## *Des proprietés de la parabole considerée hors du cone.*

### PROBLEME I.

10. *Décrire une parabole* (Fig. 16).

Prenez une ligne droite AB, que vous diviſerez en deux parties égales au point C; diviſez la moitié AC, en parties égales, les plus petites que vous pourrez aux points D, D, D, &c. du point C, tirez la perpendiculaire indéfinie CR, ſur laquelle vous prendrez un point O à diſcretion. Du point O, tirez aux points D, D, D, &c. les droites OD, OD, &c. puis de l'un des points D, tirez la droite indéfinie DP, perpendiculaire à AC, & au point O, faites avec la ligne DO, l'angle DOP, égal à l'angle ODP; ce qui vous donnera un triangle iſoſcele DPO, dont la baſe ſera DO, les côtez égaux ſeront DP, PO, & le ſommet ſera le point P; faites la même choſe à tous les points D, & par tous les ſommets P, P, P, &c. faites paſſer une courbe PPS. Cela fait, diviſez l'autre moitié CB, en autant de parties égales qu'il y en a dans AC, & faiſant la même conſtruction, vous aurez l'eſpace PPSV, qui ſera une parabole, dont le ſommet ſera le point S, l'axe ſera la ligne SR, & le perimetre ſera la ligne courbe PPSV, laquelle ſera d'autant plus exacte, que les perpendiculaires DP, DP, ſeront plus proches les unes des autres.

## DEMONSTRATION.

Plus les perpendiculaires PD, approchent de la ligne CR, plus auſſi les triangles DPO deviennent moindres, & leurs ſommets P, P, &c. approchent davantage de leurs baſes OD. Donc quand la perpendiculaire ſera infiniment proche de la ligne CR, le ſommet P, ſera auſſi infiniment proche de ſa baſe CO; & par conſéquent cette baſe CO ſera diviſée en deux parties égales en S, qui ne ſera pas différent du point P, à cauſe de leur infinie proximité. Cela poſé.

D'un point quelconque P de la courbe, tirez PT, perpendiculaire ſur SR, la ligne PT, ſera une ordonnée, & le triangle POT, étant rectangle, le quarré de PT, ſera égal au quarré de PO, moins le quarré de OT; mais par la conſtruction PO eſt égal à PA, & PA eſt égal à CT, à cauſe des paralleles; donc le quarré de PT, eſt égal au quarré de CT, moins le quarré de OT; or ſi du quarré CTGN, de la ligne CT, on ôte le quarré OTMK, de la ligne OT, il reſte le quarré QKLG de la droite CO, plus deux rectangles OCQK, KLMN, de TO par OC; & ſi on coupe le quarré de CO, en deux rectangles égaux par la ligne HI, & qu'on en donne un à chaque rectangle de TO, par OC, on

aura deux, rectangles de HM, ou ST par HI, ou CO égal à HI; donc le quarré de PT, est égal à deux rectangles de ST par CO, ou à un rectangle de l'abscisse ST par 2CO, ou par 4SO, c'est-à-dire par une ligne quadruple de la distance SO, du sommet de la courbe au point O; & comme la même chose arrivera à l'égard de toute autre ordonnée PT, il s'ensuit que les quarrez de ces ordonnées sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses correspondantes par 4SO; mais ces rectangles ayant la hauteur commune 4SO, sont entr'eux comme leurs bases qui sont les abscisses; donc les quarrez des ordonnées PT, PO, sont entr'eux comme leurs abscisses; & par conséquent la figure PPSV, est une parabole.

### DEFINITION V.

11. Le point O s'appelle *foyer* de la parabole, la ligne égale à 4SO, s'appelle le parimetre, & la ligne AB, se nomme la *directrice*.

### COROLLAIRE.

12. Si par le sommet S d'une parabole, on tire une ligne XZ, parallele aux ordonnées, cette ligne touchera la parabole sans la couper; car elle sera aussi parallele à la ligne AB, & par conséquent toutes les perpendiculaires tirées entre ces deux lignes, seront égales, au lieu que les perpendiculaires DP, DP, allant toujours en s'aggrandissant à mesure qu'elles s'éloignent de l'axe, ne rencontreront par conséquent la parabole qu'après avoir passé la ligne XZ; donc, &c.

### PROBLEME II.

13. *Une parabole BPAC* (Fig. 17.), *étant donnée avec son axe AD, & son foyer O, tirer par un point P, pris sur le perimetre ailleurs qu'au sommet A, une tangente PN, à cette parabole.*

Prolongez l'axe indéfiniment au-delà du sommet A, faites AR, égal à AO, & tirez RZ, perpendiculaire à l'axe; du point P, tirez PX, perpendiculaire à RZ, & tirez XO, que vous diviserez également au point H; enfin du point P, par le point H, tirez la droite PHN, qui sera tangente à la parabole, en ce seul point P.

DEMONSTRATION.

Pour démontrer ceci, il suffit de faire voir que MN, ne peut toucher la parabole en aucun autre point, soit qu'on le prenne entre P & N, ou en-deçà de P vers M.

Soit donc un autre point T, entre P & M, je tire les droites TX, TO, lesquelles sont égales, à cause que PH, coupe la base XO, en deux parties égales, & lui est perpendiculaire, puisque PX est égal à PO, par la nature de la parabole; du même Point T, je tire TQ, perpendiculaire à RZ, & le triangle TXQ, étant rectangle, TX est plus grand que TQ; & par conséquent TQ est moindre que TO. Donc le point T, n'est point à la parabole, & de plus ce point est hors de la parabole; car tirant la droite QO, l'angle TQO, est plus grand que l'angle TOQ, puisque le côté TO, du triangle TOQ, est plus grand que TQ. Faisant donc en O, l'angle SOQ, égal à l'angle TQO, la ligne SO, tombe plus bas que la ligne TO; donc afin que QT, joigne SO, & lui soit égal, il faut nécessairement le prolonger en-deçà de la tangente MN, & le point S, où ces deux lignes se joindront, & qui sera un point de la parabole, se trouvera entre la tangente & le diametre.

Soit de même un point K, entre P & M, je tire les lignes KX, KO, qui sont égales par les raisons ci-dessus. Je tire aussi KZ, perpendiculaire sur RZ, & à cause du triangle rectangle KZX, KZ, est moindre que KX; & par conséquent moindre aussi que KO: donc le point K, n'est point sur le perimetre de la parabole, & on prouvera de même qu'il est hors de la parabole, en tirant ZO, &c. Donc la ligne MN, ne touche la parabole qu'au point P.

COROLLAIRE I.

14. *D'un point P sur une parabole* (Fig. 18.), *on ne peut mener qu'une tangente PN.* Si l'on veut qu'on en puisse mener une autre comme PM; du foyer O, je tire sur PM, une perpendiculaire OR, qui coupera RZ, en R; du point R, je tire la perpendiculaire RS, & du point S, où RS, coupe la parabole, je tire par le milieu de RO, la ligne SG, qui sera tangente au point S; mais SG, est perpendiculaire sur RO, à cause du triangle isoscele RSO; donc elle est parallele à PM, qui est aussi perpendiculaire sur RO; & par conséquent PM, coupe la parabole, si elle est

entre le point S & le point O, & n'eſt point tangente; & ſi elle eſt au-delà du point S, elle ne coupe ni ne touche la parabole: donc, &c.

## COROLLAIRE II.

15. *Si du point P* (Fig. 19.), *où une tangente touche la parabole, on tire au foyer la droite PO, & qu'on prolonge l'axe au-delà du ſommet, juſqu'à ce qu'il rencontre la tangente en N, la partie NO, compriſe entre le foyer O, & le point N eſt égale à la ligne PO.* Faiſant SR, égal à SO, & tirant QT, perpendiculaire à NO, puis du point P, tirant PQ, perpendiculaire à QT, & du point Q, la droite QO, les deux triangles PQX, NXO, auront l'angle PXQ, égal à l'angle NXO, qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'angle XQP, égal à ſon alterne XON, à cauſe des paralleles QP, NO, & le côté QX, égal au côté XO; donc ces deux triangles ſeront équiangles & égaux; donc le côté NO, eſt égal au côté PQ, & par conſéquent à PO, qui eſt égal à PQ: d'où il ſuit que le triangle PON, eſt iſoſcele.

## COROLLAIRE III.

16. *Si par le point P d'attouchement* (Fig. 19.), *on tire parallelement à l'axe la ligne QH, que j'appellerai diametre de la parabole, parce qu'elle l'eſt en effet, ainſi qu'il ſera démontré plus bas, l'angle KPH, fait par le diametre, & la tangente eſt égal à l'angle NPO, fait par la tangente, & la ligne PO, tirée au foyer.* QH, NF, étant paralleles, l'angle KPH, eſt égal à l'angle PNO; mais le triangle PNO, étant iſoſcele, l'angle PNO eſt égal à l'angle NPO; donc l'angle KPH, eſt égal à l'angle NPO.

## COROLLAIRE IV.

17. *Si du point d'attouchement P, on tire à l'axe l'ordonnée PM, la partie NS de la ſoutangente NM, eſt égale à l'abſciſſe SM.* NO eſt égal à QP (*n.* 15.), & QP eſt égal à RM; ôtant donc la partie commune RO, on aura NR, egal à OM, & ajoûtant d'un côté RS, & de l'autre SO, égal à RS, on aura NS, égal à SM,

D'où l'on tire une méthode aiſée de mener une tangente par un point donné P; car en tirant l'ordonnée PM, & faiſant SN, égal à SM, la ligne PN, ſera tangente.

COROL-

## COROLLAIRE V.

18. *Si par le point d'attouchement P, on tire PF, perpendiculaire à la tangente, la ſouperpendiculaire MF, eſt égale à la moitié du parametre, ou au double de SO, qui eſt la diſtance du foyer au ſommet.* QO étant perpendiculaire à la tangente, de même que PF, les deux lignes QO, PF, ſont paralleles & égales; d'où il eſt aiſé de voir que les deux triangles rectangles FPM, OQR, ſont égaux & équiangles, & que par conſéquent MF, eſt égal à OR, ou au double de SO, ou enfin à la moitié du parametre.

## COROLLAIRE VI.

19. *Une tangente PN* (Fig 20.), *étant donnée avec ſon diametre PR, ſi du ſommet S de la parabole, on tire la tangente SR, qui rencontre le diametre PR, prolongé en R, le triangle NXS, fait par les deux tangentes & l'axe, eſt égal au triangle PXR, fait par les mêmes touchantes & le diametre.* Tirant du point P, l'ordonnée PT, à l'axe, on aura NS, égal à ST, ou à PR; or les deux triangles NXS, PXR, ſont ſemblables, parce qu'ils ont chacun un angle droit, & les angles aigus faits en X égaux, & outre cela ils ont le côté NS, égal au coté PR; donc ils ſont parfaitement égaux.

## COROLLAIRE VII.

20. *Donc le rectangle PRST, eſt égal au triangle PTN.* Si aux triangles égaux PRX, NSX, on ajoûte la partie PXST, on aura PRST = PTN.

## COROLLAIRE VIII.

21. *Ayant l'axe NH, & un diametre RZ, avec leurs tangentes PN, SR* (Fig. 21.), *ſi d'un point E, ou e, ou M, pris ſur la parabole, on tire une parallele à chaque tangente, le triangle EKL, ou eOL, ou IMH, fait par ces deux paralleles & l'axe, eſt égal au rectangle XRSK, ou ZRSO, ou QRSI, fait par la tangente de l'axe, & ſa parallele compriſe entre l'axe & le diametre.* Si du point d'attouchement P, on tire PT, ordonnée à l'axe, les triangles ſemblables PTN, EKL, ſont entr'eux comme les quarrez de leurs baſes PT, EK; or PT, EK, étant ordonnées à l'axe, leurs quarrez ſont entr'eux comme leurs abſciſſes ST, SK, ou comme les rectangles SRPT, SRXK, qui ont la hauteur commune SR; donc les triangles PTN, EKL, ſont entr'eux comme les rec-

tangles SRPT, SRXK; mais le triangle PTN, eſt égal au rectangle SRPT (*n.* 20.); donc le triangle EKL, eſt égal au rectangle SRXK.

On prouvera de même que les triangles PTN, *e*OL, étant ſemblables, ſont entr'eux comme les rectangles SRPT, SRZO, & que par conſéquent le triangle *e*OL, eſt égal au rectangle SRZO.

De même encore à cauſe de la ſimilitude des triangles PTL, IMH, on prouvera que le triangle IMH, eſt égal au rectangle RSQI.

### COROLLAIRE IX.

22. Dans la même figure 21^e^, *l'autre triangle XEC, fait par les deux paralleles aux tangentes avec le diametre PZ, eſt égal au parallelograme PCLN, fait par l'une des paralleles avec le diametre, l'axe & la tangente du diametre.* Le triangle PTN, étant égal au rectangle SRPT, ſi l'on ôte de part & d'autre le trapezoïde commun KAPT, le triangle reſtant ANK, ſera égal au triangle RPV, joint au trapezoïde VAKS; & ſi d'un côté on ôte le triangle EKL, & de l'autre le rectangle SRXK, égal à ce triangle, le trapezoïde reſtant ANLE, ſera égal au triangle XAP, & ajoûtant de part & d'autre le trapezoïde AECP, on aura le parallelograme NLCP, égal au triangle XEC.

De même ſi le point *e*, eſt en-deçà du point P, le triangle *e*LO, étant égal au rectangle SRZO, ſi l'on ôte d'une part le triangle LEK, & de l'autre le rectangle SRXK, égal au triangle, on aura le trapezoïde KE*e*O, égal au rectangle KXZO; & ôtant de part & d'autre la figure KECZO, qui eſt commune, on aura le triangle *e*CZ, égal au triangle XEC, & par conſéquent au parallelograme NLCP.

Enfin ſi le point E, eſt de l'autre côté de la parabole, comme en M (*Fig.* 22.), le triangle IMH, étant égal au rectangle SRQI, ſi on ôte du triangle QMT, le triangle IMH, & qu'on lui donne le rectangle SRQI, on aura le trapezoïde SRTH, égal au triangle QMT, & ſi on ôte de ce trapezoïde le triangle RVP, & qu'on lui donne le triangle NVS, égal à RVP, on aura le parallelograme TPHN, égal au triangle QMT.

### COROLLAIRE X.

23. *Si par un point E, de la parabole* (Fig. 22.), *on tire une droite Ee, parallele à une tangente PN, cette ligne coupera la parabole en un*

*autre point* e, *& elle ſera diviſée en deux parties égales par la ligne PZ, qu'on tirera du point P d'attouchement, parallelement à l'axe.* 1°. Si l'on prend un point *a* en-deſſous de P, la tangente qu'on tireroit par ce point, rencontrera néceſſairement la tangente PN; car ſi elle lui étoit parallele, il eſt viſible qu'elle couperoit la parabole au lieu de la toucher; ainſi cette ligne coupera auſſi la ligne E*e*, qui eſt parallele à PN; mais elle ne ſçauroit la couper en-dedans de la parabole, puiſqu'elle eſt tangente; donc elle doit la couper en-dehors & du côté du point *e*, attendu qu'elle coupera la tangente PN, du côté du point P, en tirant vers l'axe, & que par conſéquent elle s'écartera de la parallele du côté du point E. Donc E*e* coupe la parabole en deux points. 2°. La ligne E*e*, eſt coupée en deux également par la ligne PC; car les triangles XEC, Z*e*C, ſont égaux par le Corollaire précédent; mais ils ſont auſſi équiangles: donc le côté EC, eſt égal au côté *e*C; & comme cela arrivera à toutes les paralleles à la tangente qu'on tirera dans la parabole, il s'enſuit par la définition 3^e^, que *la ligne PZ eſt un diametre, & que tout diametre eſt parallele à l'axe, & enfin que toute ordonnée à un diametre, eſt parallele à la tangente au ſommet de ce diametre.*

## COROLLAIRE XI.

24. *Les quarrez des ordonnées CE. TM, &c. à un diametre PT, ſont entr'eux comme les abſciſſes PC, PT.* Ces quarrez ſont entr'eux comme les triangles ſemblables CXE, TQM, à cauſe que CE, TM, ſont les côtez homologues de ces triangles; mais CXE, eſt égal au parallelograme PCNL, & TQM eſt égal au parallelograme TPNH; donc les quarrez $\overline{CE}^2$, $\overline{TM}^2$, ſont entr'eux comme les parallelogrames; mais ces parallelogrames ayant même hauteur, à cauſe qu'ils ſont entre mêmes paralleles, ſont entr'eux comme leurs baſes PC, PT; donc les quarrez $\overline{CE}^2$, $\overline{TM}^2$, ſont auſſi entr'eux comme PC. PT.

## COROLLAIRE XII.

25. *Si l'on prend une troiſiéme proportionnelle à une abſciſſe PC, & à ſon ordonnée CE, cette troiſiéme proportionnelle ſera le parametre du diametre PT.* Le quarré $\overline{CE}^2$, ſera égal au rectangle de l'abſciſſe

PC, par la troiſiéme proportionnelle. Donc, &c. Si du ſommet S de l'axe on tire une ordonnée SY, au diametre la demi-ſoutangente NS, ſera égale à l'abſciſſe PY, & l'ordonnée SY, ſera égale à la tangente PN; donc puiſque la troiſiéme proportionnelle à l'abſciſſe & à l'ordonnée, eſt le parametre du diametre, comme on vient de voir, il s'enſuit encore que *ce parametre eſt troiſiéme proportionnelle à la demi-ſoutangente de l'axe, & à la tangente.*

## COROLLAIRE XIII.

26. *Le parametre d'un diametre PT* (Fig. 23.), *ſurpaſſe celui de l'axe de quatre fois la valeur de la demi ſoutangente NS.* Tirez du point P, l'ordonnée PH à l'axe; & appellez le parametre du diametre $q$, & celui de l'axe $p$; puis donc que $q$ eſt troiſiéme proportionnelle à la demi-ſoutangente & à la tangente, vous aurez $\overline{PN}^2 = q \times NS$; & de même, puiſque $p$ eſt troiſiéme proportionnelle à l'abſciſſe SH, ou NS, & à l'ordonnée PH, vous aurez $\overline{PH}^2 = p \times NS$; or le triangle PNH, étant rectangle, le quarré de PN, eſt égal au quarré de PH, plus au quarré de NH, lequel eſt quadruple du quarré de NS; ainſi $\overline{PN}^2 = q \times NS = p \times NS + 4\overline{NS}^2$, & comme ces rectangles ont la hauteur commune NS, en diviſant par NS, vous aurez $q = p + 4NS$.

## COROLLAIRE XIV.

27. Dans la même figure 23, *ſi vous tirez la ligne PO, au foyer, le parametre du diametre vaudra quatre fois cette ligne.* PO étant égale à NO (*n.* 15.), eſt par conſéquent plus grand que NS, de la valeur de SO, ou du quart du parametre de l'axe. Donc $4NO$, valent $4NS$, plus le parametre de l'axe, & par conſéquent $4NO = q$.

## COROLLAIRE XV.

28. Tout ce que nous avons dit dans les Corollaires précédens de l'axe & d'un diametre, de leurs tangentes, & des figures qu'elles forment, de même que des paralleles qu'on peut tirer à ces tangentes d'un point de la parabole, doit s'entendre auſſi de deux diametres & de leurs tangentes, ou des paralleles à ces tangentes.

Soient donc les diametres AB, CD (*Fig.* 24.), avec leurs tangentes AH, CE, & leurs ordonnées AP, CI, tirées des points d'attouchement A, C; ces diametres seront paralleles entr'eux (*n.* 23.) étant paralleles à l'axe, je joints les points d'attouchement par la droite AC, que je coupe en deux parties égales au point *r*, & du point O, où les tangentes se coupent, je mene par le point *r*, la droite indéfinie OM. Du point S, où cette droite coupe la courbe, je mene les ordonnées SN, SQ, aux deux diametres, & je joints leurs extrêmitez N, Q, par la droite NQ; les triangles OAC, NSQ, étant semblables, on a NM, MQ :: Ar. rC. Donc NM = MQ; donc les deux lignes AC, MN, sont coupées chacune en deux également par la droite OM, qui par conséquent est leur diametre. Ainsi OM est parallele aux diametres AB, CD. Je mene par le point O, la perpendiculaire *mn* entre ces deux diametres, & comme AC est coupée en deux également par la parallele OM, la droite *mn*, est aussi coupée en deux également par la même parallele. Maintenant les triangles semblables BXA, COH, ayant le côté BA, égal au côté CH, à cause des paralleles AH, BC, ils sont égaux entr'eux; donc leurs hauteurs *u*X, O*n*, sont égales; & par conséquent *u*X = *m*O; donc la parallele OX, passe par le sommet X du triangle BXA, ou par l'angle X du parallelograme XAOC. Donc à cause des paralleles AH, BC, la droite OX, est égale à chacune des droites AB, CH, & à cause des paralleles AE, DC, la même droite OX, est égale à chacune des droites AE, DC; donc les quatre lignes AB, CH, AE, CD, sont égales entr'elles.

Donc 1°. la partie EA de la soutangente EB, est égale à l'abscisse AB, & la partie HC de la soutangente HD, est égale à l'abscisse CD. 2°. Les triangles semblables AEO, COH, sont égaux à cause de AE = CH. 3°. Le parallelograme ABHC, est égal au triangle BCE, & le parallelograme AECD, égal au triangle AHD. 4°. Le parallelograme ABCH, est égal au parallelograme AECD, & le triangle BEC, égal au triangle AHD.

Donc 5°. si d'un point R, pris sur la parabole (*Fig.* 25.), on tire une parallele à chaque tangente, le triangle VRS, fait par ces deux paralleles, & par l'un des diametres HI, est égal au parallelograme SCET, fait par la tangente de ce diametre & sa parallele compriſes entre les deux diametres; car les triangles semblables HAK, VRS, sont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez homologues AK, RS, ou comme CK, CS, ou enfin comme

les parallelogrames KAEC, STEC, lesquels étant entre mêmes paralleles, sont entr'eux comme leurs bases CK, CS; mais le triangle HAK, est égal au parallelograme KAEC; donc le triangle VRS, est égal au parallelograme SCET.

Donc 6°. le triangle XVC, fait par l'une des paralleles avec un diametre HI & sa tangente, est égal au trapezoïde XETR, fait par la même tangente & sa parallele compriſes entre l'autre diametre & la premiere parallele; car puisque VRS, est egal à SCET, ôtant de part & d'autre la partie commune SCXR il restera VXC = XETR.

On prouvera de même que TRP = PAHV, & TZA = RZHV.

Si le point par où on tire les deux paralleles; n'étoit pas entre les deux diametres, mais qu'il fût, par exemple, en L, alors les triangles BEC, LBD, étant semblables, & ayant de plus le côté LB, égal au côté BC, seroient parfaitement égaux; c'est pourquoi ajoûtant à chacun d'eux la partie commune BCID, le triangle LCI, fait par les deux paralleles, & le diametre CI, seroit encore égal au parallelograme DICE, fait par la tangente du même diametre & sa parallele compriſes entre les deux diametres. De même le triangle LBD, fait par les deux paralleles, & le diametre AD, étant égal au triangle EBC, seroit par conséquent aussi égal au parallelograme AHCB, fait par la tangente de ce diametre & sa parallele compriſes entre les deux diametres.

Que si les deux paralleles n'avoient aucun point qui tombât entre les deux axes, ou sur un point d'attouchement (*Fig. 26.*), alors les triangles LXD, VXT, étant semblables & égaux à cause de LX, égal à XT, si on ajoûtoit à chacun d'eux la partie XKID, on auroit le triangle LKI, égal au parallelograme DVRI, joint au triangle RTK; mais le triangle RTK, est semblable & égal au triangle ZOR, à cause de OR, égal à RT, & ce triangle est égal au parallelograme RCEV; donc on auroit le triangle LKI, fait par les deux paralleles & le diametre CI, égal au parallelograme DECI, fait par la tangente de ce diametre, &c. De même le triangle LXD, fait par les deux paralleles, & le diametre AD, étant égal au triangle VTX, seroit par conséquent égal au trapezoïde ECKX, & ôtant de ce trapezoïde le triangle ESA, & lui donnant le triangle HSC, égal à ESA, le triangle LXD, seroit égal à AHKX. Ce qui fait voir que la propoſition est vraye dans tous les cas.

## COROLLAIRE XVI.

29. *Si par deux points N, I, (Fig. 27.), pris sur la courbe entre deux diametres, on tire des paralleles aux deux tangentes le trapezoïde LIQZ, fait par deux de ces paralleles compriſes entre le diametre CD, & la parallele XI, la plus proche de ce diametre, eſt égal au trapezoïde LNPX, fait par les deux autres paralleles compriſes entre l'autre diametre AB, & la parallele ZN, la plus proche de ce diametre.* Le triangle ZEC, eſt égal au trapezoïde ENPB, par le Corollaire précédent, & par la même raiſon le triangle QKC, eſt égal au trapezoïde KIXB; mais le triangle ZEC, ſurpaſſe le triangle QKC du trapezoïde ZEKQ; donc le trapezoïde ENPB, ſurpaſſe le trapezoïde KIXB, du même trapezoïde ZEKQ; donc les deux enſemble KIXB, ZEKQ, ſont égaux à ENPB, & ôtant de part & d'autre le trapezoïde commun ELXB, on aura LNPX = LIQZ.

En ſecond lieu, ſi on ajoûte à l'un & à l'autre de ces trapezoïdes le parallelograme commun NLIO, on aura le trapezoïde OPXI, fait par deux paralleles compriſes entre un diametre AB, & la parallele OQ, la plus éloignée de ce diametre, égal au trapezoïde ONZQ, fait par les deux autres paralleles compriſes entre l'autre diametre & la parallelele OP, qui en eſt la plus éloignée.

Cette propoſition n'eſt vraye que lorſque les deux points deſquels on tire les paralleles, ſont entre les deux diametres; auſſi ne tient-elle place ici que pour ſervir de Lemme aux Corollaires ſuivans.

## COROLLAIRE XVII.

30. *Si d'un point I, pris ſur la courbe entre deux diametres* (Fig 28), *on tire une ordonnée IZ, à l'un des diametres EB, & qu'on prolonge cette ordonnée juſqu'à ce qu'elle rencontre en H, la tangente de l'autre diametre, le rectangle de toute la ligne ZH, par la partie IH, compriſe entre la parabole & la tangente, eſt au quarré de la partie HC, qu'elle coupe ſur la tangente, comme le quarré de AS, au quarré de SC, leſquelles AS, SC, ſont les parties des tangentes compriſes entre leurs diametres & leur point S de rencontre.*

La ligne ZI, étant diviſée en deux également en E, & la ligne IH lui étant ajoûtée, le rectangle de la toute ZH, par l'ajoûtée HI, plus le quarré de la moitié EI, eſt égal au quarré de EH (*Partie* 1. *n.* 238.); or le quarré de EH, eſt au quarré de EI,

comme le triangle EHB, au triangle EIT, qui lui eſt ſemblable ; donc par converſion de raiſon le quarré de EH, moins le quarré de EI, eſt au quarré de EH, comme le triangle EHB, moins le triangle EIT ; c'eſt-à-dire comme le trapezoïde IHTB, au triangle EHB ; mais le quarré de EH, moins le quarré de EI, eſt égal au rectangle ZH×HI; donc ZH×HI. $\overline{EH}^2$ :: IHTB. EHB, & *permutando* ZH×HI. IHTB :: $\overline{EH}^2$. EHB. or le triangle ABS, étant ſemblable au triangle EHB, on a $\overline{EH}^2$. EHB :: $\overline{AS}^2$. ASB. Donc ZH×HI. IHTB :: $\overline{AS}^2$. ASB. mais le trapezoïde IHTB, eſt égal au triangle CHR, par les Corollaires précédens, & le triangle ASB, eſt égal au triangle CSD ; donc ZH×HI. CHR :: $\overline{AS}^2$. CSD, & mettant au lieu des triangles CHR, CSD, les quarrez $\overline{CH}^2$, $\overline{CS}^2$, de leurs baſes qui ſont en même raiſon, on aura ZH×HI. $\overline{CH}^2$ :: $\overline{AS}^2$. $\overline{CS}^2$.

Ceci eſt encore vrai, lorſque le point I, eſt pris hors des deux diametres (*Fig.* 29.) ; car alors les triangles ſemblables RQO, & OPI ſont égaux, à cauſe de QO = OI, & comme le triangle RQO, eſt égal au parallelograme OCTB, le triangle OPI, eſt par conſéquent auſſi égal à ce parallelograme ; ainſi ajoûtant de part & d'autre le trapezoïde IHOC, le triangle CPH, eſt égal au trapezoïde IHTB ; or le rectangle ZH×HI, eſt au trapezoïde IHTB, comme le quarré de AS, au triangle ASB, ou à ſon égal CSD ; donc ZH×HI. PCH :: $\overline{AS}^2$. CSD, & mettant au lieu des triangles PCH, CSD, les quarrez $\overline{CH}^2$. $\overline{SC}^2$. de leurs côtez hòmologues, on a ZH×HI. $\overline{CH}^2$ :: $\overline{AS}^2$. $\overline{SC}^2$.

## COROLLAIRE XVIII.

31. *Deux diametres AB, CD, étant donnés* (Fig. 30.), *avec leurs tangentes AD, CB, ſi de deux points M, N, pris ſur la courbe, on tire deux lignes droites MQ, NH, dont l'une ſoit ordonnée à un diametre, & l'autre à l'autre diametre, en ſorte qu'elles ſe coupent en X, le rectangle XM×QX des parties de l'une, eſt au rectangle XN×HX des parties de l'autre, comme le quarré de la tangente parallele à la premiere au quarré de la tangente parallele à la ſeconde, entendant ici par les*

*les tangentes les lignes OC, OA, compriſes entre les points d'attouchement & le point O, où elles ſe rencontrent.*

Apollonius, & les autres Géometres n'ont démontré cette propoſition que pour le cas où les deux points M, N, ſe trouvent entre les deux diametres; d'où ils ont tiré cette regle générale que, *lorſque deux lignes ſe croiſent dans la parabole, les rectangles de leurs parties ſont entr'eux comme les quarrez des tangentes de leurs diametres.* Ce qui eſt vrai non ſeulement pour la parabole, mais encore pour l'ellipſe & l'hyperbole, comme on verra dans la ſuite. Cependant comme il peut arriver que l'un des deux points ne ſoit pas entre les diametres, ou que tous les deux ſe trouvent dehors, je donnerai ici la démonſtration de ces trois cas, afin que les Commençans ne s'y trouvent pas embaraſſés.

En premier lieu donc, ſi les deux points M, N, ſont entre les deux diametres, je tire de ces points les paralleles MV, NT, aux tangentes des diametres oppoſés. Cela fait, comme l'ordonnée MQ, eſt coupée en deux également en S, & en deux inégalement en X, le rectangle XQ×MX des parties inégales, plus le quarré de la partie XS, eſt égal au quarré de MS (*Partie* 1. *n.* 287.); mais le quarré de MS, eſt au quarré de XS, comme le triangle MSV, au triangle XSE; donc par converſion de raiſon $\overline{MS}^2 - \overline{XS}^2$, ou XQ×MX. $\overline{MS}^2$:: MSV—XSE. ou MXEV. MSV. & *permutando*, XQ×MX. MXEV :: $\overline{MS}^2$. MSV; c'eſt-à-dire le rectangle des parties inégales eſt au trapezoïde MXEV, comme le quarré de MS au triangle MSV. mais $\overline{MS}^2$. MSV :: $\overline{OC}^2$. OCD. à cauſe des triangles ſemblables MSV, OCD, donc XQ×MX. MXEV :: $\overline{OC}^2$. OCD; or le trapezoïde MXEV eſt égal au trapezoïde XNTF (*n.* 29.), & le triangle OCD, eſt égal au triangle OAB; donc XQ×MX. XNTF :: $\overline{OC}^2$. AOB, & *permutando*, XQ×MX. $\overline{OC}^2$:: XNTF. AOB.

On démontrera de même que XH×NX. XNTF :: $\overline{AO}^2$. AOB. & *permutando* XH×NX. $\overline{AO}^2$:: XNTF. AOB. Puis donc que nous avons XQ×MX. $\overline{OC}^2$:: XNTF. AOB, & XH×NX. $\overline{AO}^2$:: XNTF. AOB, il s'enſuit que XQ×MX. $\overline{OC}^2$:: XH×NX.

$\overline{AO}^2$, & *permutando*, XQ×MX. XH×NX :: $\overline{OC}^2$. $\overline{AO}^2$.

En second lieu si l'un des points Q (*Fig.* 31.), n'est pas entre les diametres, & que l'autre point X, s'y trouve; de l'extrêmité M, de l'ordonnée XM, je tire la parallele MZ, à la tangente CB, cela fait, de même que dans le cas précédent, le rectangle QT×TP, des parties inégales de l'ordonnée QP, est au trapezoïde QTVF, comme le quarré de QO, au triangle QOF, ou comme le quarré de GC, au triangle GCD, ou enfin comme le quarré de GC, au triangle GAB, & le rectangle MT×TX, des parties inégales de l'ordonnée MX, est au trapezoïde MTSZ, comme le quarré de MR au triangle MRZ, ou comme le quarré de AG, au triangle GAB, à cause de la similitude des triangles MRZ, GAB. Ainsi tout consiste à faire voir que le trapezoïde QTVF, est égal au trapezoïde MTSZ; & pour cela donnons à chacun de ces trapezoïdes le triangle commun TRS; car s'ils se trouvent égaux avec ce triangle, ils seront aussi égaux en le leur ôtant; or le triangle QIS, étant semblable & égal au triangle INLI, à cause de QI, égal à IN, & ce triangle étant égal au parallelograme AIFD, il s'ensuit que le trapezoïde QTVF, joint au triangle TSR, est égal au parallelograme RADV.

De même le triangle MRZ, étant semblable & égal au triangle REX, & ce triangle étant égal au parallelograme RAVD, il s'ensuit que le trapezoïde MTSX, joint au triangle TSR, est aussi égal au parallelograme RADV. Donc les deux trapezoïdes sont égaux; & par conséquent le rectangle QT×TP, étant à son trapezoïde, comme le quarré de GC, au triangle AGB, & le rectangle MT×TX, à son trapezoïde, comme le quarré de AG, au même triangle AGB, on aura QT×TP. MT×TX :: $\overline{GC}^2$. $\overline{AG}^2$, en suivant le raisonnement que nous avons fait pour le premier cas.

En troisiéme lieu, si les deux points X, Z (*Fig.* 32.), sont tous deux hors des diametres, le trapezoide fait sur la partie inégale de l'ordonnée MZ, sera GEIZ, & le trapezoïde fait sur la partie inégale de l'ordonnée XN, sera GFKX, & il s'agit de prouver que ces deux trapezoides sont égaux; or le triangle VZF, étant égal au triangle POV, lequel est égal au rectangle VCIB, si on ôte du trapezoïde GEIZ, le triangle VZF, en lui donnant VCIB, ce trapezoïde sera égal à la figure GFCBE.

De même le triangle EXT, étant égal au triangle THQ, le-

quel eſt égal au parallelograme TADK, ſi on ôte du trapezoïde GFKX, le triangle EXT, en lui donnant TADK, ce trapezoïde ſera égal à la figure GFDAE, & ôtant de cette figure le triangle DSC, & lui donnant ASB, égal à DSC, ce trapezoïde ſera auſſi égal à la figure GFCBE. Ainſi les deux trapezoïdes ſeront égaux; & par conſéquent on conclura de même que $XE \times EN. ZF \times FN :: \overline{SC}^2. \overline{AC}^2$.

## PROBLEME III.

32. *Le parametre d'une parabole étant donnée, décrire cette parabole* (Fig. 16.).

Tirez une ligne droite indéfinie CR, prenez le quart du parametre, & portez-le de C en S, & de S en O. Puis du point C, tirez AB, perpendiculaire à CR; en ſorte que AC, ſoit égal à CB. Diviſez AC en parties égales aux points D, D, D, &c. & décrivez la parabole PSV, comme il a été dit (*n.* 10.), & cette parabole aura pour parametre, le parametre donné, puiſque la diſtance de ſon ſommet S, à ſon foyer O, ſera égale au quart de ce parametre.

## PROBLEME IV.

33. *Connoiſſant un abſciſſe ST* (Fig. 16.), *& ſon ordonnée PT d'une parabole, décrire cette parabole.*

Prenez une troiſiéme proportionnelle à l'abſciſſe ST, & à l'ordonnée PT, & cette proportionnelle ſera le parametre de la parabole, puiſque le quarré de PT, ſera égal au rectangle de ST, par cette proportionnelle; c'eſt pourquoi vous prendrez le quart de ce parametre, que vous porterez de S en O, & de S en C, après avoir prolongé l'abſciſſe ST; enſuite vous éleverez ſur le point C, la perpendiculaire AB, & il vous ſera facile de décrire la parabole demandée par les regles du premier Probleme.

## PROBLEME V.

34. *Connoiſſant la tangente NP d'une parabole* (Fig. 20.), *& ſa ſoutangente NT, décrire la parabole.*

Faites un triangle rectangle, dont NP, ſoit l'hypotenuſe, & NT, l'un des côtez; ce qui ſe fait en décrivant un demi-cercle autour de NP, & portant ſur ce demi-cercle la corde NT, & joignant enſuite TP, qui ſera par conſéquent ordonnée à l'axe;

c'eſt pourquoi vous partagerez NT, en deux parties égales au point S, qui ſera le ſommet de la parabole, puiſque la ſoutangente eſt double de l'abſciſſe (*n.* 17.), & connoiſſant alors l'abſciſſe ST, & l'ordonnée PT, vous trouverez aiſément le parametre par le Probleme précédent, &c.

Que ſi vous connoiſſiez ſeulement la ſou-perpendiculaire FM, d'une tangente (*Fig.* 19), il ſeroit encore plus aiſé de trouver la parabole, puiſque cette ſou-perpendiculaire eſt la moitié du parametre (*n.* 18.).

## PROBLEME VI.

35. *Une parabole ABC, étant donnée, trouver ſon axe* (Fig. 33.).

Tirez dans la parabole des lignes paralleles AB, EH, diviſez-les chacune en deux parties égales aux points I, L, & tirez une droite RL, qui paſſe par les points de diviſions; ſi RL, eſt perpendiculaire aux lignes AB, EH, elle ſera l'axe de la parabole; mais ſi elle ne l'eſt pas, elle ſera ſimplement un diametre. Or comme les diametres de la parabole ſont paralleles à l'axe (*n.* 23.), vous tirerez des lignes RS, PC, perpendiculaires à ce diametre, & diviſant ces lignes en deux également aux points Q, O, vous tirerez la droite BO, qui ſera l'axe demandé, parce qu'elle ſera perpendiculaire ſur ces lignes, & qu'elle les diviſera en deux également.

## PROBLEME VII.

36. *Une parabole ABC, étant donnée* (Fig. 33.), *trouver ſon parametre.*

Ayant trouvé ſon axe par le Probleme précédent, & tiré une ordonnée QR, la troiſiéme proportionnelle à l'abſciſſe BQ, & à l'ordonnée QR, ſera le parametre.

Ou bien par le point R, tirez une tangente RT, & une perpendiculaire RO à cette tangente, & la ſouperpendiculaire OQ, ſera la moitié du parametre (*n.* 18.).

Ou bien au point d'attouchement R, faites avec la tangente l'angle TRX, égal à l'angle LRZ, que la même tangente fait avec ſon diametre, & le point X, où la ligne RX, rencontrera l'axe, ſera le foyer de la parabole (*n.* 16.) & par conſéquent BX, ſera le quart du parametre (*n.* 10.).

Ou bien enfin ayant trouvé l'axe BO, comme ci-deſſus (*Fig.* 34.) tirez par le ſommet B, la ligne BK, perpendiculaire à l'axe,

diviſez l'angle OBG, en deux parties égales par la ligne BG, & du point G, où cette ligne coupera la parabole, tirez l'ordonnée GO, & la ligne GK, perpendiculaire à BK, la figure OBKG, ſera un quarré parfait; car dans le triangle rectangle OBG, l'angle OBG, étant demi-droit, l'angle BGO, ſera auſſi demi-droit; ainſi OG, ſera égal à OB: & comme à cauſe des paralleles la droite OB, eſt égal à GK, & OG à BK, il s'enſuit que OBKG, eſt un quarré; donc le quarré de OG, eſt égal au quarré de OB: mais par la proprieté de la parabole, le quarré de OG, eſt égal à OB, multiplié par le parametre; donc OB, multiplié par le parametre, eſt égal au quarré de OB, ou à OB, multiplié par OB; & par conſéquent le parametre eſt égal à OB.

## PROBLEME VIII.

37. *Une portion AEH de parabole étant donnée* (Fig. 33.), *continuer la parabole.*

Tirez des lignes paralleles dans cette portion, & les ayant diviſées en deux parties égales, tirez le diametre RL, & la ligne RT, paralleles aux ordonnées, ſera tangente au point R, puiſque les ordonnées ſont toujours paralleles à la tangente, qui paſſe par les ſommet de leur diametre (*n.* 23.). Faites au point R l'angle XRT, égal à l'angle LRZ; puis cherchant une troiſiéme proportionnelle à l'ordonnée IH, & à l'abſciſſe RI, laquelle ſera le parametre du diametre RL (*n.* 25.) faites RX, égale au quart de ce parametre; & le point X ſera le foyer de la parabole (*n.* 27.); c'eſt pourquoi tirant par X, la ligne TQ, parallele au diametre, vous aurez l'axe, & diviſant ſa partie TQ, compriſe entre la tangente RT, & l'ordonnée RQ, tirée du point d'attouchement R, en deux parties égales en B, le point B ſera le ſommet de la parabole (*n* 17.), & BX, ſera le quart de ſon parametre (*n.* 10.). Ainſi il vous ſera facile de continuer cette parabole tant qu'il vous plaira.

## PROBLEME IX.

38. *Une parabole ABC* (Fig. 33.), *étant donnée, trouver un diametre qui faſſe avec ſes ordonnées un angle égal à un angle donné.*

Faites au ſommet B de l'axe un angle ABO, égal à l'angle donné, tirez des lignes paralleles à la ligne AB, & les ayant diviſées en deux parties égales, tirez le diametre RL, lequel ſera avec ſes ordonnées l'angle EIL, égal à l'angle donné ABO, ce

qui eſt évident, les lignes RL, BO, étant paralleles.

## PROBLEME X.

39. *Meſurer une parabole terminée par une double ordonnée AOG* (Fig. 34.).

Du ſommet B, tirez SK, parallele à AG, & des points A & G, tirez AS, GK, paralleles à l'axe, la parabole ſera les deux tiers du rectangle ASKG.

## DEMONSTRATION.

Si de tous les Elemens de l'axe on conçoit des ordonnées tirées à la demi-parabole ABO, la ſomme de ces ordonnées ſera égale à l'aire de la demi-parabole ; or les quarrez des ordonnées ſont entr'eux comme leurs abſciſſes, leſquelles ſont entr'elles comme la ſuite infinie 0. 1. 2. 3. 4. &c. donc les quarrez des ordonnées ſont entr'eux comme ces nombres; & par conſéquent leurs racines, c'eſt-à-dire les Elemens de la parabole ſont entr'eux comme les racines de ces mêmes nombres; mais la ſomme des racines des nombres 0. 1. 2. 3. &c. eſt à la plus grande racine multipliée par le nombre des termes, comme 2. eſt à 3. (*Part. 2. n.* 238.). Donc la ſomme des ordonnées eſt à la plus grande ordonnée AO, multipliée par le nombre des termes OB, ou au rectangle AOBS, comme 2. eſt à 3. la demi-parabole ABO, eſt donc égale aux deux tiers du rectangle AOBS, & par la même raiſon la demi-parabole OBG, eſt égale aux deux tiers de OBKG ; donc la parabole entiere eſt égale aux deux tiers du rectangle total ASKG.

## COROLLAIRE I.

40. Donc l'eſpace mixtiligne ASKGB, eſt égal au tiers du parallelograme ASKG.

## COROLLAIRE II.

41. Si du ſommet B, on tire la droite BG, à l'extrêmité de l'ordonnée OG, le triangle OBG, ſera la moitié ou les $\frac{1}{6}$, du rectangle OBKG ; or la demi-parabole eſt les deux tiers ou les $\frac{2}{3}$, du même rectangle ; donc la demi-parabole eſt au triangle comme 4. à 3. & le ſegment BVTG, eſt à la demi-parabole comme 1. à 4, au triangle comme 1. à 3, & au rectangle comme 1 à 6.

## COROLLAIRE III.

42. Si de l'extrêmité A d'une ordonnée AO, qui termine une demi parabole ABO (*Fig.* 35.) on tire une tangente AD, la demi-parabole ſera égale aux deux tiers du triangle ADO; car ce triangle eſt égal au rectangle AEBO (*n.* 20.), & la demi-parabole eſt égale aux deux tiers de ce rectangle.

## COROLLAIRE IV.

43. Donc dans la même figure l'eſpace mixtiligne BEAR, eſt égal au tiers du triangle ADO, ou du rectangle AEBO.

## PROBLEME XI.

44. *Meſurer un ſegment BSC d'une parabole ABC.* (Fig. 35.).

Cherchez le diametre SV, qui coupe la baſe BC, en deux parties égales; du ſommet S de ce diametre, tirez ſur BC, la perpendiculaire ST, & multipliant BC par ST, prenez les deux tiers du produit pour l'aire du ſegment BSC.

## DEMONSTRATION.

Si on conçoit que de tous les Elemens de la ligne TS, on tire des paralleles à la baſe BC, ces paralleles ſeront ordonnées au diametres SV, & leur ſomme ſera égale à l'aire du ſegment; or les quarrez de ces doubles ordonnées ſeront entr'eux comme les abſciſſes du diametre, & à cauſe du triangle TSZ, les abſciſſes du diametre ſont entr'elles comme les abſciſſes de la perpendiculaire TS; c'eſt-à-dire comme 0. 1. 2. 3. &c. à l'infini; donc les racines de ces quarrez, c'eſt-à-dire les ordonnées, ſont entr'elles comme les racines de ces nombres; & par conſéquent leur ſomme eſt à la plus grande priſe autant de fois, c'eſt-à-dire au parallelograme BHIC, comme 2 à 3 (*Part.* 2. *n.* 240.); mais le parallelograme BHIC, eſt égal à un rectangle, qui auroit pour baſe la baſe BC, & pour hauteur la perpendiculaire ST. Donc le ſegment eſt égal aux deux tiers de ce rectangle.

## LEMME.

45. *Deux diametres AB, DC, étant donnés* (Fig. 36.), *avec leurs tangentes AE, CE; ſi l'on joint les points d'attouchement par une droite AC, & qu'ayant diviſé AC en deux également en O, on tire la*

*ligne OE au point E, où les tangentes se coupent, cette ligne sera un diametre de la parabole, & toutes les lignes paralleles à AC, comme GH seront ses doubles ordonnées.*

### DEMONSTRATION.

Si on veut que le diametre de la ligne AC, soit une autre ligne OF, je tire du point F, où elle rencontre l'une des tangentes, la ligne droite FA, qui coupera la parabole, ou du côté de G, ou du côté de F, puisque AE, étant tangente, la ligne FA, qui passe par le point d'attouchement A, ne sçauroit être aussi tangente. Supposant donc qu'elle coupe la parabole du côté de G, je tire GH, parallele à AC, & je prolonge FO en I; donc GH est coupée en deux également en I, puisqu'on suppose que FI est son diametre; mais comme FA, coupe la parabole, elle rencontrera nécessairement l'ordonnée GH, en un point P en-dedans de la parabole; & à cause des triangles semblables AFO, PFI, & OFC, IHD, on aura PI. IH :: AO. OC. & par conséquent PI, sera égal à IH; donc GI, sera plus grand que IH, & FI, ne sera pas le diametre de GH, ni de ses paralleles.

Que si la ligne AF, coupe la parabole du côté de F (*Fig. 37.*); je tire de ce côté l'ordonnée GH, & par la supposition GH, sera coupée en deux également en I, par le diametre FO; mais à cause des triangles semblables, on aura encore PI. IH :: AO. OC. donc PI, est egal à IH, & par conséquent GI, est plus grand que IH; donc FO, n'est pas le diametre de GH, ni de ses paralleles.

### COROLLAIRE I.

46. Donc la ligne EO, qui part du point où les tangentes se rencontrent & qui coupe la ligne AC, en deux également, est parallele aux deux diametres, puisque tous les diametres d'une parabole sont paralleles entr'eux.

### COROLLAIRE II.

47. Donc si une ligne EO, qui part du point où les tangentes se coupent, est parallele aux deux diametres, elle est aussi un diametre, puisque de ce même point on ne peut tirer d'autres paralleles, & les doubles ordonnées de ce diametre, sont la ligne AC, & ses paralleles.

PROBL.

## PROBLEME XII.

48. *Un ſegment ACGB de parabole étant donné* (Fig. 38.), *& un diametre PT, faire avec ce diametre un autre ſegment égal au ſegment donné.*

Cherchez le diametre GV, du ſegment donné, & prenant ſa partie GI, compriſe entre ſon ſommet & ſa baſe AB, faites PH, égal à GI, & par le point H, tirez une double ordonnée DC, au diametre PH, le ſegment DPC, ſera égal au ſegment donné AGB.

### DEMONSTRATION.

Il peut arriver que les baſes AB, CD, des ſegmens, ſe coupent dans la parabole, ou hors de la parabole, ou ſur le perimetre de la parabole. Nous allons donner la démonſtration de ces trois cas.

Si les baſes ſe coupent en-dedans (*Fig.* 38.), tirez les tangentes PE, GE, & joignant les droites PG, HI, AC, DB, tirez par le point E, où les tangentes ſe rencontrent, la ligne EO, parallele aux diametres, laquelle par le Lemme précédent, ſera un diametre, & coupera la ligne PG, en deux parties égales, de même que la ligne HI, qui eſt égale & parallele à la ligne PG, à cauſe de PH, GI, qui ſont paralleles & égales.

Cela poſé, les triangles FEG, HKI, étant ſemblables, & ayant de plus la baſe PG, égale à la baſe HI, ſont entierement égaux; ainſi PE, étant égal à HK, le diametre EO, parallele au diametre PT, paſſe néceſſairement par les deux ſommets E, K, de ces triangles. Puis donc que la ſimilitude des triangles donne HK. PE :: IK. GE. on a auſſi $\overline{HK}^2$. $\overline{PE}^2$ :: $\overline{IK}^2$. $\overline{GE}^2$. Mais les baſes AB, CD, des ſegmens étant coupées en deux également aux points H, I, & en deux inégalement au point K, on a CK×KD. $\overline{PE}^2$ :: AK×KB. $\overline{GE}^2$. (*n.* 31.) donc CK×KD. $\overline{HK}^2$ :: AK×KB. $\overline{IK}^2$. & *componendo* CK×KD + $\overline{HK}^2$. ou $\overline{HC}^2$. ou $\overline{DH}^2$. $\overline{HK}^2$ :: AK×KB + $\overline{IK}^2$. c'eſt-à-dire $\overline{AI}^2$. ou $\overline{IB}^2$. $\overline{IK}^2$. puis donc que $\overline{DH}^2$. $\overline{HK}^2$ :: $\overline{IB}^2$. $\overline{IK}^2$. on a auſſi DH. HK :: IB. IK. & par conſéquent la ligne DB, eſt parallele à la ligne HI; or DH, étant égal à HC,

de même que BI à AI, on a auſſi $\overline{HC}^2$. $\overline{HK}^2$ :: $\overline{AI}^2$. $\overline{IK}^2$. & HC. HK :: AI. IK. & *dividendo*, HC — HK, ou KC. HK :: AI — IK, ou AK. IK ; d'où il ſuit que la ligne AC, eſt parallele à HI, puiſque l'angle KHI, eſt égal à l'angle alterne KCA, à cauſe de la ſimilitude que nous venons de trouver dans les triangles AKC, HKI. Les lignes AC, DB, étant donc paralleles à HI, ou à PG, ſont ordonnées au diametre, & coupées en deux également. Ainſi tirant les lignes PD, GB, le trapezoïde PDGB, ſera diviſé en deux parties égales, par le diametre EO, qui coupe les côtez paralleles en deux parties égales, de même que le trapezoïde DHIB. Otant donc du trapezoïde PDGB, le trapezoïde DHIB, & le rectangle PHIG, il reſtera d'un côté le triangle PHD, égal au triangle GIB ; donc la baſe DH du premier, eſt à la baſe IB du ſecond réciproquement comme la hauteur du ſecond eſt à la hauteur du premier, & doublant les baſes, DC eſt à AB, comme la hauteur du ſecond triangle à la hauteur du premier. Mais les hauteurs de ces triangles ſont les mêmes que les hauteurs des ſegmens ; donc les ſegmens ont les baſes réciproques aux hauteurs, & comme les rectangles faits ſous ces baſes & ces hauteurs ſont égaux entr'eux. Donc les ſegmens qui ſont les deux tiers de ces rectangles ſont auſſi égaux.

### *Second Cas.*

Si les baſes AB, CD, des ſegmens (*Fig.* 39.), ſe rencontrent en un point R, hors de la parabole, alors les lignes AR, CR, étant ajoûtées aux lignes AB, CD, qui ſont coupées en deux également, on aura RB×AR. $\overline{HA}^2$ :: RD×CR. $\overline{CI}^2$,* & *componendo*, RB×AR + $\overline{HA}^2$. ou $\overline{HR}^2$. $\overline{HA}^2$ :: RD×CR + $\overline{CI}^2$. ou $\overline{RI}^2$. $\overline{CI}^2$. ou $\overline{RH}^2$. $\overline{BH}^2$ :: $\overline{RI}^2$. $\overline{ID}^2$ ; & par conſéquent HR. BH :: RI. ID ; donc la ligne BD, eſt parallele à la ligne HI ou PG. & comme on a de même $\overline{HR}^2$. $\overline{HA}^2$ :: $\overline{RI}^2$. $\overline{IC}^2$. d'où l'on tire HR. HA :: IR. IC, la ligne AC, eſt auſſi parallele à la ligne HI ; donc le diametre EO coupe les trapezoïdes PGBD, HIBD, en deux parties égales. Ainſi ôtant du grand trapezoïde le trapezoïde HIBD, & le rectangle PHIG, il reſtera le triangle PBH, égal au triangle GID, & le reſte ſe démontrera comme ci-deſſus.

* *Voyez la démonſtration de ceci dans le dernier nombre de cette troiſiéme Partie.*

### *Troiſiéme Cas.*

Si les baſes BA, CD (*Fig.* 40.), ſe rencontrent ſur le perimetre de la parabole, il eſt évident que AH, AB :: CI. CD, & que par conſéquent BD eſt parallele à HI, ou à PG; d'où il eſt aiſé de faire voir que le triangle PHB, eſt égal au triangle GID, &c.

## PROBLEME XIII.

49. *Une parabole ABC* (Fig. 41.), *étant donnée, faire ſur une baſe égale* ac, *une autre parabole qui ſoit en raiſon donnée.*

Suppoſons qu'on veüille que la parabole demandée ſoit à la donnée comme 3. à 2. ſur le milieu *d* de la baſe *ac*, élevez la perpendiculaire *db*, & diviſant l'axe DB, en deux également, vous porterez ſa moitié trois fois de *d* en *b*; cherchez enſuite une troiſiéme proportionnelle aux lignes *dc*, *db*, laquelle ſera le parametre de la parabole demandée, qu'il vous ſera facile de conſtruire.

### DEMONSTRATION.

La parabole ABC, eſt égale aux deux tiers du rectangle qui lui eſt circonſcrit, & la parabole *abc*, eſt auſſi égale aux deux tiers de ſon rectangle; mais ces rectangles ayant même baſe, ſont entr'eux comme 2. à 3. donc les paraboles ſont auſſi entr'elles comme 2. à 3.

### COROLLAIRE.

50. Les paraboles étant entr'elles comme les rectangles circonſcrits, il ſuit que les paraboles qui ont la baſe égale, ſont entr'elles comme leurs hauteurs; celles qui ont la hauteur égale, ſont entr'elles comme leurs baſes; celles qui ont les baſes & les hauteurs inégales, ſont entr'elles en raiſon compoſée de leurs baſes, & de leurs hauteurs; & enfin celles qui ayant leurs baſes & leurs hauteurs inégales, ſont cependant égales, ont leurs baſes reciproques à leurs hauteurs.

## PROBLEME XIV.

51. *Conſtruire ſur une baſe* ac (Fig. 42.), *une parabole qui ſoit à une parabole donnée ABC, comme une ligne GK, à une ligne IL.*

Faites d'abord : comme la baſe *ac*, eſt à la baſe AC, ainſi réci-

proquement la hauteur DB, eſt à une quatriéme proportionnelle *db*, que vous prendrez pour hauteur de la parabole *abc*, laquelle étant conſtruite, ſera égale à la parabole donnée. Faites enſuite : comme la ligne IL, eſt à la ligne GK, ainſi la hauteur *db*, eſt à une quatriéme proportionnelle *d*E, que vous prendrez pour hauteur d'une parabole *a*E*c*, laquelle étant décrite, ſera à la parabole *abc*, ou à la parabole ABC, égale à *abc*, comme GK à IL, puiſque ces deux paraboles ayant la baſe commune *ac*, ſont entr'elles comme leurs hauteurs *db*, *d*E.

## DEFINITION VI.

52. Deux ſections coniques ſont dites *ſemblables*, lorſqu'ayant tiré une baſe dans l'une & dans l'autre les figures rectilignes de même nombre de côtez inſcrites dans ces ſections, ſe trouvent ſemblables.

## PROBLEME XV.

53. *Une parabole ABC* (Fig. 43), *étant donnée, décrire ſur une baſe* ac, *une autre parabole qui lui ſoit ſemblable.*

Diviſez la baſe *ac*, en deux également au point *d*, puis faites : comme DC, eſt à *dc*, ainſi l'axe DB, eſt à une quatriéme proportionnelle *db*, que vous prendrez pour hauteur de la parabole *abc*, laquelle étant conſtruite, ſera ſemblable à la parabole donnée.

## DEMONSTRATION.

Par la nature de la parabole le quarré de $\overline{DC}^2$, eſt égal à DB×BH, c'eſt-à-dire au rectangle de l'abſciſſe par le parametre BH, & de même le quarré $dc = db \times bh$; mais $\overline{DC}^2$, eſt à $\overline{dc}^2$, en raiſon doublée de DC, à *dc*; donc DB×BH, eſt à *db*×*bh*, auſſi en raiſon doublée de DC, à *dc*; mais DB×BH, *db*×*bh*, ſont en raiſon compoſée de DB, à *db*, & de BH, à *bh*, & la raiſon de DB, à *db*, eſt égale à la raiſon de DC à *dc*; donc il faut auſſi que la raiſon de BH à *bh*, ſoit égale à la raiſon de DC, à *dc*, puiſque ces deux compoſantes doivent former une raiſon doublée de DC, à *dc*; donc le parametre BH, eſt au parametre *bh*, comme DC, eſt à *dc*, ou comme DB, à *db*. Cela poſé, ſi vous diviſez, par exemple, les axes DB, *db*, chacun en trois parties égales, & que vous tiriez les ordonnées EG, FM, *eg*, *fm*, & les cordes BG, GM, MC, *bg*, *gm*, *mc*, vous trouverez de même que EG. *eg* :: EB. *eb*, &

que par conſéquent les triangles BEG, *beg*, ſont ſemblables, & par la même raiſon le trapezoïde EFGM, ſera ſemblable au trapezoïde *efgm*, & le trapezoïde FMDC, ſera ſemblable au trapezoïde *fmdc*; d'où il ſuit que la figure inſcrite BGMCD, ſera ſemblable à la figure inſcrite *bgmcd*, & comme on peut faire la même choſe de l'autre côté des paraboles, il s'enſuit encore que ces deux paraboles ſeront ſemblables.

## COROLLAIRE I.

54. *Toutes les paraboles ſont ſemblables.* On peut toujours leur donner des baſes proportionnelles à leurs hauteurs. Donc, &c.

## COROLLAIRE. II.

55. Une figure BGMCD, étant inſcrite dans une parabole ABC, on peut toujours inſcrire une figure ſemblable *bgmcd*, dans une autre parabole ſemblable *abc*; car tirant de tous les angles de la figure les ordonnées EG, FM, DM, à l'axe, on n'a qu'à diviſer l'autre axe proportionnellement aux abſciſſes BE, BF, BD, & tirez les ordonnées *eg*, *fm*, *dc*, & les cordes *bg*, *gm*, *mc*.

## COROLLAIRE III.

56. *Deux ſegmens de parabole qui ont leurs baſes proportionnelles à leurs diamétres compris entre leur ſommet & leur baſe, ſont ſemblables.* On peut leur inſcrire des figures ſemblables de même que ci-deſſus. Donc, &c.

## COROLLAIRE IV.

57. *Les paraboles ſemblables ſont entr'elles comme les quarrez. de leurs baſes ou de leurs hauteurs, ou de leurs parametres, ou des côtez homologues des figures qui leur ſont inſcrites, &c.* Toutes ces lignes ont entr'elles le même rapport; donc, &c. & il en eſt de même des ſegmens ſemblables.

## DEFINITION VI.

58. La parabole dont nous venons d'expliquer les proprietés, s'appelle *parabole quarrée* ou *conique*, parce que c'eſt celle qui ſe forme par la ſection du cone, ou enfin parabole *du premier genre*, pour la diſtinguer de celles qu'on appelle *du ſecond genre*, *du troiſiéme*, *du quatriéme* &c. ce qu'on peut pouſſer à l'infini.

La parabole du ſecond genre eſt celle dont les cubes des ordon-

nées sont entr'eux comme les abscisses correspondantes, celle du troisiéme genre est celle dont les quatriémes puissances des ordonnées sont entr'elles comme les abscisses, & ainsi des autres genres plus élevés.

Quoique ces sortes de paraboles ne soient pas d'usage dans la pratique, nous ne laisserons pas que d'en dire quelque chose pour montrer le rapport & les différences qu'elles ont avec la parabole ordinaire, & de quelle utilité est à leur égard l'Arithmetique des infinis.

## PROBLEME XVI.

59. *Décrire une parabole du second genre du troisiéme, &c.* (Fig. 44).

Pour décrire une parabole du second genre, prenez une ligne AB, que vous couperez en deux également en C, où vous éleverez la perpendiculaire indéfinie CN. Divisez la moitié CB, en parties égales CD, DE, EF, &c. aux points D, E, F, G, &c. élevez les perpendiculaires DH, EI, FK, GL, &c. qui soient entr'elles comme les cubes 1. 8. 27. 64. 125. &c. des nombres naturels 1. 2. 3. 4. &c. par les extrêmitez I, K, L, &c. de ces lignes faites passer une courbe CHIKLM; & faisant la même chose de l'autre côté CA, vous aurez la courbe PSCHIKLM, qui sera une parabole cubique; car tirant les ordonnées H*x*, I*a*, K*b*, L*c*, MN, ces ordonnées seront entr'elles comme les lignes CD, CE, CF, CG, &c. c'est-à-dire comme les nombres 1. 2. 3. 4. &c. & les abscisses C*x*, C*a*, C*b*, C*c*, CN, seront entr'elles comme les cubes de ces mêmes nombres, puisqu'elles seront égales aux lignes DH, EI, FK, &c. chacune à chacune, à cause des paralleles; donc les cubes des ordonnées seront entr'elles comme les abscisses, & par conséquent la parabole sera une parabole cubique, ou du second genre.

De même pour décrire une parabole du troisiéme genre, on prendra DH, EI, FK, GL, &c. qui soient entr'elles comme les quatriémes puissances des nombres 1. 2. 3. 4. &c. & alors les quatriémes puissances des ordonnées seront entr'elles comme leurs abscisses; & par conséquent la parabole sera une parabole quarré-quarrée, ou du troisiéme genre, & ainsi des autres.

## PROBLEME XVII.

60. *Trouver le parametre des paraboles du second genre, du troisiéme, &c.* (Fig. 44).

Faites au sommet C, un angle RCS de 45 degrez, & par le

point S, où la jambe CS, coupe la parabole, tirez SR parallele à l'axe, & l'ordonnée SY, la figure SRCY, ſera un quarré parfait, comme il eſt aiſé de le démontrer ; donc le cube de SY, eſt égal au cube de CY ; mais comme dans la parabole ordinaire, le quarré d'une ordonnée eſt égal au rectangle de ſon abſciſſe par ſon parametre, de même dans la parabole cubique, le cube de l'ordonnée SY, doit être égale au ſolide de ſon abſciſſe par ſon parametre qui doit être un plan, & ce ſolide, comme on vient de voir, doit être égal au cube de SY ; donc ce ſolide ne peut être que le produit de CY, par ſon quarré $\overline{CY}^2$, & par conſéquent $\overline{CY}^2$, doit être le paramêtre de la parabole cubique.

Que ſi la parabole eſt du troiſiéme genre, alors le parametre eſt égal à la troiſiéme puiſſance de CY, parce que la quatriéme puiſſance de l'ordonnée SY, eſt égale à la quatriéme puiſſance de CY, & que d'un autre côté la quatriéme puiſſance de SY, eſt égal au produit de CY, par le parametre, & de même pour les paraboles plus élevées.

LEMME POUR LES DEUX PROBLEMES SUIVANS.

61. *Si l'on prend la ſuite des nombres naturels* 1. 2. 3. 4. *&c. qu'on écrive leurs quarrez par-deſſous, & enſuite leurs cubes, & qu'ayant pris la moitié de l'un de ces cubes, par exemple, la moitié* 4. *du cube* 8, *on ajoûte cette moitié à chaque cube ; qu'enſuite on diviſe le nombre* 12. *qui eſt le cube* 8. *augmenté de ſa moitié par le quarré* 4, *écrit au-deſſus du cube* 8, *& qu'on multiplie tous les quarrez par le quotient* 3, *on aura deux autres ſuites, dont l'une* 5. 12. 31. 64. *&c. ſera celle des cubes augmentés, & l'autre* 3. 12. 27. 48. *ſera celle des quarrez multipliés, & le nombre* 12 *ſe trouvera dans l'une & dans l'autre ſuite. Or je dis que ce nombre* 12 *eſt plus grand par rapport aux quarrez multipliés* 3. 27. 48. *&c. qui le précédent ou qui le ſuivent, qu'il n'eſt grand par rapport aux cubes augmentés* 5. 31. 68. *&c. qui le précédent & qui le ſuivent.*

La ſeule inſpection de ces nombres rangés par ordre, fait voir cette vérité, ſans que je ſois obligé d'en donner une démonſtration qui nous écarteroit de notre ſujet.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *nombres naturels* | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
| *quarrés* | 1. | 4. | 9. | 16. | 25. | 36. |
| *cubes* | 1. | 8. | 27. | 64. | 125. | 216. |
| | | 4. | | | | |
| *cubes augmentés* | 5. | 12. | 31. | 68. | 129. | 220. |
| *quarrés multipliés* | 3. | 12. | 27. | 48. | 75. | 108. |

De même si au lieu des cubes on écrit les quatriémes puissances sous les quarrez, & que prenant l'une de ces quatriémes puissances, comme par exemple 16, on l'ajoûte toute entiere à toutes les 4es puissances, à cause que l'exposant de la quatriéme puissance est un nombre pair, qu'ensuite ayant divisé 32, c'est-à-dire le double de la quatriéme puissance 16 par le quarré 4 qui lui répond, on multiplie tous les quarrez par le quotient 8, on aura deux suites, dont la premiere sera les quatriémes puissances augmentées, & la seconde les quarrez multipliés, & je dis que 32 qui est dans l'une & dans l'autre de ces suites, est plus grand par rapport aux quarrés multipliés qui le précédent & qui le suivent, qu'il n'est grand par rapport aux quatriémes puissances augmentées qui le précédent & qui le suivent, ce qui est encore évident par la seule inspection de ces suites.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *nombres naturels* | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
| *quarrés* | 1. | 4. | 9. | 16. | 25. | 36. |
| 4es *puissances* | 1. | 16. | 81. | 256. | 625. | 1296. |
| | | 16. | | | | |
| 4es *puissances aug.* | 16. | 32. | 97. | 272. | 641. | 1312. |
| *quarrés multipliés* | 8. | 32. | 72. | 128. | 200. | 288. |

De même encore si au lieu des quatriémes puissances, on écrit les cinquiémes sous les quarrez, & que prenant la moitié de l'une de ces puissances, parce que l'exposant de la cinquiéme puissance est un nombre impair, on ajoûte cette moitié, comme, par exemple, 16, qui est la moitié de 32, à toutes les cinquiémes puissances, & qu'ensuite ayant divisé 48, c'est-à-dire 32 augmenté de sa moitié par le quarré 4, qui lui répond, on multiplie tous les quarrés par le quotient 12, on aura deux suites, dont l'une sera les cinquiémes puissances augmentées, & l'autre les quarrés multipliés, & 48 qui se trouvera dans l'une & dans l'autre, sera plus grand par rapport aux quarrés multipliés qui le précédent & qui le suivent, que par rapport

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *nombres naturels* | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
| *quarrés* | 1. | 4. | 9. | 16. | 25. | 36. |
| 5es *puissances* | 1. | 32. | 243. | 1024. | 3125. | 7776. |
| | | 16. | | | | |
| 5e *puissances augm.* | 16. | 48 | 259. | 1040. | 3141. | 7792. |
| *quarrés multipliés* | 12. | 48. | 108. | 192. | 300. | 432. |

port aux cinquiémes puiſſances augmentées qui le précédent & qui le ſuivent; & ainſi de même des puiſſances plus élevées en ſuivant les regles que nous venons de donner.

## PROBLEME XVIII.

62. *Par un point donné N ſur une parabole du ſecond genre, du troiſié- &c. mener une tangente.*

Si la parabole eſt du ſecond genre (*Fig.* 45.), tirez l'ordonnée NX, & prolongez l'axe juſqu'à ce que CS ſoit double de l'abſciſſe CX, puis du point N, tirez NS, qui ſera la tangente.

Si la parabole eſt du troiſiéme genre, faites CS triple de CX; ſi elle eſt du quatriéme, faites CS quadruple de CX, & ainſi des autres.

### *Démonſtration pour les paraboles du ſecond genre.*

Par le ſommet C (*Fig.* 45.), tirez CB parallele aux ordonnées; du point donné N, élevez ſur CB la perpendiculaire NG; diviſez CG en parties égales, & continuez la diviſion au-delà de G vers B; des points de diviſion D, E, F, &c. élevez des perpendiculaires juſqu'à la rencontre de la parabole; ces perpendiculaires ſeront entr'elles comme les cubes 1. 8. 27. 64. 125. &c. par la nature de cette courbe; & comme l'expoſant des troiſiémes puiſſances eſt impair, prenez la moitié de celle qui paſſe par le point donné N, c'eſt-à-dire la moitié de la ligne GN, qui eſt ici comme 64, & ajoûtez cette moitié à toutes les perpendiculaires en les prolongeant juſqu'aux points *d*, *e*, *f*, &c. & ces lignes augmentées ſeront entr'elles comme les cubes 1. 8. 27, 64. &c. augmentés chacun de 32; ainſi *g*N ſera comme 96. Or tirant TV par le ſommet de ces lignes, la partie TC de l'axe, ſera la moitié de l'abſciſſe CX; d'où il ſuit que TX, ſera égal à TS. Donc ſi on décrit une parabole quarrée dont XN ſoit une ordonnée, & XT l'abſciſſe, la ligne NS ſera tangente de cette parabole, à cauſe de ST = TX; mais par la nature de la parabole quarrée, les perpendiculaires tirées des points *d*, *e*, *f*, *g*, &c. juſqu'à la courbe, ſeront entr'elles comme les quarrés 1. 4. 9. 16. 25. &c. ainſi *g*N devroit être 16; mais *g*N eſt 96, c'eſt-à-dire 16 par 6; donc les autres lignes doivent être auſſi comme les quarrés 1. 4. 9. &c. multipliés par 6. Or par le Lemme précédent, 96 eſt plus grand par rapport aux cubes augmentés, c'eſt-à-dire par rapport aux lignes tirées des points *d*, *e*, *f*, &c. ſur la parabole cubique,

que par rapport aux quarrés multipliés par 6, ou aux lignes tirées des mêmes points sur la parabole quarrée; donc tous les points de la parabole quarrée, excepté le point N, sont hors de la parabole cubique; donc la parabole quartée touche la cubique en N, sans la couper; & par conséquent la tangente SN, qui touche la quarrée; est aussi tangente de la cubique.

## *Démonstration pour la parabole du troisiéme genre, & des autres plus élevés.*

Dans la parabole du troisiéme genre (*Fig.* 46.), les perpendiculaires tirées des points D, E, F, &c. seront entr'elles comme les quatriémes puissances 1. 16. 81. 256. 625. &c. en sorte que HO, tiré du point d'attouchement O, sera 625. Ajoûtant donc HO à toutes ces lignes, à cause que l'exposant des quatriémes puissances est pair, & tirant la ligne TV, les lignes augmentées seront entr'elles comme ces quatriémes puissances augmentées de 625, & *h*O sera comme 1250. double de 625; or TC sera égal à l'abscisse CX; donc XT sera égal à TS, & par conséquent si l'on décrit une parabole quarrée, dont XO sera une ordonnée, & TX l'abscisse, la ligne SO sera tangente de cette parabole, donc les lignes tirées des points *d*, *e*, *f*, *g*, &c. jusqu'à la rencontre de cette parabole, seront entr'elles comme les quarrés 1. 4. 9. 26. &c. Ainsi *h*O devroit être 25; mais *h*O est 1250, c'est-à-dire 25 multiplié par 50; donc les lignes tirées des points *d*, *e*, *f*, *g*, &c. sur la parabole quarrée, sont entr'elles comme les quarrés 1. 4. 9. &c. multipliés par 50; mais 1250 est plus grand par rapport aux cinquiémes puissances augmentées, ou aux lignes *d*D, *e*L, *f*M, &c. tirées sur la parabole du troisiéme genre, que par rapport aux quarrés multipliés, ou aux lignes tirées des mêmes points sur la parabole quarrée; donc tous les points de la parabole quarrée sont hors de la parabole du troisiéme genre, excepté le point O, & par conséquent la tangente SO, qui touche la quarrée au point O, est aussi tangente de l'autre.

Par rapport aux autres paraboles plus élevées, on observera toujours d'augmenter les perpendiculaires tirées des points D, E, F, &c. de la moitié de celle qui est tirée du point d'attouchement, quand l'exposant de la puissance sera impair, & de la ligne entiere, quand il sera pair, & le reste se démontrera comme ci-dessus.

## COROLLAIRE I.

63. Donc la soutangente est à l'abscisse dans la parabole quarrée, comme 2 à 1, dans la cubique, comme 3 à 1, dans celle du troisiéme genre, comme 4 à 1, & ainsi des autres.

## COROLLAIRE II.

64. *Si dans les paraboles du second, troisiéme, quatriéme genre, &c.* (Fig. 47.) *on prend deux perpendiculaires FR, HS, également éloignées de la perpendiculaire GO, qui passe par le point d'attouchement d'une tangente OK, & qu'on joigne par une ligne droite RS, leurs extrêmités R, S, où elles coupent la parabole, cette ligne RS, sera coupée en deux également en X, par la ligne GOY, qui sera par conséquent un diametre.* Tirant *Rr*, VS, paralleles à CB, les triangles semblables *RrX*, SVX, seront égaux, à cause de *Rr*, égal à VS; & par conséquent RX sera égal à XS. Par la même raison LN, sera divisée en deux également au point Z, & ainsi des autres.

## COROLLAIRE III.

65. *Dans la parabole cubique* (Fig. 47.), *la partie Ga de la ligne CB, comprise entre la tangente & la perpendiculaire GO, est le tiers de la ligne CG.* Les triangles semblables GO*a*, CK*a*, donnent GO. CK :: G*a*. C*a*. Mais GO, étant égal à C*b*, est la moitié de CK; donc G*a* est la moitié de C*a*, & par conséquent le tiers de CG.

*Dans la parabole du troisiéme genre Ga est le quart de CG, dans celle du quatriéme elle est la cinquiéme partie, & ainsi de suite. Ce qui est facile à prouver.*

## COROLLAIRE IV.

66. *Dans la parabole cubique* (Fig. 47.), *& dans celle des genres plus élevés, la tangente KO, & les ordonnées RS, LN, au diametre GO, ne sont pas paralleles entr'elles, mais elles s'approchent les unes des autres en tirant vers K.* Supposant que la parabole soit cubique, la ligne GO, est comme le cube 64, supposant CG, égal à 4, la ligne G*a* sera $1\frac{1}{3}$. Ainsi dans le triangle rectangle *a*GO, les côtez GO, G*a*, sont comme 64 à $1\frac{1}{3}$, de même la ligne GV, égale à HS, est 125, & ôtant de cette ligne la partie G*r*, égale à FR, qui est 27, le reste *r*V sera 98; & prenant la moitié, on aura *r*X, égal à 49, & la ligne R*r*, égale à FG, est comme 1. Ainsi dans le triangle rectangle *Rr*X, les côtez X*r*, R*r*, sont comme 49.

à 1 ; mais 64 est moins grand par rapport à $1\frac{1}{3}$, que 49 par rapport à 1 ; car par la regle de trois on a 49. 1 :: 64. 1. $\frac{15}{49}$, qui est moindre que $1\frac{1}{3}$. Donc $aG$ est plus grand par rapport à GO, que $Rr$ par rapport à $rX$. Donc l'angle $GOa$, est plus grand que l'angle $rXR$; & par conséquent les deux lignes $aO$, RX, n'étant pas également inclinées entre les paralleles RF, GX, s'approchent l'une de l'autre, & il est visible que c'est en tirant vers K.

Par un semblable calcul on prouvera que la ligne LN, n'est parallele ni à la tangente, ni à l'autre ordonnée, & ainsi des autres.

## COROLLAIRE V.

67. Donc toutes les proprietés de la parabole quarrée que nous avons découvertes par le parallelisme des tangentes & des ordonnées à leurs diametres, ne sçauroient convenir aux autres paraboles, non plus qu'à ce que nous avons dit de l'égalité des segmens.

## COROLLAIRE. VI.

68. *Les paraboles du second, troisiéme, quatriéme genre, &c. n'ont point de foyer.* Supposons la parabole cubique ABC (*Fig.* 48.), d'un point P je mene une tangente PT, puis faisant BR, égal à la moitié de l'abscisse BO, je fais une parabole quarrée, dont PO soit une ordonnée, & RO une abscisse; PT est tangente de cette parabole au point P, à cause de RT égal à RO. Par un autre point S je mene une autre tangente SV à la parabole cubique, & faisant BI égal à la moitié de l'abscisse BX, je décris une parabole quarrée ISZ, dont SX soit une ordonnée, & XI l'abscisse, & SV est tangente de cette parabole au point S; & comme cette parabole touche la cubique sans la couper, il faut nécessairement qu'elle coupe la premiere parabole quarrée RPQ, de sorte que si on vouloit que la ligne OP, lui fût ordonnée, il faudroit la prolonger au-delà du point P en H; mais le quarré de PO, dans la premiere parabole quarrée, est égal au rectangle de l'abscisse OR par son parametre RL, & dans la seconde parabole quarrée, le quarré de OH, plus grand que OP, est égal au rectangle de l'abscisse OB, moindre que OR, par son parametre IK; donc ce parametre IK, est plus grand que le parametre RL. Ainsi si l'on prend le quart de RL, & qu'on le mette de R en E, le point E, sera le foyer de la premiere parabole quarrée, & si on prend le quart du para-

metre IK, & qu'on le mette de I en F, le point F, sera le foyer de la seconde quarrée; & ces deux points E, F, tomberont en deux endroits differens, puisque IF étant plus grand que RE, est encore plus grand que IE. Or si au point S, on fait l'angle VSF, égal à l'angle *bSa*, fait par le diamétre & la tangente, la ligne SF ira aboutir au foyer F de la seconde parabole quarrée, dont VS est tangente; & si au point P, on fait TPE, égal à l'angle *dPq*, fait par le diametre *dP* & sa tangente, la ligne PE, ira aboutir au foyer E de la premiere parabole quarrée. Mais les points S, P, appartiennent aussi à la parabole cubique, de même que les deux tangentes, & leurs deux diametres; donc cette parabole n'a point de foyer fixe, & l'on peut lui en trouver autant de differens qu'on peut lui tirer de tangentes, ce qui est la même chose que de n'avoir point de foyer. Il en est de même des paraboles des genres plus élevés.

## PROBLEME XIX.

*69. Mesurer les paraboles du second, du troisiéme genre, &c.*

Dans la parabole cubique (*Fig.* 44.), les perpendiculaires tirées de la ligne CB sur la parabole, sont entr'elles comme les cubes des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c. Ainsi supposant ces perpendiculaires infiniment proches, il y en aura une infinité dans la figure mixtiligne CBM, dont elles seront les Elemens. Donc leur somme est à la plus grande BM, multipliée par le nombre des termes BC, c'est-à-dire au rectangle BCNM, comme 1 à 4 (*Partie 2. n.* 240.), & par conséquent la demi-parabole sera à ce rectangle comme 3 à 4, & la parabole entiere sera au rectangle ABPM, encore comme 3 à 4.

Si la parabole est du troisiéme genre, les Elemens de la figure mixtiligne seront entr'eux comme les quatriémes puissances des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c. à l'infini; donc leur somme sera au rectangle CBNM, comme 1 à 5; & par conséquent la demi-parabole sera à ce rectangle comme 4 à 5, & la parabole entiére sera au rectangle ABPM, aussi comme 4 à 5.

Par un semblable raisonnement on prouvera que la parabole du quatriéme genre est au rectangle circonscrit comme 5 à 6, que celle du cinquiéme genre est à ce rectangle comme 6 à 7, & ainsi de suite; de sorte qu'en commençant par la quarrée, les paraboles sont au rectangle circonscrit comme 2 à 3, comme 3 à 4, com-

me 4 à 5, comme 5 à 6, &c. & les espaces mixtilignes comme 1 à 3, comme 1 à 4, comme 1 à 5, comme 1 à 6, &c.

### COROLLAIRE I.

70. Et si on tire la diagonale CM, on trouvera que le segment parabolique CKM, est à la demi-parabole, en commençant par la quarrée, comme 1 à 4, comme 1 à 3, comme 3 à 8, comme 2 à 5, &c. que ce même segment est au triangle CNM, comme 1 à 3, comme 1 à 2, comme 3 à 5, comme 2 à 3, &c. enfin qu'il est à l'espace mixtiligne, comme 1 à 2, comme 1 à 1, comme 3 à 2, comme 2 à 1, &c. ce qu'on découvrira aisément en ôtant de la valeur de la parabole celle du triangle CNM, qui est toujours la moitié du rectangle.

### COROLLAIRE II.

71. On prouvera aussi que toutes les paraboles d'un même genre, sont semblables, de même que les paraboles quarrées, parce qu'on peut toujours leur donner des bases proportionnelles aux abscisses, &c.

## SECTION III.

### *De l'Ellipse considerée hors du cone.*

### PROBLEME XX.

72. *Décrire une Ellipse* (Fig. 49.).

Prenez deux lignes inégales AB, CD, mettez-les perpendiculairement l'une sur l'autre, en sorte qu'elles se coupent mutuellement au point O, en deux parties égales. Du point O pris pour centre, & de l'intervalle OB, ou OA, décrivez un cercle AFBE, & sur le diametre AB, tirez les perpendiculaires SR, MN, &c. ensuite cherchez une quatriéme proportionnelle au demi-diametre OE, à la ligne OC, & à l'ordonnée PR, & portez cette quatriéme proportionnelle de P en X, le point X sera un point de l'Ellipse. Cherchez une quatriéme proportionnelle aux trois lignes OE, OC, VN, & portez-la de V en T, & le point T sera un autre point de l'Ellipse; continuant de même à chercher des quatriémes proportionnelles toujours aux deux lignes OE, OC, & à quelqu'une des ordonnées du demi-cercle AEB, & faisant passer une ligne courbe ACXTB, par l'extrêmité de ces quatriémes pro-

portionnelles ; cette courbe sera une demi-Ellipse, & si vous faites la même chose à l'égard de l'autre demi-cercle, vous aurez l'Ellipse entiere.

### DEMONSTRATION.

Par la construction PX. PR :: OC. OE. & VT, VN :: OC. OE. donc PX. PR :: VT. VN. & *permutando*, PX. VT :: PR. VN. donc $\overline{PX}^2$. $\overline{VT}^2$ :: $\overline{PR}^2$. $\overline{VN}^2$. mais par la nature du cercle $\overline{PR}^2$ = AP×BP. & $\overline{VN}^2$ = AV×VB. donc $\overline{PX}^2$. $\overline{VT}^2$ :: AP×PB. AV×VB. donc les quartez des ordonnées PX, VT, sont entr'eux comme les rectangles des parties qu'elles coupent sur l'axe AB ; & par conséquent la courbe ACBD, est une Ellipse (*n.* 6.).

### DEFINITION VII.

73. La ligne AB, s'appelle le grand *axe*, la ligne CD, le *petit axe*, & les deux ensemble, *axes conjugués* ; une ligne troisiéme proportionnelle au grand axe & au petit, s'appelle le *parametre* du grand axe, & une troisiéme proportionnelle au petit & au grand axe, est le *parametre* du petit. Une ligne droite HI, qui passe par le *centre* O, & qui va aboutir de part & d'autre à la courbe, se nomme *diametre*. Enfin si de l'extrêmité C du petit axe, prise pour centre (*Fig.* 50.), & d'un intervalle égal à la moitié du grand axe, on décrit un arc de cercle qui coupe le grand axe en deux points G, L, ces points, G, L, s'appelleront les *foyers* de l'Ellipse.

### COROLLAIRE I.

74. *Le quarré d'une ordonnée PX* (Fig. 49.), *au grand axe, est au rectangle correspondant AP×PB, comme le quarré du petit axe CD, au quarré du grand AB.* Par la nature de l'Ellipse, les quarrez des ordonnées PX, OC, sont entr'eux comme les rectangles correspondans AP×PB, AO×OB ; mais le rectangle AO×OB, est égal au quarré de AO ; donc $\overline{PX}^2$. $\overline{OC}^2$ :: AP×PB. $\overline{AO}^2$. & *permutando*, $\overline{PX}^2$. AP×BP :: $\overline{OC}^2$. $\overline{AO}^2$ ; or les quarrez des diametres CD, AB, sont entr'eux comme les quarrez de leurs moitiés OC, AO ; donc $\overline{PX}^2$. AP×BP :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$.

## COROLLAIRE II.

75. *Le quarré d'une ordonné PX au grand axe, eſt à ſon rectangle AP×PB, comme le parametre BZ du grand axe eſt à cet axe.* Par le Corollaire précedent ou a $\overline{PX}^2$. AP×PB :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$. mais par la définition du parametre on a :: AB. CD. BZ; donc $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ :: BZ AB. & par conſéquent $\overline{PX}^2$. AP×PB :: BZ. AB.

## COROLLAIRE III.

76. *Le quarré d'une ordonnée PX au grand axe,* (Fig. 51.), *eſt moindre que le rectangle de l'abſciſſe PB par le parametre BZ de cet axe.* Par le Corollaire précedent on a $\overline{PX}^2$. AP×PB :: BZ. AB. mais à cauſe des triangles ſemblables ABZ, APR, on a BZ. AB :: PR. AP. donc $\overline{PX}^2$. AP×PB :: PR. AP. & multipliant les deux derniers termes de cette proportion par la ligne PB on a $\overline{PX}^2$. AP ×PB :: PR×PB. AP×PB. donc les deux conſéquens étant égaux, les deux antecedens $\overline{PX}^2$, PR×PB, le ſont auſſi. Mais PR×PB, ou le rectangle PRSB, eſt moindre que le rectangle PTZB du parametre par l'abſciſſe PB, de tout le petit rectangle RTSZ. donc le quarré $\overline{PX}^2$, eſt auſſi moindre que le rectangle PTZB de tout le petit rectangle RTSZ.

## REMARQUE.

77. Dans la parabole le quarré de l'ordonnée eſt égal au rectangle de l'abſciſſe par le parametre, comme nous avons vû ailleurs, dans l'Ellipſe il eſt moindre, & dans l'hyperbole il eſt plus grand, comme nous le dirons dans la ſuite, & c'eſt de-là que ces trois Sections coniques ont pris leurs noms; car Parabole ſignifie *égalité*, Ellipſe ſignifie *défaut*, & Hyperbole *excès*.

## COROLLAIRE IV.

78. *Le quarré $\overline{OC}^2$ de la moitié du petit axe CD* (Fig. 50.), *eſt égal au rectangle AL×LB des parties inégales du grand axe, coupées par l'un des foyers L.* Dans le triangle rectangle COL, le quarré de

de CO, est égal au quarré de CL, moins le quarré de LO; mais CL est égal à OB (*n.* 73.), donc le quarré de CO est égal au quarré de OB, moins le quarré de OL; or l'axe AB, étant divisé en deux également en O, & en deux inégalement en L, le rectangle AL×LB, est égal au quarré de OB, moins le quarré de OL; donc le quarré de CO est égal au rectangle AL×LB.

## COROLLAIRE V.

79. Donc *le quarré* $\overline{PX}^2$ *d'une ordonnée au grand axe, est au rectangle* $AP \times PB$, *comme le rectangle* $AL \times LB$, *égal à* $\overline{OC}^2$, *est au quarré* $\overline{OB}^2$.

## COROLLAIRE VI.

80. *Le quarré d'une ordonnée VN au petit axe CD* (Fig. 50.), *est au rectangle* $CN \times ND$ *des parties que cette ordonnée coupe, comme le grand axe au petit axe.* Tirant l'ordonnée VM au grand axe, on a $\overline{AO}^2. \overline{CO}^2 :: AM \times MB. \overline{VM}^2$; or $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. donc $\overline{AO}^2. \overline{CO}^2 :: \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2. \overline{VM}^2$. & *permutando*, $\overline{AO}^2. \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2 :: \overline{CO}^2. \overline{VM}^2$. & *dividendo*, $\overline{AO}^2. \overline{AO}^2 - \overline{AO}^2 + \overline{MO}^2 :: \overline{CO}^2. \overline{CO}^2 - \overline{VM}^2$. (je donne le signe plus au quarré $\overline{MO}^2$, parce qu'en retranchant $\overline{AO}^2$, je retranche trop, puisqu'il ne faut retrancher que $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. c'est pourquoi je rends $\overline{MO}^2$ que j'avois retranché de trop). Or comme $\overline{AO}^2 - \overline{AO}^2$, se réduit à zero, on a donc $\overline{AO}^2. \overline{MO}^2 :: \overline{CO}^2. \overline{CO}^2 - \overline{VM}^2$. mais $\overline{MO}^2 = \overline{VN}^2$. à cause des paralleles, & $\overline{CO}^2 - \overline{VM}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{NO}^2$. par la même raison, & de plus $\overline{CO}^2 - \overline{NO}^2 = CN \times ND$; donc $\overline{AO}^2. \overline{VN}^2 :: \overline{CO}^2. CN \times ND$, ou $\overline{VN}^2. CN \times ND :: \overline{AO}^2. \overline{CO}^2$.

## COROLLAIRE VII.

81. Donc *les quarrez des ordonnées au petit axe, sont entr'eux comme leurs rectangles correspondans.*

## COROLLAIRE VIII.

82. *Si l'on prend deux lignes inégales GR, RL* (Fig. 52.), *qui jointes ensemble, soient égales au grand axe AB; & que des foyers G, L, on décrive avec ces deux lignes deux arcs qui se coupent en R, ce point R sera sur la circonference de l'Ellipse.*

Pour bien entendre la démonstration de ceci, il faut sçavoir premierement que dans tout triangle rectangle le produit de la somme de l'hypotenuse AC, & d'un côté AB (*Fig.* 53.), par la difference de l'hypotenuse & du même côté, est égal au quarré de l'autre côté BC; car si du centre A, & de l'intervalle AB, on décrit un cercle ABDE, & qu'on prolonge l'hypotenuse en E, la secante CE, sera la somme de l'hypotenuse & du côté AB, & sa partie exterieure CD, en sera la difference; mais $CD \times CE = \overline{BC}^2$, à cause que BC est tangente; donc, &c.

En second lieu, si l'on a deux grandeurs inégales 4 & 6, dont la somme est 10, & la difference 2, la grande est égale à la moitié 5 de la somme, plus la moitié 1 de la difference, & la petite est égale à la même moitié 5, moins la moitié de la différence, ce qui a été démontré (*Part.* 2. *n.* 16.), en parlant de la mesure des trapezes; & comme la grande est aussi égale à la petite, plus la difference, il s'ensuit que si de la moitié 3 de la grande, on ôte la moitié 1 de la difference, on aura la moitié 2 de la petite, & si à la moitié 2 de la petite, on ajoûte la moitié 1 de la difference, on aura la moitié de la grande, &c. Cela posé, venons à la démonstration.

Prolongez GR, & faites RZ égale à RL; divisez GZ en deux également en M, GZ sera égale aux deux ensemble GR, RL, & comme GM est la moitié de cette somme, & qu'en lui ajoûtant MR, la partie GR est la grande, il s'ensuit que MR est la moitié de la difference de GR, RL; du point R, & de l'intervalle RL, décrivez un cercle ZLHQ, qui coupera l'axe en deux points L, H, si l'ordonnée RP n'est pas perpendiculaire sur le point L, comme dans le cas présent, la secante GZ, étant la somme des deux lignes GR, RZ, ou RL, sa partie exterieure GQ, en sera la difference. Abbaissez sur l'axe l'ordonnée RP, qui coupera en deux également la corde HL; or la corde HL, est la difference de GL d'avec sa partie exterieure GH; ainsi PL en sera la demi-difference, & GL sera la moitié de la secante GL; donc si de

cette moitié OL, on retranche la moitié PL de la difference, le reſte OP ſera la moitié de la partie exterieure GH.

Maintenant les deux ſecantes GZ, GL, donnent GZ. GL :: GH. GQ. & prenant les moitiés de ces termes GM. OL :: OP. MR; & comme par la ſuppoſition GZ eſt égal à l'axe AB, prenant la moitié de cet axe au lieu de GM, on aura OB. OL :: OP. MR, ou OB. OP :: OL. MR, & compoſant OB. OB+OP. ou AP :: OL. OL+MR. ou OB. OL :: AP. OL+MR. & compoſant encore OB. OB+OL. ou AL :: AP. AP+OL +MR. mais AP eſt égal à AO, ou GM+OP; ainſi on a OB. AL :: AP. GM+OP+OL+MR, & comme GM+MR, eſt égal à GR, & OL+OP, égal à GP, on a enfin OB. AL :: AP. GR +GP, & dans cette propoſition le dernier terme eſt la ſomme de l'hypotenuſe GR, & du côté GP du triangle rectangle GRP.

Reprenant la proportion OB. OL :: OP. MR. on aura en diviſant OB. OB−OL :: OP. OP−MR, ou OB. OP :: OB−OL. OP−MR. & diviſant encore OB. OB−OP. ou PB :: OB−OL. ou LB. OB−OL−OP+MR; mais OB = GM & −OL−OP = −GP; donc OB. PB :: LB. GM+MR−GP, & ce dernier terme eſt la différence de l'hypotenuſe GR, d'avec le côté GP, du triangle rectangle GPR. appellons cette difference $x$, & nous aurons OB. PB :: LB. $x$. prenons la proportion ci-deſſus OB. AL :: AP. GR+GP. ou OB. AP :: AL. GR+GP. & nommant le dernier terme $s$, parce qu'il eſt la ſomme de l'hypotenuſe GR & du côté GP, nous aurons OB. AP :: AL. $s$, & multipliant les termes de cette proportion par ceux de la proportion OB. PB :: LB. $x$, nous aurons $\overline{OB}^2$. AP×PB :: AL×LB. $s$×$x$. mais la ſomme de l'hypotenuſe & du côté GP, multipliée par leur difference, eſt égale au quarré du côté RP. donc $\overline{OB}^2$. AP×PB :: AL×LB. $\overline{RP}^2$. ou $\overline{RP}^2$. AP×PB. AL×LB. ou $\overline{CQ}^2$. $\overline{OB}^2$. & comme c'eſt-là la proprieté de l'Ellipſe, il s'enſuit que RP eſt ordonnée à l'Ellipſe, & que par conſéquent le point R eſt à la circonference.

Quand l'ordonnée RL, eſt perpendiculaire ſur le foyer L (Fig 54.) la démonſtration devient encore plus facile; car la ſecante GZ, & la tangente GL, donnent :: GZ. GL. GQ. & leurs moitiés donnent GM, ou OB. OL :: OL. MR. & compoſant OB. OB+OL. ou AL :: OL. OL+MR. ou OB. OL :: AL. OL+MR. & compoſant encore OB. OB+OL. ou AL

:: AL. AL+OL+MR. or AL est égal à AO+OL. & AO =GM. donc OB. AL :: AL. GM+MR+OL+OL. & ce dernier terme étant égal à la somme GR.+GL de l'hypotenuse GR, & du côté GL du triangle rectangle GLR, nous l'appellerons $s$, & nous aurons OB. AL :: AL. $s$.

Reprenant la proposition OB. OL :: OL. MR. nous aurons, en divisant OB. OB—OL :: OL. OL—MR. ou OB. OL :: OB —OL. OL—MR & divisant encore OB. OB—OL. ou LB :: OB —OL. ou LB. OB—OL—OL+MR, & ce dernier terme est égal à la difference de GR, RL, à cause de OB+MR = GM +MR. & de — OL—OL = — GL. appellant donc cette difference $x$, nous aurons OB. LB :: LB. $x$, & multipliant les termes de cette proportion par ceux de la proportion OB. AL :: AL. S. nous aurons $\overline{OB}^2$. AL×LB :: AL×LB. $s \times x$, ou $\overline{RL}^2$, & par conséquent $\overline{RL}^2$. AL×LB :: AL×LB, ou $\overline{CO}^2$. $\overline{OB}^2$. donc RL est une ordonnée, & le point R est à l'Ellipse.

## COROLLAIRE IX.

83. On tire de-là une maniere aisée de décrire une Ellipse sur le terrein par un mouvement continu; car ayant déterminé la grandeur des deux axes AB, CD (*Fig.* 50.), & trouvé les foyers G, L, en portant de C en L, & de C en G, la moitié du grand axe; si l'on prend une corde dont la longueur soit égale au grand axe, plus la distance GL des foyers, & qu'ayant planté deux cloux aux foyers, on y passe cette corde en la tenant par les deux bouts toujours tendue, & tournant autour des cloux de C vers B, jusqu'à ce qu'on soit revenu en C, les extrêmités de cette corde jointes ensemble, décriront une Ellipse, puisqu'il est évident que la partie GL de la corde, étant toujours de la même grandeur, les deux autres parties GC, CL, prises ensemble, seront toujours égales à l'axe, soit qu'elles aboutissent en C, ou en quelqu'autre point, comme H, ou D, ou A, &c.

## COROLLAIRE X.

84. *Si sur le petit axe CD* (Fig. 55.), *on décrit un cercle CEDT, l'Ellipse sera toute entiere hors de ce cercle, & ne le touchera qu'aux extrémitez C, D du diametre.* Tirez les ordonnées HK, IL, &c. leurs quarrez seront entr'eux comme les rectangles CK×KD, CL×LD, &c. mais les quarrez des ordonnées SK, RL, au cer-

cle, ſont égaux à ces rectangles; donc les quarrez de HK, IL, ſeront entr'eux comme les quarrez de SK, RL, &c. d'où il eſt aiſé de conclure que les quarrez de HK, IL, ſeront aux quarrez de SK, RL, comme le quarré de BF au quarré de EF, & que par conſéquent les ordonnées HK, IL, ſeront aux ordonnées SK, RL, comme l'axe BA, double de BF, au diametre ET, ou à l'axe CD, double de EF; mais BA eſt plus grand que CD ou ET; donc toutes les ordonnées HK, IL, &c. ſont plus grandes que les ordonnées du cercle, & par conſéquent l'Ellipſe eſt toute entiere hors du cercle, &c.

## COROLLAIRE XI.

85. *Ayant décrit un cercle BNAM* (Fig. 56.), *autour du grand axe AB, & un autre CEDF autour du petit axe CD, il eſt évident que l'Ellipſe ſera toute entiere entre les deux circonferences, & je dis que ſi du centre O, on décrit d'autres circonferences concentriques qui paſſent par les points de la ligne BE, qui eſt la difference des deux axes, chacune de ces circonferences coupera l'Ellipſe en quatre points également éloignés de part & d'autre des extrémitez B, A, C, D, des deux axes.* Si par le point I, où la circonference LRZXI, commence à couper l'Ellipſe, on tire IL, parallele au petit axe, cette ligne ſera une double ordonnée au grand axe, & par conſéquent elle ſera coupée par cet axe en deux parties égales; or la partie Oa de cet axe, étant rayon du cercle HILZX, & coupant la ligne droite IL, en deux parties égales, il faut néceſſairement que IL ſoit une corde de ce cercle, & que par conſéquent l'Ellipſe ſoit coupée encore au point L; mais les points I, L, ſont également éloignés de B, de même que de A, de même encore que de C & D: donc; &c.

On prouvera de même que le même cercle coupe l'Ellipſe en deux autres points X, Z, qui ont les mêmes qualitez que les points I, L.

## COROLLAIRE XII.

86. Il ſuit de-là que *tous les diametres tirés dans un quart d'Ellipſe, ſont tous inégaux, que le plus petit eſt le petit axe, le plus grand eſt le grand axe, & que les autres ſont d'autant plus grands que le petit axe, qu'ils s'en éloignent davantage.* Il eſt viſible que CO eſt moindre que TO, & TO moindre que IO, &c. puiſque CO, TO, IO, ſont des rayons de cercles qui vont en augmentant; de mê-

me que OB est plus grand que IO, que TO, &c. enfin que IO, qui s'éloigne plus de CO, est plus grand que TO.

## PROBLEME XXI.

87. *D'un point donné P sur une Ellipse, mener une tangente SPR*; (Fig. 57.).

Tirez par les foyers les lignes GP, LP, prolongez GP, faisant PM égal à PL, & tirant LM, que vous diviserez également en R, menez la ligne PR, qui sera tangente.

### DEMONSTRATION.

Prenez une autre point S sur cette tangente où vous voudrez, & ayant tiré des foyers les lignes GS, SL, tirez aussi la ligne SM; le triangle LPM étant isoscele, & PR divisant sa base en deux également, le triangle LSM, sera aussi isoscele; donc SL = SM; or les deux lignes GS, SM, prises ensemble, sont plus grandes que GM, ou que GP, PL ensemble; donc aussi les deux lignes GS, SL, prises ensemble, sont plus grandes que les deux ensemble GP, PL; & par conséquent le point S, est hors de l'Ellipse; car il faudroit pour qu'il y fût, que GS+SL, fût égal à GP+PL (*n.* 82.).

### *Autre maniere.*

Du point donné P (*Fig.* 58.) tirez l'ordonnée PG au grand axe, puis prenez une troisiéme proportionnelle aux deux lignes OG, OA, & mettez-la de O en R, où vous tirerez par le point P, la ligne PR, qui sera tangente.

### DEMONSTRATION.

Décrivez un cercle AFB, autour du grand axe; prolongez l'ordonnée PG, jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle en F, par où vous tirerez la ligne FR, qui sera tangente; car OF étant égal à OA, vous aurez :: GO. OF. OR; donc le triangle RFO, est rectangle en F, puisque OGF, qui est rectangle, est semblable à OFR; donc RF, étant perpendiculaire sur le rayon OF, touche le cercle. Maintenant prenez un autre point H, sur la ligne PHR, & menez une ordonnée HV au grand axe, laquelle vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente du cercle en I, les triangles semblables RGF, RVI, donneront GF. VI :: RG. RV, & les triangles semblables RGP, RVH, donneront GP. HV,

:: RG. RV ; donc GF. VI :: GP. VH. mais les ordonnées GP, VM au cercle, sont entr'elles comme les ordonnées PG, NV au grand axe de l'Ellipse, & VM est moindre que VI, à cause que RI ne touche le cercle qu'en F ; donc NV doit être aussi moindre que HV ; donc le point H est hors de l'Ellipse, & comme on prouvera la même chose de tous les points qu'on prendra sur la ligne HR, excepté le point P, il s'ensuit que HR touche l'Ellipse en ce seul point.

## COROLLAIRE I.

88. *Si du point P d'attouchement on tire l'ordonnée PX au petit axe* (Fig. 58.), *& qu'on prolonge la tangente jusqu'à la rencontre de ce même axe prolongé en Z, on aura de même* :: *OX. OC. OZ.* Les trois lignes OG, OA, OR, étant proportionnelles, on a $\overline{OG}^2$. ou $\overline{PX}^2$. $\overline{OA}^2$ :: OG. OR. mais par la nature de l'Ellipse $\overline{PX}^2$. $\overline{OA}^2$ :: CX×XD. ou $\overline{CO}^2 - \overline{XO}^2$. $\overline{CO}^2$ ; & à cause des triangles semblables ZXP, ZOR, on a PX, ou OG. OR :: ZX. ZO ; donc ZX. ZO :: $\overline{CO}^2 - \overline{XO}^2$. $\overline{CO}^2$, & divisant ZO. ZO − ZX :: $\overline{CO}^2$. $\overline{CO}^2 - \overline{CO}^2 + \overline{XO}^2$, ou ZO. XO :: $\overline{CO}^2$. $\overline{XO}^2$ ; donc :: ZO. CO. XO.

## COROLLAIRE II.

89. *D'un point P* (Fig. 59.), *on ne peut mener qu'une touchante PR.* Si l'on veut que PZ soit encore tangente, du foyer L, je tire LH perpendiculaire à PZ, & du foyer G, pris pour centre, & d'une intervalle GH, égal au grand axe, je décris un arc qui coupe LH en H, & je tire GH & L*a* ; ainsi L*a*, *a*H seront égales : c'est pourquoi divisant LH en deux également en I, la ligne I*a* sera touchante en *a* ; or PZ étant perpendiculaire à LH, de même que I*a* se trouvera ou du côté de l'Ellipse, ou de l'autre côté. Si elle se trouve du côté de l'Ellipse, elle la coupera donc, & si elle se trouve de l'autre côté, elle ne la touchera même pas ; & par conséquent PZ ne sçauroit être tangente ; car on ne peut pas dire qu'elle passe par le point *a*, parce qu'en ce cas elle toucheroit en deux points P & *a*, ce qui ne sçauroit être non plus.

## COROLLAIRE III.

90. *Si une ligne RP* (Fig. 58.), *touche une Ellipse en un point P,*

*duquel on ait tiré une ordonnée PG au grand axe, on aura BG. GA :: BR. RA* Par le Probleme préſent on a :: OR. OA. OG. donc diviſant, on aura OR. OR—OA. ou RA :: OA. OA—OG. ou AG. & doublant les antecedens BR+RA. RA :: BA. AG. & enfin diviſant, on aura BR+RA—RA. RA :: BA—AG. AG ou BR. RA :: BG. GA.

### COROLLAIRE IV.

91. *Si des foyers G, L* (Fig. 57.), *on tire des lignes au point d'attouchement P, les angles GPS, LPR, faits par ces lignes avec la tangente, ſont égaux entr'eux.* L'angle GPS, eſt égal à l'angle MPR, qui lui eſt oppoſé au ſommet, & cet angle MPR, eſt égal à l'angle LPR, à cauſe que le triangle iſoſcele LPM, eſt diviſé en deux triangles égaux par la ligne PR, perpendiculaire ſur ſa baſe; donc, &c.

### COROLLAIRE V.

92. Les ordonnées au petit axe CD (*Fig. 55.*) deviennent d'autant moindres qu'elles s'éloignent davantage de part & d'autre du grand axe; donc ſi du ſommet du grand axe on tire une parallele BQ au petit axe, elle ſera tangente en B, & de même les ordonnées au grand axe, devenant d'autant moindres qu'elles s'éloignent davantage du petit axe, il eſt évident que ſi du ſommet du petit axe on tire une parallele au grand, elle ſera tangente.

### COROLLAIRE VI.

93. *Ayant le grand axe AB* (Fig. 60.), *& un diametre EF, avec leurs tangentes FL, BH, qui ſe croiſent, & vont aboutir, l'une ſur l'axe, & l'autre ſur le diametre prolongés, le triangle BOL fait par les deux tangentes, & l'axe eſt égal au triangle IOH, fait par les deux tangentes & le diametre.* Tirez FR ordonnée à l'axe, & BP parallele à la tangente FL, vous aurez :: XR. XB. XL (*n.* 87.); or les triangles ſemblables XBP, XLF, donnent XP. XF :: XB. XL. & nous avons XB. XL :: XR. XB. donc XP. XF :: XR. XB. & par conſéquent les droites PR, FB, ſont paralleles. De même les triangles ſemblables XRF, XBH, donnent XF. XH :: XR. XB. mais XR. XB :: XP. XF. donc XF. XH :: XP. XF :: XB. XL. & par conſéquent les droites FB, HL, ſont auſſi paralleles; donc les triangles FBL, BFH, ſont égaux, & ôtant de part & d'autre le

le triangle commun FOB, il reste le triangle BOL, égal au triangle FOH.

Par la même raison si aux triangles égaux BOL, FOH, on donne le quadrilatere commun BZFO, on aura le quadrilatere FZBL, égal au quadrilatere FZBH ; & si au premier quadrilatere on ajoûte le triangle PZF, & au second le triangle RZB, égal à PZF, on aura le quadrilatere PFBL, égal au quadrilatere RFHB, & si on fait échange des triangles PZF, RZB, on aura le triangle RFL, égal au triangle PBH, & donnant au premier le triangle PRF, & au second le triangle PRB = PRF, on aura PFRL = PHBR, & ajoûtant encore de part & d'autre le triangle XPR, on aura le triangle XLF, égal au triangle XHB.

Si à l'autre extrêmité A de l'axe, de même qu'à l'autre extrêmité E du diametre, on fait la même construction, on aura les mêmes choses de ce côté que de l'autre, & tout sera égal de toutes parts. Ainsi, par exemple, le triangle TEX, sera égal & semblable au triangle XFL, &c. ce qui est facile à prouver ; d'où il suit que XE, étant égal à XF, *tout diametre EF, est coupé en deux également par le centre X de l'Ellipse.*

Si on prolonge la tangente NA, & la tangente FL, jusqu'à leur rencontre en S, *le triangle FSN, sera égal au triangle SAL.* Car les triangles ANX, XFL, étant égaux, si on leur ajoûte le quadrilatere commun ASFX, on aura FSN = SAL.

## COROLLAIRE VII.

94. Les triangles BOL, FOH, étant égaux par le Corollaire précedent, si on ajoûte de part & dautre le quadrilatere commun FRBO, on aura le triangle FRL, égal au quadrilatere FRBH, & si on ôte le quadrilatere FRBO, & qu'on donne le quadrilatere PBOF, on aura le triangle PBH, égal au quadrilatere FPBL.

## COROLLAIRE VIII.

95. *L'axe AB* (Fig. 61.), *& un diametre NM, étant donnés avec leurs tangentes BF, MG, qui se croisent & qui coupent, l'une l'axe, & l'autre le diametre, si d'un point H pris sur l'Ellipse, on tire deux lignes SR, LY, paralleles aux tangentes, le triangle HSY, fait par ces paralleles & par l'axe, est égal au quadrilatere SRFB, fait par la tangente de cet axe & sa parallele comprises entre l'axe & le diametre.*

Tirez l'ordonnée MX au diametre, les triangles MXG, HSY, étant semblables, sont entr'eux comme les quarrez de leurs bases MX, HS; or ces quarrez sont entr'eux comme le rectangle AX×XB, où le quarré $\overline{OB}^2-\overline{OX}^2$, est au quarré $\overline{OB}^2-\overline{OS}^2$; donc les triangles MXG, HSY, sont entr'eux comme $\overline{OB}^2-\overline{OX}^2$ est à $\overline{OB}^2-\overline{OS}^2$. MXG. HSY :: $\overline{OB}^2-\overline{OX}^2$. $\overline{OB}^2-\overline{OS}^2$, ou MXG. $\overline{OB}^2-\overline{OX}^2$ :: HSY. $\overline{OB}^2-\overline{OS}^2$. mais les quarrez $\overline{OB}^2$, $\overline{OX}^2$, $\overline{OS}^2$, sont entreux comme les triangles semblables OBF, OXM, OSR, dont leurs côtez sont les bases; donc le triangle MXG est au triangle OBF—OXM, c'est-à-dire au quadrilatere XBFM, comme le triangle HSY, est au triangle OBF—OSR, ou au quadrilatere SBFR; or le triangle MXG, est égal au quadrilatere XBFM, par le Corollaire précedent; donc le triangle HSY, est aussi égal au quadrilatere SBFR.

Quand le point I, par où l'on tire les paralleles aux tangentes, est au-delà de l'axe par rapport au diametre, les triangles MXG, SIV, étant semblables, sont entr'eux comme les quarrez de leurs bases MX, SI, & comme ces bases sont ordonnées à l'axe, leurs quarrez sont entr'eux comme leurs rectangles correspondans. Ainsi on prouvera de même que ci-dessus, que le triangle SIV, fait par les deux paralleles & l'axe, est égal au quadrilatere SBFR, fait par la tangente de l'axe & sa parallele compriſes entre l'axe & le diametre.

Si le point I (*Fig.* 63.), se trouve situé de façon que la parallele à la tangente de l'axe, coupe l'axe en un point S, en-delà du centre par rapport à cette tangente, en sorte que IS soit en-delà de l'axe par rapport au point M du diametre, alors on tirera des tangentes aux autres extrêmités A, N de l'axe & du diametre, & l'on prouvera aisément que le triangle ISR, est égal au quadrilatere TSAQ; car tirant l'ordonnée NV à l'axe, les triangles NVG, ISR, seront comme les quarrez de leurs bases NV, IS, &c.

Si le point C (*Fig.* 62.), d'où partent les paralleles, se trouve en-delà du diametre par rapport à l'axe, & qu'il soit le même que l'extrêmité C du petit axe, le triangle COX fait par les deux paralleles, & l'axe est égal au triangle OBF, fait par la tangente de l'axe & le diametre; car les triangles COX, MIB, étant en-

treux comme les quarrez $\overline{CO}^2$; $\overline{MI}^2$; ou comme les rectangles $AO\times OB$, ou $\overline{CB}^2$, $\overline{AI}^2\times\overline{IB}^2$, sont par conséquent aussi comme le triangle OBF, au quadrilatere IBFM; & comme le triangle MIG, est égal à ce quadrilatere, le triangle COX, est aussi égal au triangle OBF, ce qui provient de ce que la parallele CO à la tangente de l'axe, rencontre l'axe & le diametre en un même point; d'où il suit que sa partie comprise entre les deux, est zero, & qu'on a un triangle au lieu d'un quadrilatere. Si le point L (*Fig.* 61.), se trouve entre le petit axe & le diametre, il est aisé de voir que le triangle LuY, est égal au quadrilatere EuBF.

Enfin si le point H (*Fig.* 62.), est en-delà du petit axe par rapport au diametre, on tirera par l'extrêmité A de l'axe, la tangente QP, jusqu'à ce qu'elle rencontre le diametre en Q, & la tangente MG, prolongée en P, & du sommet C du petit axe, tirant la parallele CX, les triangles COX, HSI, seront entr'eux comme les quarrez de leurs bases CO, HS, ou comme le rectangle $AO\times OB$, c'est-à-dire le quarré $\overline{AO}^2$ au rectangle $AS\times SB$, ou au quarré $\overline{AO}^2-\overline{SO}^2$, & par conséquent comme le triangle AQO, au quadrilatere AQSV; or le triangle COX, est égal au triangle OBF, lequel est égal au triangle AOQ; donc le triangle HSI, est égal au quadrilatere AQSV.

## COROLLAIRE IX.

96. *L'axe, le diametre, les tangentes & les paralleles étant tirées, comme dans le Corollaire précédent, le triangle ZHR* (Fig. 61.), *fait par les deux paralleles, & le diametre est égal au quadrilatere ZMGY, fait par la tangente de ce diametre & sa parallele comprises entre l'axe & le diametre.* Le triangle OFB, est égal au triangle OMG; ôtant donc de part & d'autre le commun quadrilatere OZHS, il restera d'une part le triangle ZHR, plus le quadrilatere SRFB, égaux ensemble au triangle SHY, plus le quadrilatere ZYGM, pris ensemble de l'autre; mais le quadrilatere SRFB, est égal au triangle SHY, par le Corollaire précedent; donc le triangle ZHR, est égal aussi au quadrilatere ZMYG.

Si le point H (*Fig.* 62.), d'où partent les paralleles, est en-delà du petit axe par rapport au diametre, tirez à l'extrêmité A, la tangente PQ, qui rencontre le diametre & sa tangente en Q & P,

& vous aurez le triangle APG, égal au triangle PMQ (*n.* 93.); & ôtant de part & d'autre la figure ZMPASH, il reſtera d'une part le triangle VHZ, plus le quadrilatere SAQV, égaux enſemble au triangle SHI, plus le quadrilatere IZMG, pris enſemble de l'autre ; mais le quadrilatere SAQV, eſt égal au triangle SHI, par le Corollaire précedent ; donc le triangle HVZ, eſt auſſi égal au quadrilatere IZMG.

Si le point C (*Fig.* 62.), eſt le ſommet du petit axe, le triangle COX, eſt égal au triangle OBF, par le Corollaire précedent, ou au triangle OMG, égal à OBF (*n.* 93.), ôtant donc de part & d'autre le triangle commun O*a*X, le triangle CO*a*, eſt égal au quadrilatere *a*MGX.

Si le point L (*Fig.* 61.), eſt entre le petit axe & le diametre, le triangle L*u*Y, eſt égal au quadrilatere *u*EBF, par le Corollaire précedent, & ôtant d'une part, le triangle SHV, & de l'autre le quadrilatere SBFR, égal à ce triangle, on aura le quadrilatere L*u*SH, égal au quadrilatere E*u*SR, & ôtant la figure commune *u*EZHS, on aura le triangle LEZ, égal au triangle ZRH, & par conſéquent au quadrilatere ZMGY, égal à ZRH.

Si le point I (*Fig.* 61.) eſt en-delà du grand axe par rapport au diametre, le triangle SIV, eſt égal au quadrilatere SBFR, par le Corollaire précedent ; ajoûtant donc de part & d'autre la figure V*c*RS, on aura le triangle I*c*R, égal au quadrilatere V*c*FB, ou au quadrilatere V*c*MG, égal à V*c*FB, à cauſe de B*b*G = *b*MF.

Si le point I (*Fig.* 64.), eſt entre l'axe & le petit diametre, & que la parallele IH, coupe l'axe du côté de A, du point N, tirez la tangente QP, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'axe & ſa tangente aux points Q, P, & vous aurez le triangle NFP, égal au triangle BQP (*n.* 93.) ; ôtant donc de part & d'autre la figure XIVBPN, il reſtera d'une part le triangle XIZ, plus le quadrilatere ZVBF, qui pris enſemble, ſeront égaux au triangle IHV, plus le quadrilatere HXNQ, pris enſemble de l'autre ; & ôtant d'une part le quadrilatere ZVBF, & de l'autre le triangle IHV, égal à ce quadrilatere, il reſtera le triangle IXZ, égal au quadrilatere HXNQ.

Si le point D (*Fig.* 65.), eſt ſur l'extrêmité du petit axe, le triangle ODX, eſt égal au triangle OAK, ou à ſon égal ONH, par le corollaire précedent, & ôtant de part & d'autre le triangle

commun XLO, il reſtera le triangle DOL, égal au quadrilatere XLNH.

Si le point I (*Fig. 63.*), eſt au-delà du petit axe par rapport au grand, le triangle IRS, eſt égal au quadrilatere STQA, ou au quadrilatere STNG, par le Corollaire précedent, & ôtant la partie commune RZTS, il reſtera le triangle IZT, égal au quadrilatere NZGR.

Enfin ſi le point I (*Fig. 66.*), étoit de façon que la parallele IT, paſſât de l'autre côté de l'axe, le triangle IHR, ſeroit égal au quadrilatere XHBF, par le Corollaire précedent, ou au quadrilatere XHGM, & ôtant la partie commune XHRZ, on auroit le triangle IXZ, égal au quadrilatere ZRGM.

## COROLLAIRE X.

97. *Toutes les lignes tirées dans l'Ellipſe parallelement à la tangente MG, d'un diametre MN* (Fig. 67.), *ſont coupées en deux parties égales par ce diametre, & lui ſont par conſéquent ordonnées.* Premierement celle qui paſſera par le centre O, ſera coupée en deux également, étant elle-même un diametre (*n. 93.*).

En ſecond lieu, celles qui ſont compriſes entre O, & la tangente, comme IR, ſeront auſſi coupées en deux également; car le triangle IXZ, étant égal au quadrilatere ZVGM, par le Corollaire précedent, eſt par conſéquent égal au triangle ZRP, égal à ce quadrilatere; mais ces triangles ſont ſemblables: donc IZ = ZR. De même (*Fig. 62.*), le triangle HVZ, étant égal au quadrilatere ZIGM, eſt par conſéquent égal au quadrilatere ZIBF, & comme le petit triangle I*br*, eſt égal au quadrilatere correſpondant, il s'enſuit que le triangle HVZ, eſt égal au triangle K*Zr*, & par conſéquent à cauſe de la ſimilitude de ces triangles HZ = *Zr*.

En troiſiéme lieu, on prouvera de la même maniere que les paralleles qui ſont au-delà du centre O (*Fig. 63. 64. 65.*), ſont diviſées en deux également par le diametre MN.

## DEFINITION VIII.

98. Lorſqu'un diametre PQ (*Fig. 68.*), eſt parallele à la tangente MG, d'un autre diametre MN, les deux diametres s'appellent *diametres conjugués*; une ligne troiſiéme proportionnelle au diametre PQ, & au diametre MN, s'appelle *parametre* du diametre PQ, & une ligne troiſiéme proportionnelle au diametre

MN, & au diametre PQ, s'appelle *parametre* du diametre MN.

### COROLLAIRE XI.

99. *Le quarré d'une ordonnée SH* (Fig. 68.), *à un diametre MN, eſt au rectangle des parties MS, SN, qu'elle coupe comme le quarré du diametre conjugué PQ, au quarré du diametre MN.* Tirant QT, HI, perpendiculaires à l'axe, le triangle OQT, eſt égal au triangle OFB, ou à OMG, à cauſe que le triangle OQX, eſt égal au quadrilatere XTFB (*n.* 95.), & le triangle SHI, par le Corollaire précedent, eſt égal au quadrilatere SRMG; or le quarré de l'ordonnée SH, eſt au quarré de l'ordonnée OQ, comme le triangle SHI, au triangle ſemblable OQT; donc ces deux quarrez ſont entr'eux comme le quadrilatere SRMG, & le triangle MOG; mais le quadrilatere SRMG, eſt au triangle MOG, comme le rectangle MS×SN, au quarré $\overline{MO}^2$; donc le quarré de SH, eſt au quarré de QO, comme MS×SN, au quarré $\overline{MO}^2$, & permutant $\overline{SH}$. MS×SN :: $\overline{QO}^2$. $\overline{MO}^2$. & mettant au lieu des quarrez de QO, MO, les quarrez de QP, MN, qui ſont en même raiſon, on aura $\overline{SH}^2$. MS×SN :: $\overline{QP}^2$. $\overline{MN}^2$.

### COROLLAIRE XII.

100. Puiſque les quarrez des ordonnées à MN, ſont à leurs rectangles correſpondans comme le quarré du diametre conjugué QP, au quarré de MN, il s'enſuit que les quarrez des ordonnées ſont entr'eux comme leurs rectangles correſpondans.

### COROLLAIRE XIII.

101. On démontrera de la même façon que nous avons fait par rapport à l'axe (*n.* 78.), que le quarré d'une ordonnée à un diametre, eſt moindre que le rectangle de ſon abſciſſe par ſon parametre, en prenant pour abſciſſe la petite partie du diametre que cette ordonnée coupe.

### COROLLAIRE XIV.

102. *Un diametre AB* (Fig. 69.) *étant donné, & une ordonnée DS, moindre que le demi-diametre conjugué, ſi l'on prend une troiſiéme pro-*

*portionnelle QF, aux deux lignes QD, QA, la ligne FS, sera tangente de l'Ellipse.*

Pour bien entendre la démonstration de ceci, il faut sçavoir que si l'on a quatre grandeurs 7. 3. 4. 2. dont le produit 14. des extrêmes soit plus grand que le produit 12. des moyens, il faut nécessairement que la premiere soit plus grande par rapport à la seconde, que la troisiéme par rapport à la quatriéme; car si les deux raisons étoient égales, le produit des extrêmes seroit égal à celui des moyens: mais le premier produit est plus grand; donc il faut ou que le premier terme, ou que le quatriéme soient devenus plus grands; or si le premier terme est devenu plus grand, la raison de ce terme au second, est donc plus grand que celle du troisiéme au quatriéme; & si c'est le quatriéme qui se soit aggrandi, la raison du troisiéme à ce quatriéme, sera par conséquent devenuë moindre que celle du premier au second; donc, &c.

Cela posé, si l'on prétend que la ligne FSH, ne soit pas tangente, mais qu'elle coupe l'Ellipse, d'un point G, je tire au diametre AB, une ordonnée GX, qui coupe la ligne FH en H; de l'extrêmité A, je tire AM, parallele à FH, & de l'autre extrêmité B, je tire BP, parallele aussi à FH, jusqu'à ce qu'elle coupe l'ordonnée SD prolongée en P; enfin de l'extrêmité S, de l'ordonnée SD, je tire la ligne SXR, par le point X, où l'ordonnée GX, coupe le diametre. Puisque :: QD. QA. QF. donc BD. DA :: BF. FA (*n.* 90.); or à cause des triangles semblables BDP, DAN, on a BP. AN :: BD. DA. mais BD. DA :: BF. AF :: BS. MS :: BP. NM. donc puisque BP. AN :: PB. NM. on a AN = NM. & par conséquent la ligne AM étant divisée en deux également en N, & en deux inégalement en O, le rectangle AN×NM, est plus grand que le rectangle AO×OM. Donc la raison NM. OM. est plus grande que la raison AO. AN. car autrement le produit AN×NM des extrêmes, seroit égal au produit des moyens AO×OM, & les deux rectangles seroient égaux; or à cause des triangles semblables MNS, BPS, & MOS, BSR, on a NM. MO :: BP. BR. donc la raison BP. BR. est plus grande que la raison AO. AN, & par consequent le rectangle BP×AN, est plus grand que le rectangle BR×AO. donc BP×AN, est plus grand par rapport au quarré $\overline{FS}$, que BR×OA, par rapport à ce même quarré; mais les triangles semblables BDP, ADN, FDS, donnent BD. AD :: BP. AN. & BD. FD :: BP. FS. ou BD. BP

:: AD. AN :: FD. FS. donc BD×AD. $\overline{FD}^2$ :: BP×AN. $\overline{FS}^2$. de même les triangles semblables BXR. AXO. FXS, donnent BX. BR :: AX. AO :: FX. FS. donc BX×AX. $\overline{FX}^2$ :: BR×AQ. $\overline{FS}^2$. donc puisque la raison BP×AN. $\overline{FS}^2$. est plus grande que la raison BR×AO. $\overline{FS}^2$, la raison BD×AD. $\overline{FD}^2$, est plus grande que la raison BX×AX. $\overline{FX}^2$. & *permutando*, la raison BD×AD. BX ×AX. est plus grande que la raison $\overline{FD}^2$. $\overline{FX}^2$.

Mais par la proprieté de l'Ellipse, BD×AD. BX×AX :: $\overline{SD}^2$. $\overline{GX}^2$, & à cause des triangles semblables FDS. FXH, on a $\overline{SD}^2$. $\overline{HX}^2$ :: $\overline{FD}^2$. $\overline{FX}^2$. donc la raison $\overline{SD}^2$. $\overline{GX}^2$. est plus grande que la raison $\overline{SD}^2$. $\overline{HX}^2$, & par conséquent HX, est plus grand que GX; donc il faut nécessairement que le point H, soit en-delà de l'Ellipse sur le prolongement de GX, & non pas en-dedans, comme on le supposoit.

## COROLLAIRE XV.

103. D'où il suit que si l'on a deux diametres AB, CD (*Fig.* 70.), avec leurs tangentes AF, CG, qui se croisent, & qui vont aboutir aux diametres opposés, les ordonnées AR, CH, qu'on tirera des points d'attouchement, donneront :: QH. QA. QG. & QR. QC. QF. & par conséquent tout ce que nous avons dit par rapport à un diamerre & l'axe, soit au sujet des triangles AGO, COF, ou des triangles QGC, QAF, ou enfin des triangles & des quadrilateres comparés ensemble, & de ceux que forment les lignes paralleles aux tangentes tirées d'un point de l'Ellipse, doit s'étendre à deux diametres, & se peut prouver de la même façon.

## COROLLAIRE XVI.

104. *Deux diametres AB, CD* (Fig. 71.), *étant donnés avec leurs tangentes AG, CF, qui se croisent & qui vont aboutir sur les diametres opposés, si de deux points Q, P, pris entre ces diametres, on tire des paralleles aux tangentes, le quadrilatere OPHI, fait par deux paralleles compriſes entre un diametre & la parallele la plus proche, est égal au*

*au quadrilatere OQSR, faits par les deux autres paralleles compriſes entre l'autre diametre & la parallele la plus proche.*

De même *le quadrilatere QXIH, faits par deux paralleles compriſes entre un diametre & la parallele la plus éloignée, eſt égal au quadrilatere XPSR des deux autres paralleles compriſes entre l'autre diametre & la parallele la plus éloignée*; ce qu'on démontrera, ainſi que nous avons fait par la parabole (*n.* 29.).

## COROLLAIRE XVII.

105. *Deux diametres AB. CD* (Fig. 72. 73.), *étant donnés avec leurs tangentes qui ſe croiſent, ſi d'un point E, pris ſur la courbe, ou entre les deux diametres, ou en-dehors, on tire une ordonnée EF à l'un des diametres, & qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre la tangente de l'autre diametre en I, le rectangle de toute la ligne FI, par ſa partie exterieur EI, eſt au quarré de la partie IC de la tangente qu'elle coupe, comme le quarré de la tangente AO, au quarré de la tangente OC.* Ce qui ſe prouvera de même que pour la parabole (*n.* 30.).

## COROLLAIRE XVIII.

106. *Deux diametres AB, CD* (Fig. 74. 75. 76.), *étant donnés avec leurs tangentes AF, CG, qui ſe croiſent en O, & qui vont aboutir aux diametres oppoſés, ſi de deux points P, Q, pris ſur la courbe, on tire des ordonnées PT, QS aux diametres, en ſorte qu'elles ſe coupent, le rectangle PR, RT des parties de l'une, ſera au rectangle QR×RS des parties de l'autre, comme le quarré* $\overline{OC}^2$ *de la tangente parallele à la premiere, au quarré* $\overline{AO}^2$ *de la tangente parallele à la ſeconde.* Ce qui ſe démontre de même que pour la parabole (*n.* 31.).

## COROLLAIRE XIX.

107. *Si l'on joint les deux extrêmitez C, A, de deux diametres* (Fig. 77.), *par une ligne droite CA, & qu'après l'avoir diviſée en deux également en I, on tire du point O, où les tangentes ſe croiſent, la droite OIH, cette ligne OH ſera un diametre, dont toutes les paralleles à CA, ſeront les ordonnées*; ce qui ſe prouve de même que pour la parabole (*n.* 45.).

## COROLLAIRE XX.

108. *Le quarré d'une ordonnée MN à un diametre CD* (Fig. 77.);

*est égal au quarré* $\overline{HR}^2$ *du demi diametre conjugué, moins le produit* $\overline{RH}^2 \times \overline{HN}^2$ *de ce même quarré par le quarré de la partie HN, compriſe entre le centre & l'ordonnée, diviſé par le quarré* $\overline{CH}^2$ *du demi-diametre de l'ordonnée, c'eſt-à-dire* $\overline{MN}^2 = \overline{HR}^2 - \frac{\overline{HR}^2 \times \overline{HN}^2}{\overline{CH}^2}$. Par la proprieté de l'Ellipſe on a $\overline{CH}^2$. $\overline{HR}^2$ :: CN×ND. $\overline{NM}^2$, & mettant $\overline{CH}^2 - \overline{NH}^2$, au lieu du rectangle CN×ND, on aura $\overline{CH}^2$. $\overline{HR}^2$ :: $\overline{CH}^2 - \overline{NH}^2$. $\overline{NM}^2$. mais dans toute proportion droite de quatre termes, le produit des moyens diviſé par le premier terme, eſt égal au dernier terme; donc $\frac{\overline{HR}^2 \times \overline{CH}^2 - \overline{HR}^2 \times \overline{NH}^2}{\overline{CH}^2} = \overline{NM}^2$. or $\frac{\overline{HR}^2 \times \overline{CH}^2}{\overline{CH}^2}$ eſt la même choſe que $\overline{HR}^2$, parce que la diviſion défait ce qu'avoit fait la multiplication; donc $\overline{NM}^2 = \overline{HR}^2 - \frac{\overline{HR}^2 \times \overline{NH}^2}{\overline{CH}^2}$ & c'eſt la même choſe à l'égard d'une ordonnée à l'axe.

## PROBLEME XXII.

109. *Une Ellipſe ACDB* (Fig. 78.), *étant donnée, trouver ſes axes, ſes foyers, & les parametres des axes.*

Tirez dans l'Ellipſe deux ou pluſieurs lignes paralleles HI, LA, &c. que vous diviſerez chacune en deux parties égales; faites paſſer par les points de diviſion une droite EP, qui ſera par conſéquent un diametre. Diviſez EP, en deux parties égales en O, qui ſera le centre de l'Ellipſe; du point O, & de l'intervalle OE, ou OP, décrivez un cercle, ſi ce cercle touche l'Ellipſe ſans le couper, le diametre EP ſera le grand axe, parce que le cercle circonſcrit à l'Ellipſe, a pour diametre le grand axe; mais s'il coupe l'Ellipſe, il la coupera en quatre points E, R, P, S (*n.* 85.) également éloignés des ſommets des axes. Ainſi joignant ces points par les droites ER, RP, PS, SE, & diviſant chacune de ces lignes en deux parties égales les droites AB, CD, qui paſſeront par les points de diviſion, ſeront les deux axes, leſquels étant trouvés,

il ſera facile d'avoir les deux foyers & les parametres, ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus.

## PROBLEME XXIII.

110. *Deux diametres conjugués AB, CD* (Fig. 79.), *étant donnés, trouver les deux axes & décrire l'Ellipſe.*

Par le ſommet A de l'un des diametres, tirez ET, parallele à l'autre diametre. Sur ET, élevez la perpendiculaire AO, que vous ferez égale à la moitié CS du diametre conjugué; du point O & de l'intervalle OA, décrivez un cercle RAGQ, & joignez les centres de l'Ellipſe, & du cercle par la droite OS, que vous diviſerez en deux également en F, & du point F, élevez la perpendiculaire FN, qui coupe la droite ET en N; enfin portez la diſtance NO, ou NS, de N en T, & de N en E, & tirez les droites ES, TS, qui feront un angle droit au centre S de l'Ellipſe, à cauſe que le cercle qui auroit pour centre le point N, paſſeroit par les points E, S, T; ainſi prolongez de part & d'autre les lignes ES, TS, & pour déterminer la grandeur des axes, tirez du point O, les droites OE, OT, & par les points R, G, où elles coupent le cercle RAGQ, tirez RI, GH, paralleles à la droite OS, & les points I, H, où elles rencontreront les droites TS, ES, marqueront l'extrêmité des deux axes, en ſorte que HS, TS, ES, marqueront l'extrêmité des deux axes, en ſorte que HS, ſera la moitié du grand axe, & IS, la moitié du petit, & ceci étant trouvé, il ſera facile d'achever l'Ellipſe.

### DEMONSTRATION.

Du point H, tirez l'ordonnée HX au diametre AB, & du point G la parallele GZ, les triangles ſemblables STO, HTG; STA, SHX; OTA, OGZ, donnent SA. SX :: ST. SH :: OT. OG :: OA. OZ. donc SA. SX :: OA. OZ. donc la droite ZX eſt parallele à OS, puiſque les triangles OAS, ZAX, ſont ſemblables, & par conſéquent elle eſt auſſi parallele à GH; d'où il ſuit que GZ = HX. Puis donc que nous avons SA. SX :: OA. OZ. mettant au lieu de OA, ſon égale SD, nous avons SA. SX :: SD. OZ. & par conſéquent $OZ = \frac{SX \times SD}{SA}$, & $\overline{OZ}^2 = \frac{\overline{SX}^2 \times \overline{SD}^2}{\overline{SA}^2}$. Mais dans le triangle rectangle ZOG, le quarré

de ZG, ou le quarré de son égale HX, est égal au quarré de OG; ou de SD, qui lui est égal, moins le quarré de OZ; donc

$\overline{HX}^2 = \overline{SD}^2 - \frac{\overline{SX}^3 \times \overline{SD}^2}{\overline{SA}^2}$ & par conséquent HX, est ordonnée au diametre SA (*n.* 108.), & le point H, est un point de l'Ellipse.

On démontrera de la même façon que le point I est à l'Ellipse.

## PROBLEME XXIV.

111. *Une Ellipse ACBD* (Fig. 80.), *étant donnée, décrire sur une ligne donnée* ab, *une autre Ellipse semblable* (Fig. 81.).

Prenez une quatriéme proportionnelle *cd* au grand axe AB, au petit CD, & à la ligne donnée *ab*, & prenant *ab* pour le grand axe de l'Ellipse demandée, & *cd* pour le petit, décrivez l'Ellipse *acdb*, qui sera semblable à la donnée ACBD.

### DEMONSTRATION.

Divisez l'axe AB, en telles parties que vous voudrez aux points R, T, &c. & tirant les doubles ordonnées FE, HG, &c. inscrivez la figure rectiligne AECGBHDF; divisez l'axe *ab*, en parties proportionnelles à celles de l'axe AB, aux points *r*, *t*, &c. & tirant les doubles ordonnées *fe*, *hg*, &c. inscrivez la figure rectiligne *aecgbhdf*, qui sera semblable à la figure AECGBHDF; car les triangles AFE, *afe*, donneront AR, *ar*, :: FE. *fe*, à cause que FE. *fe* :: CD. *cd*, & CD. *cd* :: AB. *ab* :: AR. *ar*. Donc ces deux triangles seront semblables, & l'on prouvera de même que les trapezoïdes FECD, *fecd*, sont semblables, de même que les trapezoïdes DCGH, *dcgh*, & les triangles HGB, *hgb*; d'où il suit que les deux figures composées de ces triangles & de ces trapezoïdes semblables, seront aussi semblables entr'elles.

### COROLLAIRE.

112. Comme il n'est pas nécessaire que dans toutes les Ellipses le rapport du petit axe au grand, soit toujours le même, il s'ensuit que toutes les Ellipses ne sont pas semblables, & que pour les rendre telles, il faut que les petits axes soient proportionnels aux grands, parce que cette condition, une fois posée, toutes les autres lignes, comme l'éloignement des foyers, les parametres, &c. deviennent proportionnelles.

## LEMME.

113. *Deux diametres AB, CD* (Fig. 82.), *étant coupés proportionnellement aux points X, Q, en ſorte que XB, ſoit à XA, comme CQ à QD, les ſegmens EBF, GCH, ſont proportionnels.*

### DEMONSTRATION.

Puiſque BX. XA :: CQ. QD. donc BX. BA :: CQ. CD, & XA. BA :: QD. CD. & multipliant les termes de ces deux proportions les uns par les autres, on aura $BX \times AX. \overline{BA}^2 :: CQ \times QD. \overline{CD}^2$. ou $BX \times AX. CQ \times QD. \overline{BA}. \overline{CD}^2$. concevant donc que XB, ſoit diviſé en pluſieurs parties égales, & que CQ, ſoit diviſé en égal nombre de parties, qui ſeront par conſéquent proportionnelles à celles de XB, on aura auſſi $BZ \times ZA. CV \times VD :: \overline{BA}. \overline{CD}^2$. donc $BX \times AX. CQ \times QD :: BZ \times ZA. CV \times VD$. ou $BX \times AX. BZ \times ZA :: CQ \times QD. CV \times VD$. & mettant au lieu des rectangles les quarrez des ordonnées qui ſont en même raiſon, on aura $\overline{EX}^2. \overline{TZ}^2 :: \overline{QH}^2. \overline{VP}^2$. donc EX. TZ :: QH. VP. & comme cela arrivera à toutes les ordonnées qu'on tirera de la même façon de part & d'autre, il s'enſuit que les deux ſegmens GCH, FEB, ſont proportionnels.

### COROLLAIRE I.

114. *Si les baſes FE, GH de deux ſegmens proportionnels ſont égales, ces ſegmens ſeront entr'eux comme leurs hauteurs BX, CQ.* Ayant diviſé les hauteurs en un même nombre de petites parties égales & proportionnelles, qui ſoient extrêmement proches les unes des autres, & tiré les doubles ordonnées, à l'extrêmité deſquelles on élevera des petites lignes qui formeront dans le ſegment FBE, des petits rectangles circonſcrits, & dans le ſegment GCH, autant de parallelogrames circonſcrits; les rectangles & les parallelogrames ayant les baſes égales chacune à chacune, ſeront entr'eux comme leurs hauteurs, & par conſéquent comme BX, CQ; donc la ſomme des rectangles ſera à la ſomme des parallelogrames comme BZ à CQ; mais chaque rectangle ayant la hauteur infiniment petite, l'excès dont la ſomme des rectangles

surpassera le segment FEB, sera infiniment petit, & par conséquent cette somme pourra être regardée comme le segment même. Par la même raison la somme des parallelogrames pourra être regardée comme égale au segment GCH; Donc FEB. GCH :: BX. CQ.

### COROLLAIRE II.

115. *Si les hauteurs de deux segmens proportionnels sont égales, ces segmens seront comme leurs bases.* Chaque rectangle sera à chaque parallelograme comme la base à la base, ou comme XE à QH; donc, &c.

### COROLLAIRE III.

116. *Si les bases sont réciproques aux hauteurs, les segmens seront égaux.* Les rectangles & les parallelogrames ayant les bases réciproques aux hauteurs, seront égaux entr'eux; donc, &c.

### PROBLEME XXV.

117. *Un segment d'Ellipse ABC* (Fig. 83. 84. 85.) *étant donné, & un diametre HI, faire avec ce diametre un segment égal au segment donné.*

Prenez une quatriéme proportiennelle HZ, au diametre BF, du segment donné à sa partie BV, comprise dans le segment, & au diametre HI, & tirez par le point Z la double ordonnée PQ, au diametre HI, laquelle formera le segment PHQ, égal au segment ABC.

### DEMONSTRATION.

Il peut arriver ou que les bases des deux segmens se croisent dans l'Ellipse, ou qu'elles se rencontrent hors de l'Ellipse, ou sur la circonference de l'Ellipse.

Si les bases se coupent dans l'Ellipse (*Fig.* 83.); tirez les tangentes BG, HG, des diametres, tirez la droite HB, & du point G, tirez sur le milieu de HB, la ligne GO, qui sera un diametre (*n.* 107.), tirez les droites AQ, ZV, PC, & enfin dans les segmens les droites BC, HP. Cela posé, puisque BV, VF :: HZ. ZI. par la construction; donc BV VO :: HZ. ZO. & par conséquent ZV, est parallele à HB, & à cause des bases PQ, AC, paralleles aux tangentes HG, GB, on a HG. GB :: ZX. XV.

Or PQ étant divisé en deux également en Z, & en deux iné-

galement en X, de même que AC eſt diviſé en deux également en V, & en deux inégalement en X, on a QX×XP. AX×XC :: $\overline{HG}^2$. $\overline{GB}^2$ :: $\overline{ZX}^2$. $\overline{XV}^2$ (*n.* 105.) ou QX×XP. $\overline{ZX}^2$ :: AX×XC. $\overline{XV}^2$, & compoſant QX×XP+$\overline{ZX}^2$. $\overline{ZX}^2$ :: AX×XC+$\overline{XV}^2$ $\overline{XV}^2$. mais QX×XP+$\overline{ZX}^2$=$\overline{ZQ}^2$=$\overline{ZP}^2$, & AX×XC+$\overline{XV}^2$=$\overline{VC}^2$. donc $\overline{PZ}^2$. $\overline{ZX}^2$ :: $\overline{CV}^2$. $\overline{XV}^2$. & par conſéquent PZ. ZX :: CV. XV. d'où il ſuit que PC, eſt parallele à ZV & à HB, à qui ZV eſt parallele.

De même puiſque $\overline{QZ}^2$. $\overline{ZX}^2$ :: $\overline{AV}^2$. $\overline{VX}^2$. donc QZ. ZX :: AV. VX. & *dividendo*, QX. ZX :: AX. VX. donc les lignes ZV, AQ, ſont auſſi paralleles, & par conſéquent les quatre lignes HB, AQ, ZV, PC, ſont ordonnées au diametre GOM, & coupées chacune en deux parties égales.

Donc les trapezoïdes HBPC, HBZV, PCZV, ſont coupés chacun en deux parties égales par ce diametre; ôtant donc du trapezoïde HBPC, les trapezoïdes HBVZ, PCVZ, il reſtera le triangle PZH, égal au triangle CVB; donc la baſe PZ du premier eſt à la baſe VC du ſecond réciproquement, comme la hauteur de ce ſecond eſt à la hauteur du premier, & doublant les baſes, on aura la baſe PQ du ſegment PHQ, eſt à la baſe AC du ſegment ABC réciproquement, comme la hauteur du ſecond triangle à la hauteur du premier; mais ces triangles ayant les mêmes ſommets que les ſegmens ont les hauteurs égales à celles des ſegmens; donc les ſegmens ont les baſes réciproques aux hauteurs, & par conſéquent ils ſont égaux (*n.* 116.), & il eſt viſible par la conſtruction qu'ils ſont proportionnels.

Si les baſes PQ, AC (*Fig.* 84.), ne ſe rencontrent que hors de l'Ellipſe, on a par la conſtruction BV, VO :: HZ. ZO. & par conſéquent les lignes HB, ZV, ſont paralleles; de même on a QZ. ZP :: AV. VC. donc les lignes PC, ZV, QA, ſont auſſi paralleles; mais HB étant ordonnée à GM par la conſtruction, les autres paralleles ſont auſſi ordonnées à ce même diametre, & les trapezoïdes HBPC, HBZV, ZVPC, ſont diviſés chacun en deux parties égales; ôtant donc du trapezoïde HBPC, les deux autres trapezoïdes, on aura le triangle PZH, égal au triangle CVB, &c.

Enfin ſi les baſes PQ, AC (*Fig.* 85.), ſe rencontrent ſur la cir-

conference, on a QZ. ZP :: AV. VC. donc les droites ZV, PC, ſont paralleles, de même à cauſe de BV. VO :: HZ. ZO. les droites HB. ZV. ſont paralleles; donc on trouvera de même que ci-deſſus, le triangle PZH, égal au triangle CVB, &c.

### COROLLAIRE.

118. *Deux ſegmens étant égaux* (Fig. 85.), *ſi par le milieu Z de l'une des baſes, on tire une parallele* ab *à l'autre baſe, le rectangle* $aZ \times Zb$ *des parties de cette ligne eſt égal au quarré* $\overline{AV}^2$ *de la moitié de l'autre baſe.*

Puiſque les lignes *ab*, PQ, ſe coupent dans l'Ellipſe, on a $PZ \times ZQ. aZ \times Zb :: \overline{HG}^2. \overline{GB}^2$ (*n.* 106.), & comme $\overline{HG}^2. \overline{GB}^2 :: \overline{ZQ}^2. \overline{AV}^2$. on a $PZ \times ZQ.$ ou $\overline{ZQ}^2. aZ \times Zb :: \overline{ZQ}^2. \overline{AV}^2$. mais les deux antecedens ſont égaux; donc les deux conſéquens le ſont auſſi.

Ceci eſt également vrai par rapport à la parabole & l'on doit y faire attention, parce que nous en ferons uſage en parlant des ſolides.

### PROBLEME XXVI.

119. *Meſurer une Ellipſe* (Fig. 49.).

Décrivez un cercle AEBF, autour du grand axe AB, meſurez ce cercle, puis dites: par regle de trois, comme le grand axe AB eſt au petit CD; ainſi le cercle eſt à l'Ellipſe, & le quatriéme terme de cette proportion vous donnera la ſurface de l'Ellipſe; car par la génération de cette courbe, chaque Element du cercle eſt à ſon Element correſpondant comme le diametre EF, où le grand axe eſt au petit axe CD; donc la ſomme des Elemens du cercle, ou le cercle même eſt à celle des Elemens de l'Ellipſe, ou à l'Ellipſe, comme EF à CD.

Ou bien prenez une moyenne proportionnelle entre EF & CD, & le cercle que vous décrirez autour de cette moyenne proportionnelle priſe pour diametre, ſera égal à l'Ellipſe; car appellant la moyenne proportionnelle X, vous aurez :: EF. X. CD. donc $\overline{EF}^2. \overline{X}^2 ::$ EF. CD. mais les cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres; donc le cercle du diametre EF, ſera au cercle du diametre X, comme EF à CD, ou comme le cercle

cercle du diametre EF, est à l'Ellipse ; & par conséquent le cercle du diametre X, sera égal à l'Ellipse.

### COROLLAIRE I.

120. Les diametres EF, X, CD, étanten proportion continuë, leurs cercles le seront aussi ; donc le cercle du diametre X, est moyen proportionnel entre le cercle du diametre EF, & le cercle du diametre CD ; mais le cercle du diametre X, est égal à l'Ellipse : donc *l'Ellipse est moyenne proportionnelle entre les deux autres cercles, c'est-à-dire entre le circonscrit & l'inscrit.*

### COROLLAIRE II.

121. On peut donc mesurer l'Ellipse par le moyen du cercle inscrit, en disant : comme le petit axe est au grand, ainsi le cercle inscrit est à l'Ellipse, ou bien en prenant une moyenne proportionnelle entre le petit axe & le grand, & décrivant un cercle autour de cette moyenne proportionnelle prise pour diametre.

### PROBLEME XXVII.

122. *Mesurer un segment d'Ellipse.*

Si la base TI du segment (*Fig.* 49.), est ordonnée au grand axe, mesurez le segment correspondant NBM du cercle circonscrit, puis dites : comme le grand axe est au petit, ainsi le segment NBM, est au segment TBI.

Si la base IV du segment (*Fig.* 55.), est ordonnée au petit axe ; mesurez le segment correspondant RC*u* du cercle inscrit, puis dites : comme le petit axe est au grand, ainsi le segment RC*u*, est au segment ICV. Ces deux cas sont évidens, après ce qui a été dit ci-dessus.

Si la base AC du segment ABC, est ordonnée à un diametre FB (*Fig.* 85.), coupez le demi-grand axe AO en N, en sorte que AN, soit à AO, comme BV à BO, & tirez l'ordonnée HB, le segment HAB, sera égal au segment ABC (*n.* 117.) ; car ce que nous avons démontré à l'égard de deux segmens faits sur deux differens diametres, se démontre aussi à l'égard de deux segmens faits, l'un sur un diametre, & l'autre sur un axe. Mesurant donc le segment HAB, vous aurez la valeur du segment ABC.

### PROBLEME XXVIII.

123. *Mesurer un secteur d'Ellipse.*

Si le secteur OTBI, est sur le grand axe (*Fig.* 49.), mesurez le secteur correspondant ONBM du cercle circonscrit, & dites: comme le grand axe est au petit axe, ainsi le secteur ONBM, est au secteur OTBI; car ces deux secteurs sont composés chacun d'un segment & d'un triangle: or le segment NBM, est au segment TBI, comme le grand axe au petit, & le triangle ONM, est au triangle OTI, comme la base NM, à la base TI, à cause de l'égalité des hauteurs, ou comme le grand axe au petit axe, donc, &c.

Si le secteur FICV (*Fig.* 55.), est sur le petit axe, mesurez le secteur correspondant FRC*u* du cercle inscrit, & dites: comme le petit axe est au grand, ainsi le secteur FRC*u*, est au secteur FICV; ce qui est évident par la même raison que nous venons d'en donner.

Enfin si le secteur OCBA (*Fig.* 85.), est sur un diametre BF, coupez le demi-grand axe en N, en sorte que AN soit à AO, comme BV à BO, tirez ensuite la double ordonnée HB, & les droites OH, OB, & le secteur OHAB, sera égal au secteur OCBA; car le segment HAB, sera égal au segment ABC, comme on a vû ci-dessus; ainsi il ne reste plus qu'à faire voir que le triangle OHB, est égal au triangle OAC; & pour cela du point B, tirez B*h*, perpendiculaire sur AC, B*h* sera la hauteur du segment ABC; de même du point O, tirez OS, perpendiculaire sur AC, OS sera la hauteur du triangle OAC; or à cause des triangles semblables *h*BV, SOV, on a B*h*. BV :: OS. OV. donc B*h*. OS :: BV. VO. mais BV. VO :: AN. NO. par la construction; donc B*h*. OS :: AN. NO. ou B*h*. AN :: OS. NO. de même que BV. AN :: VO. NO. Cela posé, dans les segmens égaux HAC, ABC, on a HB. AC :: B*h*. AN. à cause des bases réciproques aux hauteurs (*n.* 116.); donc HB. AC :: OS. NO. & par conséquent les triangles OHB, OAC, ayant les bases HB, AC, réciproques aux hauteurs OS, NO, sont égaux; ajoûtant donc le triangle OHB, au segment HAB, & le triangle OAC, au segment ABC, le secteur OHAB, sera égal au secteur OABC; ainsi mesurant le premier comme ci-dessus, on aura la mesure du second.

### COROLLAIRE.

124. on mesurera de la même façon les bandes ou zones Elliptiques, les couronnes, &c. ce qui ne demande pas que je m'y arrête plus long-temps.

## SECTION IV.

### *De l'Hyperbole considerée hors du Cone.*

### PROBLEME XXIX.

125. *Décrire une hyperbole* (Fig. 86.).

Prenez deux lignes AB, CD, égales, ou inégales entr'elles, mettez-les perpendiculairement l'une sur l'autre, en sorte qu'elles se coupent mutuellement en deux parties égales; prolongez AB de part & d'autre indéfiniment, & prenez sur son prolongement BG, des parties égales BE, EF, FG, &c. à l'extrêmité B; élevez la perpendiculaire indéfinie BR; & du point O pris pour centre, décrivez des cercles, dont les rayons soient OE, OF, OG, &c. ensuite prenez une quatriéme proportionnelle aux lignes AB, CD, BP, & mettez-la perpendiculairement au point E de E en H; de même prenez une quatriéme proportionnelle aux lignes AB, CD, BQ, & mettez-la perpendiculairement de F en L, & ainsi de suite, faites passer une courbe par les extrêmitez B, H, I, L, de ces proportionnelles, & l'espace GBHIL, sera une demi-hyperbole; & faisant la même chose de l'autre côté, on aura l'hyperbole entiere XBL, qu'on pourra augmenter à l'infini.

Il est visible qu'on peut décrire du côté de A, une autre courbe ZAN, qui sera parfaitement égale à la courbe XBL.

### DEMONSTRATION.

Par la nature du cercle le quarré de BP, est égal au rectangle EB×BS, & comme SA = EB, il s'ensuit que BS est égal à AE, & que par conséquent EB×BS = EB×AE. par la même raison $\overline{BQ}^2 = BF \times AF$. & $\overline{BR}^2 = BG \times AG$. or par la construction EH. BP :: CD. AB. & FI. BQ :: CD. AB. &c. donc EH. BP :: FI. BQ. ou EH. FI :: BP. BQ. donc $\overline{EH}^2$. $\overline{FI}^2$ :: $\overline{BP}^2$. $\overline{BQ}^2$. & mettant au lieu des deux derniers quarrez les rectangles qui leur sont égaux, on aura $\overline{EH}^2$. $\overline{FI}^2$ :: EB×AE. FB×AF. & par conséquent la courbe BLIH, est une hyperbole (*n.* 8.), puisque les quarrez des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses par l'axe prolongé jusqu'à l'extrêmité de ces abscisses.

### DEFINITION VIII.

126. La ligne AB, s'appelle le *premier axe*, ou autrement *axe tranſverſal*, la ligne CD, le *ſecond axe*, & tous les deux enſemble, *axes conjugués*; les hyperboles XBL, ZAN, *hyperboles oppoſées*, une ligne troiſiéme proportionnelle au premier axe & au ſecond, s'appelle le *parametre* du premier, & la ligne troiſiéme proportionnelle au ſecond axe & au premier, s'appelle le parametre du ſecond; le point O, s'appelle le *centre* de l'hyperbole; toute ligne tirée du point O, & qui coupe l'hyperbole, s'appelle *diametre déterminé*; & toute ligne tirée du même point, & qui ne coupe pas l'hyperbole, ſe nomme *diometre indéterminé*; enfin ſi on prend la diſtance BD, ou BC, & qu'on la porte de part & d'autre de O en E, & de O en S, les points E, S, ſeront *les foyers* des hyperboles oppoſées.

### COROLLAIRE I.

127. *Le quarré* $\overline{CO}^2$ *de la moitié du ſecond axe* (Fig. 86.), *eſt égal au rectangle* $BE \times AE$ *de l'abſciſſe compriſe entre l'un des foyers E, & le ſommet B de l'hyperbole par la ligne AE, qui eſt le premier axe prolongé juſqu'à l'extrémité de cette abſciſſe.* A cauſe du triangle rectangle OCB, on a $\overline{CO}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{OB}^2$. mais $\overline{CB}^2 = \overline{OE}^2$. donc $\overline{CO}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{OB}^2$. mais l'axe AB, étant diviſé en deux également en O, & l'abſciſſe BE lui étant ajoûtée, on a $\overline{OE}^2 - \overline{OB}^2 = BE \times AE$. (*Partie 1. n* 238.); donc $\overline{CO}^2 = BE \times AE$.)

### COROLLAIRE II.

128. *Si de l'un des foyers S, & d'un intervalle SP, plus grand que SB* (Fig. 87.), *on décrit un arc, & que de l'autre foyer E, & d'un intervalle EP, égal à SP, moins l'axe AB, on décrive un autre arc qui coupe le précédent en P, le point P ſera à l'hyperbole.*

Du point P tirez PV, perpendiculaire à l'axe AB prolongé, & de ce même point pris pour centre, & de l'intervalle PE, décrivez un cercle QREN, & prolongez SP en Q; enfin diviſez SN en deux également en T, il eſt évident que TP, ſera la moitié de SQ, & OV la moitié de SR; de plus SN ſera égal à AB, & ST, ou TN = OB. Cela poſé.

A cauſe des ſecantes SQ, SR, on a SN. SE :: SR. SQ. & prenant les moitiés de ces termes ST. ou OB. OE :: OV. TP.

& composant OB. OB+OE :: OV. OV+TP. ou bien en permutant OB. OV :: OB+OE. OV+TP. & composant encore OB. OB+OV :: OB+OE. OB+OE+OV+TP. ou OB. AV :: AE. OB+OE+OV+TP ; mais OE+OV=SV. & OB+TP=SP ; donc OB. AV :: AE. SV+SP. & dans cette derniere proportion le dernier terme eſt égal à la ſomme de l'hypotenuſe SP, & du côté SV du triangle rectangle SVP.

Maintenant reprenons la proportion OB. OE :: OV. TP. nous aurons en diviſant OB. OE−OB :: OV. TP−OV. ou bien permutant OB. OV :: OE−OB. TP−OV. & diviſant encore OB. OV−OB :: OE−OB. TP−OV−OE+OB. ou OB. BV :: BE. TP−OV−OE+OB. mais TP+OB=SP. & −OV−OE=−SV. donc OB. BV :: BE. SP−SV. & dans cette proportion le dernier terme eſt égal à la difference de l'hypotenuſe SP, & du côté SV du triangle rectangle SVP. Appellant donc ce dernier terme $d$, & le dernier terme de la proportion OB. AV :: AE. SV+SP. étant appellé $s$, multiplions les termes de l'une par les termes de l'autre, nous aurons $\overline{OB}^2$. BV×AV :: BE×AE. $d \times s$. mais par le Corollaire précedent $\overline{OD}^2 = BE \times AE$ ; & ſelon ce que nous avons dit en parlant de l'Ellipſe (*n.* 82.), $d \times s = \overline{PV}^2$ ; donc $\overline{OB}^2$. BV×AV :: $\overline{OD}^2$. $\overline{PV}^2$. ou bien $\overline{PV}^2$. BV×AV :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$.

OB. BV :: BE. $d$
OB. AV :: AE. $s$

$\overline{OB}^2$. BV×AV :: BE×AE. $d \times s$ *ou* $\overline{OB}^2$. BV×AV :: $\overline{OD}^2$. $\overline{BV}^2$.

Or ſi nous prenons deux autres lignes SX, XE, moindres ou plus grandes que les deux SP, XE ; mais qui ſoient de telle nature que SX ſoit plus grand que SB, & que XE ſoit égal à SX−AB, nous trouverons de même $\overline{XZ}^2$. ZB×AZ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$. donc $\overline{PV}^2$. BV×AV :: $\overline{XZ}^2$. ZB×AZ. ou $\overline{PV}^2$. $\overline{XZ}^2$ :: BV×AV. ZB×AZ. & par conſéquent les lignes PV, XZ, ſeront ordonnées à l'axe, puiſque leurs quarrez ſont entr'eux comme les rectangles correſpondans, & les points P, X, ſeront à l'Ellipſe.

### COROLLAIRE III.

129. Donc *le quarré* $\overline{XZ}^2$ *d'une ordonnée au premier axe, eſt au rectangle correſpondant* $BZ \times AZ$, *comme le quarré* $\overline{OD}^2$ *de la moitié du ſecond axe, au quarré* $\overline{OB}^2$ *de la moitié du premier, ou comme le quarré du ſecond au quarré du premier.*

### COROLLAIRE IV.

130. *Le quarré* $\overline{OD}^2$ *de la moitié du ſecond axe* (Fig. 86.), *eſt moyen proportionnel entre le quarré* $\overline{EH}^2$ *de l'ordonnée au foyer E, & le quarré* $\overline{OB}^2$ *de la moitié du premier axe.* Par la nature de l'hyperbole on a $\overline{EH}^2$. EB×AE :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$. mais EB×AE = $\overline{OD}^2$. donc :: $\overline{EH}^2$. $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$.

### COROLLAIRE V.

131. *Si l'on porte la moitié OB du premier axe* (Fig. 88), *ſur la moitié OD du ſecond axe prolongé, s'il le faut, de O en Y, & que prenant enſuite la diſtance BY, on la porte ſur le premier axe de O en X, & qu'on tire l'ordonnée PX, cette ordonnée ſera égale à la moitié du ſecond axe.* Si l'on tire une autre ordonnée HE, on aura EB×AE. $\overline{HE}^2$ :: XB×AX. $\overline{PX}^2$. mais XB×AX = $\overline{OX}^2 - \overline{OB}^2$. & comme OX = BY, & que dans le triangle rectangle BOY, on a $\overline{BY}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OY}^2$, ou $\overline{BY}^2 = 2\overline{OB}^2$. à cauſe de OB = OY, il s'enſuit que XB×AX = $2\overline{OB}^2 - \overline{OB}^2$. ou XB×AX = $\overline{OB}^2$. ainſi l'on a EB×AE. $\overline{HE}^2$ :: $\overline{OB}^2$. $\overline{PX}^2$. mais par la proprieté de l'hyperbole on a EB×AE. $\overline{HE}^2$ :: $\overline{OB}^2$. $\overline{OD}^2$. donc $\overline{PX}^2 = \overline{OD}^2$. & PX = OD.

### COROLLAIRE VI.

132. *Le quarré* $\overline{PX}^2$ *d'une ordonnée au premier axe* (Fig. 88), *eſt égal au produit du quarré* $\overline{CO}^2$ *de la moitié du ſecond axe par le quarré* $\overline{OX}^2$ *de*

*l'abſciſſe priſe du centre O, diviſé par le quarré* $\overline{OB}^2$ *de la moitié du premier axe, moins le quarré* $\overline{CO}^2$ *de la moitié du ſecond axe.* Puiſqu'on a $\overline{OB}^2.\overline{CO}^2 :: \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2.\overline{PX}^2$. Donc multipliant les deux moyens, & diviſant le produit par le premier terme, on aura $\frac{\overline{CO}^2\times\overline{OX}^2-\overline{CO}^2\times\overline{OB}^2}{\overline{OB}^2}=\overline{PX}^2$. mais $-\frac{\overline{CO}^2\times\overline{OB}^2}{\overline{OB}^2}=-\overline{CO}^2$. donc $\overline{PX}^2=\frac{\overline{CO}^2\times\overline{OX}^2}{\overline{OB}^2}-\overline{CO}^2$.

## COROLLAIRE VII.

133. *Le quarré d'une ordonnée ST au premier axe* (Fig. 88.), *eſt plus grand que le rectangle du parametre RA de cet axe par l'abſciſſe AT.* Nous avons $\overline{ST}^2$. TA×TB :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$; mais par la définition du parametre on a :: AB. CD. AR. donc $\overline{CD}^2.\overline{AB}^2$:: AR. AB. & par conſéquent $\overline{ST}^2$. TA×TB :: AR. AB. or à cauſe des triangles ſemblables RBA, *m*BT, on a AR. AB :: *m*T. TB. & multipliant les deux derniers termes par TA, on a AR. AB :: *m*T×TA. TA×TB. donc $\overline{ST}^2$. TA×TB :: *m*T×TA. TA×TB. donc $\overline{ST}^2$ = *m*T×TA. mais *m*T×TA. eſt plus grand que TA×AR. donc, &c.

## COROLLAIRE VIII.

134. *Le quarré* $\overline{NZ}^2$ *d'une ordonnée au ſecond axe* (Fig. 88.), *eſt au quarré* $\overline{ZO}^2$, *plus le quarré* $\overline{CO}^2$ *de la moitié du ſecond axe, comme le quarré du premier axe au quarré du ſecond.* Puiſque $\overline{NM}^2$. $\overline{OM}^2-\overline{OB}^2$ :: $\overline{OC}^2$. $\overline{OB}^2$. donc $\overline{NM}^2\times\overline{OB}^2=\overline{OM}^2\times\overline{OC}^2-\overline{OB}^2\times\overline{OC}^2$. & ajoûtant de part & d'autre $\overline{OB}^2\times\overline{OC}^2$, on aura $\overline{NM}^2\times\overline{OB}^2+\overline{OB}^2\times\overline{OC}^2=\overline{OM}^2\times\overline{OC}^2$. mais NM = ZO. & OM = NZ. donc $\overline{ZO}^2\times\overline{OB}^2+\overline{OB}^2\times\overline{OC}^2=\overline{NZ}^2\times\overline{OC}^2$. mais les racines du premier produit

ſont $\overline{ZO}^2 + \overline{OC}^2$ & $\overline{OB}^2$; car multipliant l'une par l'autre, on a le premier produit, & les racines du ſecond produit ſont $\overline{NZ}^2$ & $\overline{OC}^2$; mettant donc ces deux-ci pour les extrêmes d'une proportion, & les autres pour les moyennes, on aura $\overline{NZ}^2 . \overline{ZO}^2 + \overline{OC}^2 :: \overline{OB}^2 . \overline{OC}^2$.

## COROLLAIRE IX.

135. Il ſuit du Corollaire précedent que $\overline{NZ}^2 = \frac{\overline{ZO}^2 \times \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 \times \overline{OB}^2}{\overline{OC}^2}$

ou que $\overline{NZ}^2 = \frac{\overline{ZO}^2 \times \overline{OB}^2}{\overline{OC}^2} + \overline{OB}^2$, où l'on peut voir en confrontant ce Corollaire avec le ſixiéme ci-deſſus, la difference du quarré d'une ordonnée au premier axe, au quarré d'une ordonnée au ſecond.

## COROLLAIRE X.

136. *Si on prolonge un diametre déterminé OH* (Fig. 88.), *de l'autre côté du ſommet, il coupera l'hyperbole oppoſée en un point* h, *en ſorte que la ligne Hh ſera coupée en deux également en O.* Ayant pris dans cette hyperbole la ligne A*e*, égale à la ligne BE, & tiré l'ordonnée *eh*, il eſt ſûr que *eh* ſera égal à EH; car les deux hyperboles ſont parfaitement égales par la conſtruction; ainſi tirant *h*O, le triangle rectangle O*eh*, ſera égal & équiangle au triangle rectangle OEH, à cauſe des côtez O*e*, *eh*, égaux au côtez OE, EH, chacun à chacun; & par conſéquent l'hypotenuſe O*h* ſera égale à l'hypotenuſe OH, & l'angle *e*O*h* ſera égal à l'angle EOH; mais la ligne *e*E eſt droite, & ces deux angles *e*O*h*, EOH, ſont faits au même point O, l'un d'un côté de cette ligne, & l'autre de l'autre; donc ces deux angles ſont oppoſés au ſommet: car autrement ils ne ſeroient pas égaux, & par conſéquent la ligne O*h* égale à OH, eſt le prolongement du diametre OH.

## PROBLEME XXX.

137. *D'un point donné P ſur une hyperbole, mener une tangente.* (Fig. 89.)

Du

Du foyer S de l'hyperbole opposée, tirez la droite SP, & du foyer E la droite EP. Du point P pris pour centre, & de l'intervalle PE, décrivez un cercle PHV, qui coupe la ligne SP en H. Tirez la droite EH, que vous partagerez en deux également en N, & par les points N, P, tirez la droite PT, qui sera tangente au point P.

## DEMONSTRATION.

Prenez un point R sur TP, prolongé, s'il le faut, & tirez les droites RE, RS, la ligne RV sera égale à RE; or si l'on veut que le point R soit à l'hyperbole, SV qui est la difference de SR à RE, sera égale à l'axe AB (*n.* 128.), & comme SH, qui est la difference de SP à PE, est aussi égale à l'axe AB; par la même raison il s'ensuivra que SV sera égal à SH; or RH est égal à RV, l'un & l'autre étant rayons d'un même cercle; donc dans le triangle SHR, les deux côtez SH, HR, pris ensemble, seront égaux au seul côté SR, ce qui est impossible; donc le point R n'est point à l'hyperbole.

De plus ce point n'est point dans l'aire de l'hyperbole; car puisque SH, HR, pris ensemble, sont nécessairement plus grands que SR, & que HR est égal à RV, il faut nécessairement que SV soit moindre que SH, & par conséquent que la difference de SR à RE, soit moindre que l'axe; d'où il suit que ER est plus grand qu'il ne faut; or si du point S pris pour centre, & de l'intervalle SR, on décrit un cercle RZ, il faudra pour rendre RE moindre par rapport à SR, que le rayon SR approche du côté de X; car le point E étant sur le rayon SQ, la plus courte ligne qu'on puisse tirer de ce point à la circonference, est la droite EQ, & les autres sont d'autant plus grandes, qu'elles s'éloignent davantage de EQ; ainsi puisque ER est plus grande qu'il ne faut par rapport à SR, on ne peut le rendre moindre qu'en la tirant entre R & Q, comme par exemple en X; donc EX ne peut devenir le difference de SR au premier axe AB, qu'en laissant TR en-dehors, & comme l'hyperbole passera par le point X, il s'ensuit que le point R sera en-dehors.

### *Autre maniere.*

Du point P (*Fig.* 90.), tirez l'ordonnée PN au premier axe; prenez ensuite une troisiéme proportionnelle OT à l'abscisse ON,

prise du centre O, & au demi-axé OB, & tirez PT, qui sera tangente en P.

DEMONSTRATION.

Par la construction : : ON. OB. OT. donc *dividendo*, ON. ON —OB : : OB. OB—OT. ou ON. BN : : OB. TB. & doublant les deux antecedens, on aura AN+BN. BN : : AB. TB. & divisant enfin AN+BN — BN. BN : : AB — TB. TB. ou AN. BN : : AT. TB.

Par un autre point H, tirez une autre ordonnée HM à l'axe; du sommet B tirez BV, parallele à TP, & de l'extrêmité A de l'axe, tirez AX, aussi parallele à TP, & le diametre AV, enfin tirez MPR. Cela posé, supposons, si l'on veut, que TP prolongé, coupe l'hyperbole en P, & l'ordonnée HM en E.

A cause des triangles semblables AXN, BIN, on a AX. BI : : AN. BN. mais nous venons de trouver AN. BN : : AT. TB. donc AX. BI. AT. TB. or les triangles semblables AVB, APT, donnent AT. TB : : AP. PV. donc AX. BI : : AP. PV. enfin les triangles semblables AXP, VIP, donnent AX. VI : : AP. PV. donc AX. BI : : AX. VI. & par conséquent BI = VI. donc BV étant divisé en deux également en I, & en deux inégalement en Z, le rectangle BI×IV, est plus grand que le rectangle BZ×ZV, & la raison de IV à ZV, est plus grande que la raison de BZ à BI (*n.* 102.); mais à cause des triangles semblables XAP, VPI, & VZP, RAP, on a IV. ZV : : AX. AR. donc la raison AX. AR. est plus grand que la raison BZ. BI. & par conséquent le rectangle AX×BI, est plus grand que le rectangle AR×BZ; donc le rectangle AX×BI, est plus grand par rapport au quarré $\overline{TP}^2$, que le rectangle AR×BZ, par rapport à ce même quarré.

Or les triangles semblables AXN, BIN, TPN, donnent AX. AN : : BI. BN. : : TP. TN. donc la raison composée des deux premieres raisons, sera doublée de la troisiéme, ou comme les quarrez de la troisiéme; ainsi AX×BI. AN×BN : : $\overline{TP}^2$. $\overline{TN}^2$.

De même les triangles semblables ARM, BZM, TPM, donnent AR. AM : : BZ. BM : : TP. TM. donc AR×BZ. AM×BM : : $\overline{TP}^2$. $\overline{TM}^2$.

Or le rectangle AX×BI, est plus grand par rapport à $\overline{TP}^2$, que

le rectangle AR×BZ, par rapport au même $\overline{TP}^2$. Donc le rectangle AN×BN, est plus grand par rapport à $\overline{TN}^2$, que le rectangle AM×BM par rapport à $\overline{TM}^2$, & *permutando*, AN×BN est plus grand par rapport à AM×BM, que $\overline{TN}^2$ par rapport à $\overline{TM}^2$; mais par la proprieté de l'hyperbole, AN×BN. AM×BM :: $\overline{NP}^2$. $\overline{MH}^2$, & à cause des triangles semblables TPN, TEM, on a $\overline{TN}^2$. $\overline{TM}^2$ :: $\overline{NP}^2$. $\overline{ME}^2$. donc AN×BN, est plus grand par rapport à AM×BM, que $\overline{NP}^2$ par rapport à $\overline{ME}^2$; donc $\overline{NP}^2$ est plus petit par rapport à $\overline{ME}^2$, que par rapport à $\overline{MH}^2$, & par conséquent $\overline{ME}^2$ est plus grand que $\overline{MH}^2$. Donc le point E doit être hors de l'hyperbole, & non pas en-dedans, comme on le supposoit.

## COROLLAIRE I.

138. Si au lieu du premier axe AB, on avoit un diametre OX, (*Fig.* 91.), & que d'un point P, on voulût mener une tangente, on tireroit de P l'ordonné PX, comme il sera enseigné plus bas, puis on prendroit une troisiéme proportionnelle OT, aux deux lignes OX. OS, & l'on meneroit TP, qui seroit tangente en P, ce qui se démontre de la même façon.

## COROLLAIRE II.

139. *Dun point P* (Fig. 92.), *on ne peut mener qu'une seule tangente PT.* Si on prétend qu'on puisse en mener une autre PH, du foyer S pris pour centre, & d'un intervalle égal au grand axe, je décris un cercle HD; du foyer E je tire une perpendiculaire sur PH, jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en D; je tire SD que je prolonge jusqu'à l'hyperbole en O, & divisant ED en deux également, je tire OV, qui sera tangente en O (*n.* 137.); or HP est parallele à OV, étant perpendiculaire à ED; donc si HP est plus proche du foyer que OV, elle coupera l'hyperbole, & si elle en est plus éloignée, elle ne la rencontrera point du tout, & par conséquent elle ne sçauroit être tangente.

## COROLLAIRE III.

140. Si le point B (*Fig.* 86.), par où on veut mener une tangente, eſt au ſommet de l'hyperbole, il eſt viſible par la conſtruction de cette courbe, qu'il n'y a qu'à élever une perpendiculaire BR, pour avoir cette tangente.

## COROLLAIRE IV.

141. *Si l'on a deux diametres OB, OD* (Fig. 93.), *ſoit que l'un d'eux ſoit l'axe, ſoit qu'il ne le ſoit pas, & que leurs tangentes EG, DE, ſe coupent, & aillent aboutir aux diametres oppoſés, le triangle EBH, fait par les deux tangentes, & l'un des diametres eſt égal au triangle GHD, fait par les mêmes tangentes & l'autre diametre.* Tirant les ordonnées DF, BI, on aura : : OG. OD. OI. & : : OE. OB. OF. (*n.* 137.); donc les lignes GF, DB, IF, ſeront paralleles; donc les triangles DBG, DBE, ſeront égaux, & ôtant le triangle commun DHB, les triangles DGH, BHE, ſeront auſſi égaux.

On prouvera de même que pour l'Ellipſe, que les triangles ODE, OGB, ſont égaux, auſſi bien que les triangles ODF, OBI, que le quadrilatere FBGD eſt égal au triangle FDE, que le quadrilatere DIEB eſt égal au triangle GBI, que le quadrilatere GDBF, eſt égal au quadrilatere DIEB, &c.

## COROLLAIRE V.

142. *Ayant deux diametres OB, OD* (Fig. 94.), *je prens les moitiés des diametres pour les diametres-mêmes, ce qui ne fait rien, & leurs tangentes DE, BG, qui ſe croiſent & qui vont aboutir aux diametres oppoſés, ſi d'un point I pris ſur l'hyperbole, on tire des paralleles aux tangentes, le triangle IRH fait par les deux paralleles & l'un des diametres, eſt égal au quadrilatere GSBH, fait par la tangente du même diametre & ſa parallele compriſes entre les deux diametres; & le triangle SIK, fait par les paralleles, & l'autre diametre eſt égal au quadrilatere KDER, fait par la tangente de ce diametre, & ſa parallele compriſe entre les deux diametres.*

Du point D tirez l'ordonnée DV, les triangles DEV, IRH, étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrez $\overline{DV}^2$, $\overline{IH}^2$ de leurs baſes; or ces quarrez ſont entr'eux comme les rec-

tangles VB×ZV, HB×ZH, ou comme $\overline{VO}^2 - \overline{OB}^2$ à $\overline{HO}^2 - \overline{OB}^2$. & les quarrez $\overline{VO}^2$, $\overline{OB}^2$, sont entr'eux comme les triangles semblables VDO, BGO, & les quarrez $\overline{HO}^2$, $\overline{OB}^2$, comme les triangles semblables HSO, BGO; mettant donc les triangles au lieu des quarrez, on aura DEV. IRH :: VDO—BGO. HSD—BGO. ou DEV. IRH :: VDGB. HSGB. mais le triangle DEV, est égal au quadrilatere VDBG par le Corollaire précedent; donc le triangle IRH, est égal au quadrilatere HSGB.

Et on prouvera la même chose quand le point d'où l'on tire les paralleles, se trouve ou en-delà de l'axe, comme en P, ou en-dessous du point d'attouchement, comme en Q, ainsi que nous avons fait à l'égard de l'Ellipse (*n.* 95.).

Maintenant pour prouver que le triangle SIK, fait par les paralleles, & l'autre diametre OD, est égal au quadrilatere KDER, il faut observer que le triangle RIH, étant égal au quadrilatere HBGS, si l'on ôte de part & d'autre BeIH, le triangle ReB, sera égal au quadrilatere GeIS; or le triangle GuD, est égal au triangle EuB par le Corollaire précedent; donc le triangle GuD, est égal au quadrilatere EueR, plus le quadrilatere eISG; & ajoûtant de part & d'autre le quadrilatere ueDK, le triangle KGe, sera égal au quadrilatere REDK, plus le quadrilatere eISG, & ôtant de part & d'autre le quadrilatere eISG, on aura enfin le triangle SIK, égal au quadrilatere KDER.

Et on prouvera la même chose quand le point d'où l'on tire les paralleles aux tangentes, se trouvera ou en Q, ou en P, &c. comme nous avons fait à l'égard de l'Ellipse.

## COROLLAIRE. VI.

143. *Toutes les paralleles MI, PR, à la tangente* ou *d'un diametre* OX (Fig. 95.), *sont coupées en deux parties égales par ce diametre, & lui sont par conséquent ordonnées.* Par le Corollaire précedent le triangle dSI, est égal au quadrilatere cSau, & le triangle MSN, est aussi égal à ce quadrilatere; donc ces deux triangles sont égaux: or ils sont aussi semblables; donc SI = MS. De même le triangle TRS, est égal au quadrilatere TQuc, & le triangle PXT, est aussi égal à ce quadrilatere; donc les deux triangles sont égaux; & comme ils sont semblables, on a par conséquent RT = PT.

## COROLLAIRE VII.

144. *Les quarrez* $\overline{SI}^2$, $\overline{TR}^2$ (Fig. 95.) *des ordonnées à un diametre, ſont entr'eux comme les rectangles correſpondans* $Sc \times SZ$, $Tc \times TZ$. Ces quarrez ſont comme les triangles $SId$, $TRS$; or ces triangles ſont entr'eux comme les quadrilateres $cSau$, $TQuc$; donc les quarrez $\overline{SI}^2$, $\overline{TR}^2$, ſont entr'eux comme ces quadrilateres; mais les quadrilateres ſont entr'eux comme $SaO - cuO$, $TQO - cuO$, ou comme les quarrez $\overline{SO}^2 - \overline{cO}^2$, $\overline{TO}^2 - \overline{cO}^2$, ou enfin comme les rectangles $Sc \times SZ$, $Tc \times TZ$; donc les quarrez des ordonnées $\overline{SI}^2$, $\overline{TR}^2$, ſont entr'eux comme $Sc \times SZ$, $Tc \times TZ$.

## COROLLAIRE VIII.

145. *Deux diametres OD, OC* (Fig. 96.), *étant donnés avec leurs tangentes qui ſe croiſent, & c. ſi de deux points R, Z, pris ſur la courbe entre les diametres, on tire des paralleles aux tangentes, le quadrilatere ZIHS, faits par deux paralleles compriſes entre un diametre & la parallele la plus proche, eſt égal au quadrilatere STVR, fait par les deux autres paralleles compriſes entre l'autre diametre, & la parallele la plus proche & le quadrilatere RXIH, fait par deux paralleles compriſes entre un diametre & la parallele la plus éloignée, eſt égal au quadrilatere XZTV, fait par les autres paralleles compriſes entre l'autre diametre & la parallele la plus éloignée.* Ce qui ſe démontre de même que pour l'Ellipſe (*n.* 104.).

## COROLLAIRE IX.

146. *Deux diametres avec leurs tangentes qui ſe croiſent, étant donnés* (Fig. 97.), *ſi d'un point de l'hyperbole on tire une ordonnée IR à l'un des diametres, & qu'on la prolonge juſqu'à la rencontre de la tangente de l'autre diametre, le rectangle* $SI \times SR$ *ſera au quarré* $\overline{CS}^2$ *de la partie coupée de la tangente, comme le quarré* $\overline{DF}^2$ *de la tangente parallele eſt au quarré* $\overline{FC}^2$ *de l'autre tangente.* Ce qui ſe démontre de même que pour l'Ellipſe (*n.* 105.).

## COROLLAIRE X.

147. *Deux diametres étant donnés avec leurs tangentes qui se croisent* (Fig. 98.), *si de deux points P, Q, on tire des ordonnées PR, QS, aux diametres, en sorte qu'elles se croisent en Z, le rectangle PZ×ZR des parties de l'une, est au rectangle QZ ×ZS des parties de l'autre, comme le quarré $\overline{CT}^2$ de la tangente parallele à PR, au quarré $\overline{DT}^2$ de la tangente parallele à QS.* Voyez-en la démonstration pour les trois cas differens (*n.* 106.).

## COROLLAIRE XI.

148. *Deux diametres avec leurs tangentes qui se croisent, étant donnés* (Fig. 99.), *si on joint les points d'attouchement par la droite DC, & que du point T, où les tangentes se rencontrent, on tire sur le milieu de DC la droite TR, cette ligne TR sera un diametre, dont les ordonnées seront paralleles à DC* (n. 107.).

## COROLLAIRE XII.

149. *Deux hyperboles opposées étant données avec leur premier axe AB* (Fig. 100.), *& une ordonnée MC à l'hyperbole MAC, si d'un point X, pris entre A & C, on tire une parallele EXH au premier axe, en sorte qu'elle coupe l'ordonnée MC en E, & l'hyperbole opposée en H, le rectangle HE × EX, est au rectangle ME × EC, comme le premier axe est à son parametre, ou comme le quarré du premier axe au quarré du second.*

Pour entendre facilement ce Corollaire, il faut relire ce que nous avons dit dans la premiere Partie (*n.* 241.).

Tirez les ordontées NX, HZ, il est évident par la formation de l'hyperbole, que ZB est égal à AN, & qu'ainsi la ligne ZL est divisée en quatre parties, dont la premiere ZB & la troisiéme AN, sont égales, & les deux autres sont inégales, ou égales, peu importe; donc BN×NA+ZL×LN = BL×LA (*premiere Partie, n.* 241.); d'autre part MC étant divisé en deux également en L, & en deux inégalement en E, on a ME×EC+$\overline{LE}^2$ = $\overline{LC}^2$, & à cause de NX = LE, on a ME×EC+$\overline{NX}^2$ = $\overline{LC}^2$;

donc $BN \times NA + ZL \times LN$. $ME \times EC + \overline{NX}^2 :: BL \times LA$. $\overline{LC}^2$; or par la nature de l'hyperbole $BL \times LA$, $\overline{LC}^2 ::$ AB. *p.* c'eſt-à-dire au parametre, & $BN \times NA$. $\overline{NX}^2 ::$ AB. *p.* donc $ZL \times LN$. $ME \times EC ::$ AB. *p.* car autrement la proportion ci-deſſus $BN \times NA + ZL \times LN$. $ME \times EC + NX ::$ $BL \times LA$. $\overline{LC}^2$. ne pourroit ſubſiſter ; mais $ZL \times LN = HE \times EX$. donc $HE \times EX$. $ME \times EC ::$ AB. *p.*

Ce Corollaire nous ſervira en parlant des ſolides.

## DEFINITION IX.

150. Si deux lignes OF, OE, faiſant entr'elles un angle au centre O de l'hyperbole (*Fig.* 101), renferment la courbe, de façon qu'en prolongeant les ordonnées à l'axe de part & d'autre, on trouve toujours le rectangle $FM \times ME$, ou $EN \times NF$, égal au quarré $\overline{CO}^2$ de la moitié du petit axe, ces lignes OF. OE, s'appellent les *aſymptotes* de l'hyperbole.

## PROBLEME XXXI.

151. *Une hyperbole étant donnée, mener ſes aſymptotes* ( Fig. 101. ).

Par le ſommet B tirez GH, parallele au petit diametre, & faiſant $BG = CO$ & $BH = OD$, tirez du centre O par les extrêmitez G, H, les droites OF, OE, qui ſeront les aſymptotes demandées.

### DEMONSTRATION.

Tirez les ordonnées MN, MN, que vous prolongerez de part & d'autre en F & en E, les triangles ſemblables OBH, ORE, donnent $\overline{OB}^2$. $\overline{BH}^2 ::$ $\overline{OR}^2$. $\overline{RE}^2$. & par la proprieté de l'hyperbole on a $\overline{OB}^2$. $\overline{OD}^2 ::$ $\overline{OR}^2 - \overline{OB}^2$. $\overline{RN}^2$. mais $OD = BH$; donc $\overline{OB}^2$. $\overline{BH}^2 ::$ $\overline{OR}^2 - \overline{OB}^2 ::$ $\overline{RN}^2$. & par conſéquent $\overline{OR}^2$. $\overline{RE}^2 ::$ $\overline{OR}^2 - \overline{OB}^2$. $\overline{RN}^2$. ou *permutando*, $\overline{OR}^2$. $\overline{OR}^2 - \overline{OB}^2 ::$ $\overline{RE}^2$. $\overline{RN}^2$. &

& divisant $\overline{OR}^2$. $\overline{OR}^2 - \overline{OR}^2 + \overline{OB}^2 :: \overline{RE}^2$. $\overline{RE}^2 - \overline{RN}^2$, ce qui revient à $\overline{OR}^2$. $\overline{OB}^2 :: \overline{RE}^2$. $\overline{RE}^2 - \overline{RN}^2$. & permutant $\overline{OR}^2$. $\overline{RE}^2 :: \overline{OB}^2$. $\overline{RE}^2 - \overline{RN}^2$. mais $\overline{OR}^2$. $\overline{RE}^2 :: \overline{OB}^2$ $\overline{BH}^2$. donc $\overline{OB}^2$. $\overline{BH}^2$ ou $\overline{OD}^2 :: \overline{OB}^2$. $\overline{RE}^2 - \overline{RN}^2$. & par conséquent $\overline{OD}^2 = \overline{RE}^2 - \overline{RN}^2$. à cause que les deux antecedens sont égaux; mais $\overline{RE}^2 - \overline{RN}^2 = EN \times NF$, parce que FE est divisé en deux également en R, & en deux inégalement en N; donc $EN \times NF = \overline{OD}^2$.

On prouvera de même que $FM \times ME = \overline{CO}^2$ ou $\overline{OD}^2$, & que par conséquent $EN \times NF = FM \times ME$.

### COROLLAIRE I.

152. Les rectangles $NE \times NF$, étant égaux chacun à $\overline{OD}^2$, il s'ensuit qu'ils sont égaux entr'eux.

### COROLLAIRE II.

153. *La ligne BD, ou BC, tirée de l'extrémité du premier axe à l'extrémité du second, est divisée en deux parties égales par l'asymptote qui la coupe.* Car BH étant égale & parallele à OD, si l'on tire DH, les lignes OH, DB, feront les diagonales du rectangle ABHD, & par conséquent elles se couperont mutuellement en deux parties égales en X, & les quatre lignes BX, XD, OX, OH, feront égales entr'elles.

### COROLLAIRE III.

154. Dans le triangle rectangle BOD, on a $\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OD}^2$; mais le quarré de BX est égal au quart du quarré de BD: donc $\overline{BX}^2 = \frac{1}{4}\overline{BO}^2 + \frac{1}{4}\overline{OD}^2$; quelques Géometres appellent le quarré $\overline{BX}^2$, *puissance* de l'hyperbole.

### COROLLAIRE IV.

155. *Une ordonnée MN à l'axe, étant prolongée de part & d'autre jusqu'à la rencontre des asymptotes, la partie exterieure FM d'un côté, est égale à la partie exterieure NE de l'autre.* A cause des triangles

ſemblables OBH, ORE, on a BH. RE :: OB. OR. & BG. RF :: OB. OR. donc BH. RE :: BG. RF. mais BH = BG; donc RE = RF. or RM = RN; donc le reſte FM eſt égal au reſte NE.

## COROLLAIRE V.

156. *Si l'on mene entre les aſymptotes deux ou pluſieurs lignes paralleles entr'elles, RS, TV, PE* (Fig. 102.), *qui coupent l'hyperbole, ou les hyperboles oppoſées, les rectangles RH×HS, TI×IV, EG×GF, ſont égaux entr'eux.* Menant par les points H, I, G, des paralleles au ſecond axe, les triangles ſemblables RHF, TIM; HQS, INV, donnent RH. PH :: TI. MI. & HS. HQ :: IV. IN. & multipliant les termes de ces deux proportions les uns par les autres, on aura RH×HS. PH×HQ :: TI×IV. MI×IN. mais les deux conſéquens PH×HQ, MI×IN, ſont égaux (*n.* 152.); donc les deux antecedens RH×HS, TI×IV, le ſont auſſi, & on prouvera la même choſe du rectangle GE×GF.

## COROLLAIRE VI.

157. *Si par deux points R, S de la courbe* (Fig. 103.), *on mene deux ou pluſieurs lignes paralleles entr'elles RH, SI, qui coupent l'aſymptote oppoſée, & d'autres paralleles RD, SQ, qui coupent l'autre aſymptote, les rectangles HR×RD, IS×SQ, ſont égaux entr'eux.* Menant par les points R, S, les paralleles TV, PZ au ſecond axe, on a, à cauſe des triangles ſemblables, HR. RV :: IS. SZ, & DR. RT :: QS. SP, & multipliant les termes de ces deux proportions les uns par les autres, on a HR×DR. RV×RT :: IS×QS. SZ×SP. mais RV×RT = SZ×SP; donc HR×DR = IS×QS.

## COROLLAIRE VII.

158. Si par deux ou pluſieurs points G, C (*Fig.* 103.), pris ſur la courbe, on mene des paralleles G*b*, C*a*, GM, CN, aux deux aſymptotes, on démontrera de même que ci-deſſus, que les rectangles G*b*×GM, C*a*×CN, ſont égaux entr'eux; & comme le point A eſt auſſi un point de l'hyperbole, on démontrera de même que chacun de ces rectangles eſt égal au rectangle OA×AB, ou au quarré $\overline{AB}^2$, à cauſe de OA = AB, & par conſéquent *chaque rectangle eſt alors égal au quarré de la puiſſance de l'hyperbole.*

Et comme dans ce cas on a VN = $a$C, VM = $b$G, on doit dire que *les rectangles VN×NC, VM×MG, &c. ſont chacun égaux au quarré* $\overline{AB}^2$, *ou* $\overline{BV}^2$.

## COROLLAIRE VIII.

159. *Si l'on prend deux ou pluſieurs points Q, P, V,* (Fig. 104.), *ſur une hyperbole, ou ſur les hyperboles oppoſées, & qu'on tire entre les hyperboles des droites VP, QT, &c. paralleles entr'elles, les rectangles QR×RS, PN×PZ, VZ×VN, &c. ſeront égaux entr'eux.* Tirant des points Q, V, des paralleles au ſecond axe, les triangles ſemblables QRE, VZF, donneront QR. QE :: VZ. VF. & à cauſe des triangles ſemblables QGS, VMN, on aura QS. QG :: VN. VM. & multipliant les termes de ces proportions les uns par les autres, on aura QR × QS. QE × QG :: VZ×VN. VF×VM. mais les conſéquens QE×QG, VF×VM, ſont égaux entr'eux; donc les antecedens QR×QS, VZ×VN, le ſont auſſi.

Et on prouvera de la même façon que PN×PZ = VZ×VN, & par conſéquent que les trois rectangles ſont égaux.

## COROLLAIRE. IX.

160. Dans la même figure ſi l'on conçoit que VP, s'avance parallelement à TQ, juſqu'à ce qu'elle tombe ſur AB, alors il n'y auroit plus de partie ZN entre les aſymptotes, & par conſéquent le rectangle VZ×VN, ſe réduiroit à AO×AO, ou au quarré $\overline{AO}^2$; donc *chaque rectangle VZ×VN, QR×QS, &c. eſt égal au quarré* $\overline{AO}^2$.

Ce ſeroit la même choſe ſi les lignes PV, QT, au lieu d'être paralleles à l'axe, comme elles le ſont ici, étoient paralleles à un diametre *ab*.

## COROLLAIRE X.

161 *Dans la même figure la partie VZ de la ligne VP, eſt égale à la partie NP.* Les rectangles VZ×VN, NP×PZ, ſont égaux; or VN = VP — NP: donc multipliant VZ par VP — NP, le rectangle VZ×VP — VZ×NP, ſera égal à VZ×VN. De même PZ = PV — VZ; donc multipliant NP par PV — VZ, on

aura $NP \times PV - NP \times VZ = NP \times PZ$, & par conſéquent $VZ \times VP - VZ \times NP = NP \times PV - NP \times VZ$, & donnant de part & d'autre le rectangle $VZ \times NP$ qui manque, on aura $VZ \times VP = NP \times PV$, & diviſant de part & d'autre par VP, on aura $VZ = NP$.

D'où il ſuit que les lignes tirées d'une hyperbole à l'autre, ont toujours leurs parties VZ, NP, égales entre les aſymptotes; & ceci de même que ce que nous avons dit dans les deux Corollaires précedens, doit s'entendre auſſi des lignes qui ſeroient parallelea à un diametre.

D'où il ſuit encore que le rectangle $VZ \times ZP = PN \times VN$, puiſqu'on ôte d'un côté VZ, & qu'on donne NP qui lui eſt égal, &c. de même $QX \times PT = VZ \times ZP = PN \times NV$, &c.

## COROLLAIRE XI.

162. *Si l'on tire une ligne CD* (Fig. 105.), *dans une hyperbole, & qu'on la prolonge de part & d'autre juſqu'aux aſymptotes, la partie AC compriſe entre un aſymptote & l'hyperbole, ſera égale à l'autre partie DB, compriſe entre l'autre aſymptote & l'hyperbole.* Nous venons de prouver ceci dans les Corollaires précedens, par rapport aux lignes tirées d'une hyperbole à l'autre; nous l'avons auſſi prouvé par rapport aux ordonnées au premier axe. Ainſi il ne reſte plus qu'à le prouver par rapport aux lignes qui ne ſont point ordonnées a cet axe.

Si l'on veut donc que cela ne ſoit pas, faiſons DB égal à AC, ſans nous embaraſſer où tombe le point D; du point C, tirons CF, CH, paralleles aux deux aſymptotes, & du point D tirons DE, DG paralleles aux mêmes aſymptotes, le triangle AOB ayant trois baſes paralleles OB, GD, FC, on aura AC. AF :: DB. DE. ou GO. mais $AC = DB$ par la conſtruction; donc $AF = GO$, & par conſéquent $CH = FO$. ou AG. ou AF. FC :: AG. GD. donc GO. FC :: CH. GD. & par conſéquent $GO \times GD$, ou $GO \times OE = FC \times CH$, ou $FC \times FO$; donc puiſque ces deux rectangles ſont égaux, les points C, D, ſont l'un & l'autre à l'hyperbole (*n.* 158.), & toutes les lignes qui coupent l'hyperbole, & qui ſe terminent aux aſymptotes, ont leurs parties AC, DB, égales.

## COROLLAIRE XII.

163. *Si par un point A* (Fig. 106.), *on mene une tangente qui ſe*

*termine aux asymptotes, cette tangente sera coupée en deux parties égales au point A.* Si du centre O on tire par le point A une droite OM, cette ligne coupera l'hyperbole, puisque BC est la seule tangente qu'on puisse mener par le point A, & elle sera un diametre dont les ordonnées seront les droites IS, TP, paralleles à la tangente, & ces ordonnées étant prolongées jusqu'aux asymptotes, on aura NG = NH, MQ = MR; or les triangles semblables OAC, OMQ, donnent AC. MQ :: OA, OM, & les triangles semblables OAB, OMR, donnent AB. MR :: OA. OM. donc AC. MQ :: AB. MR. mais MQ = MR; donc AC = AB.

## COROLLAIRE XIII.

164. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précedent, *les rectangles HI×IG. RT×TQ. sont chacun égaux au quarré* $\overline{AB}^2$ *de la moitié de la tangente.* Si l'on conçoit que RQ se meuve vers la tangente toujours parallelement, ses parties RT, PQ, augmenteront peu à peu, & sa partie TP ira en diminuant; & cependant RT×TQ sera toujours de même valeur; donc quand à la fin la partie du milieu sera évanoüie, le rectangle RT×TQ sera BA, AQ, c'est-à-dire le quarré de la moitié de la tangente.

## COROLLAIRE XIV.

165. *Si du centre O* (Fig. 106.), *on tire une parallele ZX à la tangente, & que du point A, on tire AZ, AX, paralleles aux asymptotes, ZX sera égale à la tangente, & par conséquent les rectangles HI×IG, RT×TQ, seront chacun égaux au quarré* $\overline{ZO}^2$ *de la moitié de ZX;* la seule inspection de la figure suffit pour démontrer ceci

## DEFINITION X.

166. Les lignes AL, ZX, s'appellent *diametres conjugués*, AL est le premier, ZX le second, une troisiéme proportionnelle au premier & au second, s'appelle le *parametre* du premier, & une troisiéme proportionnelle au second & au premier, s'appelle le *parametre* du second.

## COROLLAIRE XV.

167. *Le quarré d'une ordonnée TM à un diametre* (Fig. 106.), *est*

*à son rectangle correspondant, comme le quarré du diametre conjugué au quarré du diametre de cette ordonnée.*

Le quarré $\overline{MQ}^2$ est égal au quarré $\overline{MP}^2 + RP \times PQ$, ou $\overline{AC}^2$. Cela posé, les triangles semblables OAC, OMQ, donnent $\overline{MQ}^2 . \overline{AC}^2 :: \overline{OM}^2 . \overline{OA}^2$. & divisant $\overline{MQ}^2 - \overline{AC}^2$. ou $\overline{MQ}^2 - RP \times PQ$, ou enfin $\overline{MP}^2 . \overline{AC}^2 :: \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2$, ou $LM \times MA . \overline{OA}^2$, & *permutando*, $\overline{MP}^2 . LM \times MA :: \overline{AC}^2$. ou $\overline{OZ}^2 . \overline{OA}^2$. ou comme $\overline{ZX}^2$ à $\overline{AL}^2$.

## COROLLAIRE XVI.

168. *Si de deux points Q, P* (Fig. 107.), *pris sur l'hyperbole, l'on mene deux tangentes RS, VT, terminées par les asymptotes, les triangles ROS, VOT faits par les tangentes, & les asymptotes seront égaux entr'eux.* Si des points P, Q, on mene des paralleles aux asymptotes, les rectangles OINQ, OXPM, seront égaux entr'eux ; or à cause de $RQ = QS$ (*n.* 163.), le triangle ORQ à la hauteur OS, double de la hauteur ON du rectangle OINQ, & par la même raison sa base OR, est double de la base OI de ce rectangle ; donc le triangle ORS est double du rectangle OINQ, & on prouvera de même que le triangle VOT, est double du rectangle OXPM, & par conséquent les deux triangles sont égaux.

## DEFINITION XI.

169. Quand le premier axe AB (*Fig.* 108.), est égal au second axe CD, l'hyperbole s'appelle *Equilatere*.

## COROLLAIRE XVII.

170. *Dans l'hyperbole équilatere l'angle ROS fait par les asymptotes, est droit.* Le triangle rectangle BOD, est alors isoscele, & comme l'asymptote CG divise l'hypotenuse BD en deux parties égales, il s'ensuit que l'angle BOQ est demi-droit ; par la même raison l'angle BOR est aussi demi-droit, & par conséquent l'angle entier ROG est droit.

## COROLLAIRE XVIII.

171. *Dans l'hyperbole équilatere le quarré $\overline{EF}^2$ d'une ordonnée, est*

*égal à son rectangle correspondant EB×EA.* Le quarré est au rectangle comme le quarré du second axe au quarré du premier; mais les deux axes sont égaux: donc leurs quarrez le sont aussi, & par conséquent le quarré de l'ordonnée est égal au rectangle.

## DEFINITION XII.

172. Les deux hyperboles opposées C, D (*Fig.* 109.), étant décrites sur le premier axe CD, & le second AB; si l'on décrit deux autres hyperboles A, B, dont AB soit le premier axe, & CD le second, ces deux dernieres hyperboles s'appellent *hyperboles conjuguées* des deux premieres.

## COROLLAIRE XIX.

173. *Les asymptotes MN, XK des deux premieres hyperboles C, D, sont aussi asymptotes des deux autres A, B.* Du point A tirant AC, AD, au second diametre des deux dernieres hyperboles, il est visible que AC est divisé en deux également par l'asymptote XK, de même que AD par l'asymptote MN, & que par conséquent XK, MN, sont également asymptotes des deux dernieres hyperboles & des deux premieres.

## COROLLAIRE XX.

174. *Si d'un point G, de l'une des deux premieres hyperboles, l'on mene une ligne GH à la conjuguée voisine, laquelle soit parallele à l'une des asymptotes, cette ligne sera coupée en deux également par l'autre asymptote.* Le rectangle GR×RO, est égal au quarré de VD (*n.* 158.), & le rectangle HR×RO, est égal au quarré de AV; mais les quarrez de VD, & de AV, sont égaux; donc les rectangles le sont aussi: mais ces rectangles ont même hauteur; donc leurs bases HR, RG, sont égales.

On prouvera de même que la ligne GX est coupée en deux également en *a*.

## COROLLAIRE XXI.

175. Si par les deux points G, H, de la ligne GH, paralleles à l'asymptote XK, on mene deux diametres GZ, HX, aux hyperboles opposées, il est visible que GZ est premier diametre des deux opposées D, C, & HX, leur second diametre conjugué, & qu'au contraire GZ deviendra second diametre des opposées A, B, & HX, premier diametre conjugué; d'où il suit

que les conjuguées A, B, passent par l'extrêmité des seconds diametres des conjuguées C, D, & celles-ci par l'extrêmité des seconds diametres des conjuguées A, B.

## COROLLAIRE XXII.

176. *Les asymptotes approchent de plus en plus de l'hyperbole, & ne la touchent jamais.* Nous avons prouvé que le quarré d'une ordonnée TM (*Fig.* 106.), est toujours moindres que le quarré de RM (*n.* 156. *& suivans*), & nous allons bientôt le prouver mieux, par conséquent l'hyperbole & l'asymptote ne se peuvent jamais toucher; d'autre part nous avons aussi prouvé que les rectangles RT×TQ, HI×IG, sont égaux; mais la partie TQ est d'autant plus grande qu'elle est plus éloignée du sommet A, parce que les ordonnées vont en s'aggrandissant; donc il faut que la partie RT devienne plus petite à mesure qu'elle s'éloigne du sommet, & par conséquent l'hyperbole & les asymptotes s'approchent de plus en plus.

De peur qu'on ne soit embarassé de trouver dans l'endroit cité la preuve que $\overline{TM}^2$ est toujours moindre que $\overline{RM}^2$, on n'a qu'à faire attention qu'à cause des triangles semblables, on a $\overline{RM}^2 . \overline{MO}^2 :: \overline{BA}^2$. ou $\overline{ZO}^2 . \overline{AO}^2$. & que par la proprieté de l'hyperbole, on a $\overline{TM}^2 . \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2 :: \overline{ZO}^2 . \overline{AO}^2$. D'où l'on voit que $\overline{OM}^2 - \overline{OA}^2$. étant moindre que $\overline{MO}^2$, on a aussi $\overline{TM}^2$ toujours moindre que $\overline{RM}^2$.

## PROBLEME XXXII.

177. *une hyperbole étant donnée* (Fig. 110.), *trouver ses deux axes, son foyer, les parametres des axes, & les asymptotes.*

Tirez deux ou plusieurs lignes AB, CD, paralleles entr'elles, & les ayant coupées chacune en deux parties égales, faites passer par leur milieu une ligne IO, qui sera par conséquent un diametre. Tirez aussi d'autres paralleles DF, BH, & faisant passer par leur milieu une autre ligne MO, vous aurez un autre diametre, & par conséquent le point O où les deux diametres se rencontreront, sera le centre de l'hyperbole. Si l'un ou l'autre de ces deux diametres se trouve perpendiculaire sur les paralleles qu'il coupe en

en deux parties égales, il sera l'axe cherché; mais si cela n'est pas, du point O pris pour centre, & de l'intervalle OR de l'un des demi-diametres, décrivez un arc RS, qui coupera l'hyperbole en un autre point S; car OR n'étant pas le demi-axe, est par conséquent plus grand que le demi-axe, qui est visiblement le plus court de tous les demi-diametres par la génération de l'hyperbole; de plus, la ligne OS sera encore un demi-diametre; car elle passe par le centre, au lieu que les tangentes tirées par un point S de l'hyperbole, coupent nécessairement l'axe entre le centre & le sommet, & ce diametre SO, sera égal au diametre RO; c'est pourquoi l'un & l'autre seront également éloignés du sommet de l'hyperbole: ce qui est encore évident par la génération de cette courbe; donc divisant l'arc RS en deux également en P, la ligne PO sera l'axe cherché.

Ayant donc trouvé la moitié du premier axe, élevez sur le point O (*Fig.* 88.), la ligne OY, perpendiculaire & égale à ce demi-axe; tirez BY, & faisant OX = OY, tirez l'ordonnée PX, qui sera égale au demi-second axe (*n.* 131.); c'est pourquoi portant PX de O en C, & de O en D, la ligne CD sera le second axe; ainsi la troisiéme proportionnelle au premier axe & au second, sera le parametre du premier, & la troisiéme proportionnelle au second & au premier, sera le parametre du second, & pour avoir le foyer, vous porterez la distance BD de O en E, & le point E sera le foyer (*n.* 126.).

Enfin pour avoir les asymptotes vous couperez BD, BC (*Fig.* 101.), chacune en deux également, & du point O, par les points de division, vous tirerez les droites OF, OE, qui seront les asymptotes demandées (*n.* 153.).

## PROBLEME XXXIII.

178. *Un diametre étant donné avec sa tangente BC, ou une ordonnée NS* (Fig. 106.), *trouver le diametre conjugué, les deux parametres, les asymptotes.*

Faites un triangle rectangle isoscele, dont les deux côtez soient chacun égaux au demi-diametre OA; portez son hypotenuse de O en N, & tirez l'ordonnée NS, qui sera égale au demi-diametre conjugué (*n.* 131.). C'est pourquoi par le point O tirant ZX, parallele à la tangente, ou à l'ordonnée, & faisant OZ, & OX, chacune égale à NS, la droite ZX sera le diametre conjugué; tirant donc ZA, XA, & les divisant chacune en deux

parties égales, les droites OR, OQ, tirées du centre par les points de diviſion, ſeront les aſymptotes (*n.* 153.); tout cela a été démontré ci-deſſus: quand aux parametres, il eſt facile de les trouver en ſuivant ce qui en a été dit.

## PROBLEME XXXIV.

179. *Une hyperbole étant donnée, décrire ſur un premier axe donné une hyperbole ſemblable à la donnée.*

Faites: comme le premier axe de l'hyperbole donnée eſt au ſecond axe, ainſi l'axe donné eſt au ſecond axe qu'on cherche; & cet axe étant trouvé, vous décrirez une hyperbole qui ſera ſemblable à la donnée; ce qui ſe démontre de même que nous avons fait pour l'Ellipſe.

### COROLLAIRE.

180. Toutes les hyperboles ne ſont donc point ſemblables, & il faut pour les rendre telles, que les deux axes ſoient proportionnels.

## PROBLEME XXXV.

181. *Meſurer une hyperbole* (Fig. 111.).

On n'a point encore trouvé de maniere Géometrique pour trouver l'aire d'une hyperbole terminée par une ordonnée BC; mais on peut de même que pour le cercle, en approcher d'auſſi près qu'on voudra, ainſi qu'on va voir.

Cherchez l'axe & les aſymptotes OD, OL, du ſommet A, menez AR, parallele à l'aſymptote DO, & partageant la ligne RL en parties égales, les plus petites que vous pourrez, tirez les paralleles ST, IH, MN, &c.

Les rectangles OS×ST, OH×HI, OM×MN, &c. ſont chacun égaux au quarré de AR (*n.* 158.), diviſant donc la valeur de $\overline{AR}^2$ par celle de OS, vous aurez la valeur de ST, de même diviſant $\overline{AR}^2$ par OH, vous aurez la valeur de HI, &c. Ayant donc trouvé toutes les valeurs des paralleles ST, HI, &c. vous regarderez les petits eſpaces ARST, TSHI, &c. comme autant de trapezoïdes; car les parties AT, TI, IN, &c. de la courbe, étant très-petites, peuvent être priſes pour des lignes droites, & vous meſurerez chacun de ces trapezoïdes, comme nous l'avons enſeigné plus haut; c'eſt-à-dire vous prendrez la moitié de

AR, & la moitié de TS, & les ajoûtant enſemble, vous multiplierez leur ſomme par la hauteur *ab*, & le prodoit ſera la valeur du trapezoïde ARST, vous prendrez de même la moitié de TS & la moitié de HI, & multipliant leur ſomme par leur hauteur qui eſt la même que *ab*, vous aurez le trapezoïde TSHI, & ainſi des autres; enſuite vous meſurerez le triangle CGL, & le triangle ARO, & faiſant une ſomme des trapezoïdes & des deux triangles, vous aurez la valeur de l'eſpace OACL, & doublant cette valeur, vous aurez celle de l'eſpace DOLCAB; ainſi meſurant le triangle DOC, & ôtant de ſon aire la valeur de DOLCAB, le reſte ſera l'aire de l'hyperbole.

Cette méthode approche beaucoup de la juſteſſe; mais comme elle demande beaucoup de calculs, ce qui embaraſſe extrêmement dans la pratique, en voici un autre qui n'eſt guere moins juſte, & qui peut ſe pratiquer ſans beaucoup de peine; cherchez le parametre AR du premier axe, élevez-le perpendiculairement ſur l'extrêmité A, & de l'autre extrêmité B, tirez par R la ligne BV; enſuite du milieu de RT, tirez SG, parallele au premier axe, & TX perpendiculaire à ce même axe, le quarré de l'ordonnée XQ, ſera égal à l'abſciſſe AX multipliée par XT (*n.* 133.), & ſi vous prenez XT, ou AS, pour le parametre d'une parabole, dont le ſommet ſoit en A, XQ ſera auſſi ordonnée à cette parabole, puiſque par la proprieté de cette courbe $XQ = AX \times AS$. l'hyperbole & le parabole ſe rencontreront donc au point Q. Mais ſi vous tirez une autre ordonnée MN entre le ſommet, & l'ordonnée XQ, le quarré de M*a* ordonnée à l'hyperbole, ne vaudra que $AM \times Mb$, au lieu que le quarré de MN, ordonnée à la parabole, vaudra $AM \times AS$, & par conſéquent la parabole ſera hors de l'hyperbole enrre A & Q; & au contraire, ſi vous tirez une autre ordonnée IH en-deſſous de Q, le quarré de IF ordonnée à l'hyperbole, vaudra $AI \times IV$, tandis que le quarré de IH ordonnée à la parabole, ne vaudra que $AI \times IG$; ainſi la parabole ſera en-dedans de l'hyperbole de Q en H; meſurant donc la parabole, il eſt évident que ſi vous avez du trop de A en Q, vous aurez du moins de Q en H, & qu'il ſe fera une compenſation aſſez juſte pour la pratique.

## PROBLEME XXXVI.

182. *Un ſegment d'hyperbole ACB* (Fig. 113. 114. 115.), *étant*

*donné, faire ſur un autre diametre OM, un ſegment égal au ſegment donné.*

Faites comme OC eſt à CL, OE eſt à EI, & tirez l'ordonnée FD, qui fera le ſegment FED, égal au ſegment donné; ce qui ſe démontre de même que nous avons fait à l'égard de l'Ellipſe, (*n.* 117.).

### COROLLAIRE.

183. Il ſuit de-là que pour meſurer un ſegment ACB de l'hyperbole, on n'a qu'à faire avec le grand axe un ſegment égal au ſegment donné, & meſurer enſuite le ſegment de même qu'on meſure l'hyperbole.

### REMARQUE.

184. Après avoir parlé des trois Sections coniques en particulier, nous ajoûterons ici deux Problemes pour les trois Sections en général, & quelques remarques touchant les tangentes.

### PROBLEME XXXVII.

185. *Un diametre AB étant donné* (Fig. 116. 117. 118.), *trouver la poſition de ſes ordonnées.*

Tirez deux lignes CD, EF, paralleles au diametre, & qui en ſoient également éloignées, de façon qu'elles coupent la Section en deux points H, I, que vous joindrez par une ligne droite HI, laquelle ſera ordonnée au diametre donné, de même que toutes les lignes qui lui ſeront paralleles; en quoi cependant il faut obſerver, ſi la Section eſt une Ellipſe, que la ligne HI ne paſſe pas par le centre; & en cas que cela arrive, il faut tirer d'autres paralleles au diametre qui en ſoient plus proches, pour la raiſon qu'on connoîtra bien-tôt par la démonſtration.

### DEMONSTRATION.

La ligne HI eſt partagée en deux également par le diametre AB; ainſi tirant une autre ligne KL, parallele à HI, & le diviſant en deux également, la ligne qui paſſera par le milieu de KL, & par le milieu de HI, ſera un diametre, & ce diametre ne ſera pas different de la ligne BA; car ſi cela pouvoit être, il s'enſuivroit que deux diametres pourroient s'entrecouper dans l'aire de la courbe hors du centre, ce qui n'eſt pas poſſible, puiſque dans la parabole les diametres ſont paralleles entr'eux,

& ne se coupent point; que dans l'hyperbole les diametres ne se rencontrent qu'au centre, lequel est toujours hors de l'aire, & que dans l'Ellipse ils se rencontrent au centre, où nous supposons que le point O n'est pas.

## PROBLEME XXXVIII.

186. *Une Section conique étant donnée, trouver un diametre qui passe avec ses ordonnées de part & d'autre, un angle égal à un angle donné* abc (Fig. 119. 120. 121.).

Si la section est une parabole (*Fig.* 119.), cherchez un diametre DE, & à son sommet D faites un angle RDF, égal à l'angle donné, divisez DF en deux parties égales en G, & du point G tirez parallelement à DE la droite GS, qui sera le diametre cherché; car elle sera un diametre de la parabole, à cause qu'elle est parallele à DE, & par le Probleme précedent la ligne DF lui sera ordonnée, parce qu'elle est divisée en deux également en G; or l'angle SGF, est égal à l'angle RDF, & par conséquent à l'angle donné *abc*; donc, &c.

Si la section est une Ellipse ou une hyperbole (*Fig.* 120. 121.), cherchez un diametre DE, faites à l'une de ses extrêmitez E, l'angle FED égal à l'angle donné. Du point E, élevez sur EF la perpendiculaire indéfinie EV, & à l'autre extrêmité D du diametre, faites l'angle VDE égal à l'angle VED. Du point V pris pour centre, & de l'intervalle VE, ou VD, décrivez un cercle, & du point H où ce cercle coupe la courbe du côté de l'angle DEF, tirez aux extrêmitez du diametre les droites HD, HE, que vous diviserez en deux également aux points I, N. Du point N vous tirerez QNP, parallele à EH, & du point I vous tirerez ISR, parallele à DH, les lignes QP, RS, seront deux diametres conjugués, qui feront avec leurs ordonnées des angles égaux à l'angle donné.

### DEMONSTRATION.

A cause des triangles semblables ODN, EDH, on a HD. ND :: ED. OD. donc DE est coupé en deux également en O, par la droite NO; & par conséquent QP passe par le centre, & est un diametre auquel DH est ordonnée: de même à cause des triangles semblables HED, IEO, DE est coupé en deux également par la droite IO, & par conséquent RS est un autre diametre auquel la ligne HE est ordonnée.

D'autre part l'angle FED, égal au donné *abc*, étant l'angle du segment, vaut la moitié de l'arc EHD; d'où il suit que l'angle à la circonference EHD, qui s'appuye sur l'autre segment, est le complément de l'angle FED à deux droits; mais l'angle PND est égal à l'angle EHD, à cause des paralleles; donc son complément PNH, est égal à l'angle FED, & par conséquent à l'angle donné; donc le diametre PQ fait avec ses ordonnées un angle égal au donné, & l'on prouvera de même que le diametre RS, fait avec ses ordonnées un angle égal à *abc*, & que ces deux diametres sont conjugués, à cause qu'ils sont paralleles chacun aux ordonnées de l'autre.

### *Remarques néceſſaires touchant les tangentes.*

187. Les tangentes peuvent être menées ou du point d'attouchement vers le sommet de la courbe, ou du point d'attouchement vers le côté opposé au sommet, & voici ce qu'il est bon d'observer.

En premier lieu, quand les tangentes sont menées vers le sommet, c'est-à-dire lorsqu'elles sont compriſes entre le point d'attouchement & l'axe (*Fig.* 122. 123. 124.). *Les plus grandes sont celles dont le point d'attouchement eſt plus éloigné du ſommet; & les moindres, celles dont le point d'attouchement eſt plus proche.* Il est évident que plus le point d'attouchement est éloigné, plus l'ordonnée menée de ce point à l'axe, devient grande, & l'on peut prouver aisément que la soutangente devient aussi plus grande, parce que dans la parabole (*Fig.* 122.), cette soutangente est toujours double de l'abscisse, laquelle s'aggrandit à mesure que l'ordonnée augmente, & que dans l'Ellipse & l'hyperbole (*Fig.* 122. 123.), il faut, pour avoir la soutangente, que les trois lignes OR, OA, OT, soient en proportion continuë; d'où il suit que RA devenant plus grand, TA le devient aussi, & par conséquent la soutangente entiere TR, s'aggrandit; or la tangente PT, est toujours l'hypotenuse d'un triangle rectangle PRT, dont l'ordonnée PR, & la soutangente TR, sont les côtez; donc puisque ces côtez deviennent plus grands lorsque le point d'attouchement est plus éloigné du sommet, l'hypotenuse, ou la tangente, devient aussi plus grande.

En second lieu, *Si deux tangentes PT, SX* (Fig. 125. 126. 127.), *se croiſent & vont aboutir aux diametres oppoſés, qui paſſent par les*

*points d'attouchement, la plus grande est celle dont le point d'attouchement est plus éloigné du sommet.* Tirez les droites PS, XT, les triangles POX, SOT, faits par les tangentes & les diametres, sont égaux, & ajoûtant de part & d'autre le triangle POS, les triangles PTS, PSX, sont égaux; d'où il suit que ces triangles ayant la base commune PS, ont aussi la même hauteur, & que par conséquent les droites XT, PS, sont paralleles; or dans la parabole (*Fig.* 125.), ces deux triangles ont deux côtez égaux chacun à chacun; c'est-à-dire PS, PX, & PS, ST, & l'angle XPS compris par les deux premiers, est aigu, puisque l'angle XPM, fait par l'ordonnée à l'axe, est droit; d'où il suit que l'angle PST, compris par les deux autres, est obtus, à cause des paralleles; donc le côté XS, opposé à l'angle XPS, est moindre que le côté PT, opposé à l'angle PST; c'est-à-dire la tangente PT, est plus grande que la tangente SX. De même dans l'Ellipse (Fig. 126.), TS, est plus grand que PX, à cause de SH, plus grand que PH; donc TS est plus inclinée que PX, entre les paralleles XT, PS, & par conséquent l'angle TSP est plus grand que l'angle SPX. Ainsi les deux triangles égaux XPS, TSP, ont le côté PS commun, le côté TS dans l'un plus grand que le côté XP dans l'autre; & de plus l'angle TSP compris sous les deux côtez plus grand que l'angle compris XPS; donc PT opposé à l'angle plus grand, est aussi plus grand que SX: on démontrera la même chose de l'hyperbole (*Fig.* 127.).

D'où il suit visiblement que si deux tangentes qui se croisent l'une à son point d'attouchement au sommet A de la courbe, elle sera la plus courte (*Fig.* 128. 129. 130.).

En troisiéme lieu, *lorsque deux tangentes PT, SX* (Fig. 125. 126. 127.), *se coupent, & vont aboutir aux diametres opposés, leurs parties PO, OS, comprises entre le point d'attouchement & le point de rencontre O, sont en même raison que les tangentes PT, SX.* Car à cause des paralleles XT, PS, les triangles POS, TOX, sont semblables; donc TO. OP :: OX. SO. & composant TO+OP, ou TP. OP :: SX. OS. donc OP. OS :: PT. SX. ainsi PO est plus grand que OS, comme PT est plus grand que SX; & de-là vient qu'au lieu des raisons des tangentes, ou de leurs quarrez, on se sert de la raison des parties PO, OS, ou de celle de leurs quarrez, parce que ces raisons sont égales.

En quatriéme lieu, *si deux tangentes PT, SX, sont tirées d'un même côté de la courbe* (Fig. 131. 132. 133.), *elles se coupent au point*

*O entre les deux points d'attouchement.* Car la tangente SX ayant la soutangente plus grande que la tangente PT, il faut nécessairement qu'elle coupe l'axe en un point X, plus éloigné du sommet A, que le point T; & par conséquent il faut qu'elle coupe la tangente PT: mais elle ne peut la couper entre P, & T, parce qu'alors elle couperoit la courbe, & cesseroit d'être tangente; donc elle la coupe en O, entre S & P.

En cinquiéme lieu, deux tangentes PT, SX (*Fig.* 131. 132. 133.), étant menées d'un même côté, si l'on tire les diametres qui passent par les points d'attouchement, ces tangentes se croiseront, comme on vient de voir, en un point O, entre les diametres, & l'on prouvera, comme ci-dessus, que la tangente SH, qui a son point d'attouchement plus éloigné du sommet, & qui est compriſe entre les deux diametres, est plus grande que la tangente IP, compriſe aussi entre les deux diametres; d'où l'on prouvera encore que la partie SO de la premiere, est plus grande que la partie OP de la seconde.

En sixiéme lieu, *l'angle fait par une tangente & l'ordonnée à l'axe, est d'autant plus grand que le point d'attouchement est plus éloigné du sommet A.* Car si du point S (*Fig.* 131. 132. 133.), on tire une parallele à la tangente PT, l'angle ZSN, sera égal à l'angle TPM; mais l'angle XSN, est plus grand que l'angle ZSN; donc il est plus grand aussi que TPM.

Enfin, *si deux tangentes, PI, SE, sont menées du côté opposé au sommet, elles s'éloigneront toujours l'une de l'autre.* Ce qui est évident, puisqu'en prolongeant ES vers l'axe, elle coupe PI entre les points d'attouchement. *Voyez le Supplément à la fin de cette 3^e Partie.*

## SECTION V.

### *Des propriétés de la ligne spirale, & de la Cycloïde.*

#### DEFINITION XIII.

188. Si l'on conçoit que tandis qu'une ligne AB (*Fig.* 134.), divisée en plusieurs parties égales aux points C, B, &c. tourne d'un mouvement uniforme autour du centre A, & fait plusieurs révolutions; un point A parcoure aussi d'un mouvement uniforme la ligne AB, de façon qu'il soit parvenu en C après la premiere révolution; c'est-à-dire lorsque le point C a décrit le cercle CGHI,

CGHI, & en B, après la seconde, ou lorsque le point B a décrit deux fois le cercle BRTS, & ainsi de suite, le point A décrira une courbe AXZPQC*acde*B, qui s'appelle *ligne spirale*, le point A en est le centre; la ligne AC s'appelle *ligne de premiere révolution*; la ligne AB *ligne de seconde révolution*, & ainsi de suite; la courbe AXPQC, compriſe dans le cercle de la ligne AC, s'appelle *premiere spirale*; la courbe AXPQC*acde*B, compriſe dans le cercle de la ligne AB, *seconde spirale*, & de même des autres.

## PROBLEME XXXIX.

189. *Décrire une ligne spirale* (Fig. 134.).

Prenez une ligne AB, que vous diviſerez en deux ou pluſieurs parties égales, ſelon le nombre des révolutions que vous voudrez donner à la ſpirale; du point A pris pour centre, & de l'intervalle de la premiere partie AC, décrivez un cercle CFGHIC, diviſez ſa circonference en pluſieurs parties égales, comme par exemple en douze, & du centre A, tirez au point de diviſion les rayons AF; AG, &c. diviſez la ligne AC en un même nombre de parties égales, & portez une de ces parties ſur le rayon ſuivant de A en X, deux ſur celui qui vient après de A en Z, trois ſur le ſuivant de A en V, & ainſi de ſuite; & par les points A, X, Z, V, &c. faites paſſer une courbe qui ſera la premiere ſpirale, lorſqu'elle ſera parvenuë en C; car les arcs CF, FG, &c. étant égaux par la conſtruction, il eſt évident que le rayon AC, qui ſe meut uniformement, mettra autant de tems à parcourir l'un qu'à parcourir l'autre, & qu'ainſi il employera douze parties égales de tems à parcourir toute la circonference; & comme le point A qui ſe meut auſſi uniformement, ne doit avoir parcouru le rayon AC, qu'à la fin de la douziéme partie de tems; il eſt encore évident qu'il ne doit avoir parcouru à chaque partie de tems qu'une douziéme partie de ce rayon.

Si vous voulez décrire la ſeconde ſpirale, prolongez les rayons AC, AF, AG, &c. juſqu'à la circonference décrite par le rayon AB, & portez ſur FR, une douziéme partie de AC, ſur GY deux douziémes, & ainſi de ſuite, & faiſant paſſer une ligne courbe par les points *a*, *b*, *c*, &c. la courbe entiere AXPQC*acde*B, ſera la ſeconde ſpirale, & de même pour les autres.

## COROLLAIRE.

190. Il eſt clair par la conſtruction que les droites AX, AZ,

AV, &c. compriſes entre le centre & la ligne ſpirale, ſont entr'elles comme les nombres naturels 1. 2. 3. 4. &c. de même que les arcs CF, CG, compris entre la ligne de premiere révolution & les rayons dont ces droites ſont parties; & qu'ainſi ces droites ſont entr'elles comme les arcs correſpondans, & qu'elles ſont au rayon ou à la ligne AC, comme les arcs correſpondans à la circonference entiere.

## REMARQUE.

### *Pour l'intelligence des Problemes ſuivans.*

191. Nous avons déja dit qu'il y a quatre eſpeces differentes de grandeurs, le point, la ligne, la ſurface, & le corps ou ſolide. La ligne ne differe du point que par la longueur; la ſurface ne differe de la ligne que par ſa largeur, & le corps ne differe de la ſurface que par la profondeur; mais ſi l'on vient à comparer les grandeurs de même eſpece entr'elles, on peut y trouver pluſieurs ſortes de differences, dont nous allons parler ici.

Si deux grandeurs de même eſpece different entr'elles d'une grandeur de même eſpece qu'elles; cette difference s'appellera *difference du premier genre.* Si la difference de deux lignes eſt une ligne, ſi celle de deux ſurfaces eſt une ſurface, & celle de deux corps eſt un corps, la difference ſera du premier genre.

Si la difference de deux grandeurs de même eſpece, eſt d'une eſpece immédiatement inferieure, on l'appellera difference *du ſecond genre;* ainſi lorſque la difference de deux lignes ſera un point, celle de deux ſurfaces une ligne, celle de deux corps une ſurface, elle ſera du *ſecond genre.*

De même ſi la difference de deux grandeurs de même eſpece, eſt d'une eſpece inferieure de deux degrez, on l'appellera difference du *troiſiéme genre*; par conſéquent ſi la difference de deux ſurfaces eſt un point, celle de deux corps une ligne, elle ſera du troiſiéme genre; d'où il ſuit que ſi deux corps ne different que d'un point qui eſt d'une eſpece inferieure de trois degrez, cette difference doit s'appeller difference *du quatriéme genre.*

*Toute difference du premier genre empêche la parfaite égalité entre les grandeurs dont elle eſt la difference.* Si deux lignes, par exemple, different entr'elles d'une ligne, cette difference, quelque petite qu'elle ſoit, pourra toujours s'aſſigner, parce qu'une ligne n'étant jamais contenuë qu'un certain nombre de fois dans une autre

ligne, soit avec reste, soit sans reste, on peut toujours trouver qu'elle est plus contenuë dans une ligne que dans une autre, & que par conséquent l'une des deux est plus grande; que si on vouloit supposer que deux lignes qui differeroient entr'elles d'une autre ligne, fussent cependant infinies, alors on détruiroit par cela même la supposition; car les deux lignes étant infinies, contiendroient chacune une infinité de fois la difference, puisque l'infini contient le fini une infinité de fois; & par conséquent il n'y auroit plus de difference entr'elles, ce qui est contre ce qu'on auroit supposé. Il faut dire la même chose de deux surfaces qui differeroient entr'elles d'une surface, & de deux corps, dont la difference seroit un corps.

*Toute difference du second genre n'empêche point la parfaite égalité entre les grandeurs dont elle est la difference, à moins qu'elle ne soit prise une infinité de fois.* Deux lignes, par exemple, qui ne different entr'elles que d'un point, sont parfaitement égales, parce que le point étant contenu une infinité de fois dans l'une & dans l'autre, il n'est pas possible d'assigner laquelle des deux le contient une fois plus, ni de montrer où est l'inégalité. Il en est de même de deux surfaces qui ne differeroient entr'elles que d'une ligne, & de deux corps qui ne differeroient entr'eux que d'une surface, parce que les surfaces contiennent la ligne une infinité de fois, de même que les corps contiennent une infinité de fois la surface.

Mais si deux lignes ne differant entr'elles que d'un point, on vient à prendre le point une infinité de fois, alors ce point devient une ligne, & par conséquent une difference du premier genre par rapport aux lignes, ce qui commence à mettre entr'elles de l'inégalité. De même si on prend une infinité de fois une ligne qui étoit la difference de deux surfaces, cette ligne devient une surface, ou une difference du premier genre, qui rend les deux surfaces inégales; & la même chose doit se dire de deux corps qui ne differeroient entr'eux que d'une surface.

*Toute difference du troisiéme genre n'empêche point la parfaite égalité entre les grandeurs dont elle est la difference, quand même on la prendroit une infinité de fois.* Deux surfaces, par exemple, qui ne different que d'un point, sont parfaitement égales; car puisqu'elles ne cessent pas de l'être quand leur difference est une ligne, à plus forte raison le sont-elles lorsque cette difference n'est qu'un point;

& si l'on prend ce point une infinité de fois, on n'aura tout au plus qu'une ligne, laquelle n'étant qu'une difference du second genre par rapport aux surfaces, ne mettra aucun obstacle à leur égalité.

De-là il est évident qu'*une difference du quatriéme genre n'empêche point l'égalité entre les grandeurs dont elle est la difference, non-seulement quand on la feroit devenir du troisiéme genre en la prenant une infinité de fois, mais même quand on la feroit devenir du second en prenant une infinité de fois celle du troisiéme.* Ainsi si un point est la difference de deux corps, ce point pris une infinité de fois, deviendra une ligne; & cette ligne prise une infinité de fois, deviendra une surface, qui n'empêchera pas que les deux corps ne soient égaux.

Pour appliquer ceci à un exemple. Soit un triangle rectangle ABC, dont je suppose que les lignes BC, EF, GH, &c. sont les Elemens; des extrêmitez B, E, G, &c. de ces Elemens, j'éleve les perpendiculaires BQ, EP, GR, &c. jusqu'à la rencontre de l'Element voisin; ainsi j'ai les trapezoïdes BEFC, EGHF, &c. & les rectangles BQFC, EPHF, &c. & comme il y a autant de trapezoïdes qu'il y a de rectangles, en comptant le triangle AHO au nombre des trapezoïdes, & que les uns & les autres ont la même hauteur, je dis que non-seulement chaque rectangle sera égal à chaque trapezoïde, mais encore que la somme des rectangles sera égale à la somme des trapezoïdes, & par conséquent au triangle; car les Elemens BC, EF, GH, &c. étant entr'eux comme les abscisses AC, AF, &c. sont par conséquent comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3. &c. à l'infini, en commençant par le point A, & par conséquent ils ne different entr'eux que d'un point; donc la difference de l'Element BC à l'Element EF, est un point; or ces Elemens étant infiniment proches, la hauteur BQ du rectangle BQFC, & du trapezoïde BEFC, est nulle; donc ces deux surfaces ne different entr'elles que d'un point, lequel étant une difference du troisiéme genre, n'empêchera pas que le rectangle & le trapezoïde ne soient égaux, & il en sera de même de chaque rectangle comparé à chaque trapezoïde. Maintenant si l'on prend la somme des rectangles & celle des trapezoïdes, on prendra nécessairement la difference une infinité de fois, parce qu'il y a une infinité de rectangles; mais comme un point pris une infinité de fois, n'est qu'une ligne, qui est une difference du second genre par rapport aux

surfaces, il s'ensuit que la somme des rectangles sera encore égale à celle des trapezoides. Ce qui est en effet vrai ; car les rectangles ayant tous la même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases ou comme les Elemens, & par conséquent comme la suite infinie o. 1. 2. 3. 4. &c. donc leur somme est au plus grand multiplié par le nombre des termes, ou au rectangle BCAX, comme 1. à 2. or la somme des trapezes, ou le triangle, est aussi au rectangle BCAX, comme 1. à 2. donc la somme des rectangles est égale à la somme des trapezes.

D'autre part si nous considerons les triangles EQB, GPE, IRG. qui sont tous égaux entr'eux, nous trouverons que leurs côtez étant extrêmement petits, l'hypotenuse BE, ne peut differer du côté BQ, que d'un point, lequel étant une difference du second genre, n'empêche pas que nous ne puissions dire que BE est égal à BQ, & ainsi de chaque hypotenuse en particulier à l'égard du côté correspondant; mais si nous venons à faire la somme des hypotenuses & celle des côtez, alors comme leur nombre de part & d'autre est fini, nous prendrons nécessairement la difference une infinité de fois, & par conséquent cette difference deviendra du premier genre, c'est-à-dire une ligne qui empêchera que la somme des côtez ne soit égale à celle de l'hypotenuse, ou à la ligne BA, ce qui est encore vrai; car il est visible que la somme des côtez BQ, EP, GR, &c. est égale au côté AC, qui est moindre que BA.

## PROBLEME XL.

192. *Mesurer une ligne spirale* (Fig. 134.).

On n'a point encore trouvé de méthode Géometrique pour mesurer cette ligne; mais voici ce qu'on peut faire pour en approcher.

Concevez que la circonference CGHI de la premiere révolution soit divisée en une infinité de parties égales, & que des points de division que je suppose être les points F, G, &c. on tire des rayons au centre les parties AX, AZ, AV, &c. comprises entre le centre & la spirale, seront entr'elles comme la suite infinie o. 1. 2. 3. 4. &c. & ne differeront entr'elles que d'un point, concevez que du centre A, & de chacune de ces parties prises pour rayons, on décrive des petits arcs, tels que vous les voyez dans la figure. Ces arcs seront infiniment proches de la spirale, de sorte que le secteur, par exemple, AMN, ne differera de l'espace

AMQ, que d'un point, lequel étant une difference du troiſiéme genre, n'empêchera point la parfaite égalité entre le ſecteur & l'eſpace ; & il en ſera de même des autres ſecteurs & des eſpaces correſpondans : d'où il ſuit que la ſomme des ſecteurs ſera encore parfaitement égale à celle des eſpaces, ou à l'eſpace total compris par la premiere ſpirale, parce que la difference priſe une infinité de fois, ne ſera qu'une ligne, laquelle eſt du ſecond genre, & ne détruit point l'égalité des ſurfaces.

Il n'en ſera pat de même de la ſomme des arcs des ſecteurs, & de celle des arcs correſpondans de la ſpirale ; car quoique chaque arc de ſecteur en particulier ne differe de chaque arc de la ſpirale que d'un point, cependant ce point pris une infinité de fois, deviendra une ligne, ou une difference du premier genre ; de façon que la ſpirale ou la ſomme de ſes arcs, ſera plus grande que la ſomme des arcs des ſecteurs.

Néanmoins comme Archimede a trouvé que la difference de deux polygones de 96 côtez, l'un inſcrit, & l'autre circonſcrit au cercle, n'étoit à peu près que $\frac{1}{4\,\cdot\,7}$ de la circonference ; d'où il ſuit que celle du polygone inſcrit à la circonference, n'eſt à peu près que $\frac{1}{9\,9\,4}$ de cette même circonference, quoique le polygone de 96 côtez ne ſoit pas infiniment proche de la circonference, ni les côtez & les arcs qu'ils ſoutiennent, infiniment petits ; il eſt viſible que la difference de la ſomme des arcs de ſecteurs à la ſpirale, ſera de beaucoup moindre que $\frac{1}{9\,9\,4}$ de la ſpirale, attendu que les arcs de ſecteurs ſont infiniment proches de la ſpirale, & que d'ailleurs les arcs de ſecteurs & ceux de la ſpirale, ſont courbes ; ce qui contribuë beaucoup plus à leur égalité que ſi les uns étoient des lignes droites, & les autres des courbes, comme il arrive à l'égard des côtez des polygones inſcrits, & des arcs qu'ils ſoutiennent. Si nous trouvons donc la ſomme des arcs des ſecteurs, nous pourrons dans la pratique la prendre pour la ſpirale ſans commettre d'erreur conſiderable, & c'eſt à préſent ce que nous allons chercher.

Conſiderez donc que les ſecteurs ayant les angles égaux ſont ſemblables, & que par conſéquent leurs arcs ſont entr'eux comme leurs rayons, ou comme la ſuite infinie 0. 1. 2. 3. 4. &c. or le plus grand de ces arcs ſera l'arc 12, lequel étant infiniment proche de l'arc C3, n'en differe que d'une partie infiniment petite, qui n'empêche point la parfaite égalité entre ces deux arcs, comme il a été obſervé ci-deſſus ; donc la ſomme des

arcs de secteurs sera au plus grand C3 multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire à la circonference de la premiere révolution, comme 1. est à 2. ainsi la somme des arcs étant égale à la moitié de la circonference, la premiere spirale lui sera égale à peu de chose près, nous prendrons dorénavant la somme de ces arcs pour la spirale même.

## COROLLAIRE I.

193. *La seconde spirale est égale à la moitié de la seconde circonference prise deux fois.* Le rayon AB a décrit deux fois sa circonference quand le point A artive en B; ainsi le nombre d'arcs de secteurs est double du nombre d'arcs qui composent cette circonference; donc la somme des arcs de secteurs est au plus grand 56, ou BR, multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire au double de la seconde circonference, comme 1. est à 2. Par la même raison la troisiéme spirale est égale à la moitié de la troisiéme circonference prise trois fois, & ainsi des autres.

## COROLLAIRE II.

194. *Les spirales 1^e, 2^e, 3^e, &c. sont entr'elles comme les quarrez 1. 4. 9. &c. des rayons des circonferences.* La seconde circonference étant double de la premiere, la troisiéme triple, la quatriéme quadruple, &c. si l'on double la seconde, qu'on triple la troisiéme, qu'on quadruple la quatriéme, & ainsi de suite, elles seront entr'elles comme les nombres 1. 4. 9. &c. or les spirales sont entr'elles comme les moitiés de ces nombres par le Corollaire précedent; donc elles sont aussi comme ces nombres.

## COROLLAIRE III.

195. *Si l'on retranche la premiere spirale de la seconde, la seconde de la troisiéme, la troisiéme de la quatriéme, & ainsi de suite, les restes seront entr'eux comme les nombres impairs 1. 3. 5. 7. &c.* La premiere spirale étant à la seconde comme un à quatre, si on retranche la premiere de la seconde, la premiere sera au reste de la seconde comme 1. à 3. de même si de la troisiéme on ôte la seconde, cette seconde sera au reste de la troisiéme comme 4. à 5. & le reste de la seconde sera au reste de la troisiéme comme 3. à 5. & la premiere à la troisiéme comme 1. à 5. &c.

## COROLLAIRE IV.

196. *Si du centre A* (Fig. 136.), *on tire une droite AP, qui coupe les ſpirales, la portion AIB de la premiere ſpirale, ſera égale à la moitié de l'arc correſpondant BX d'un cercle, qui auroit pour rayon la droite AB.* Diviſant cet arc en une infinité d'arcs égaux, & tirant des lignes au centre, ſi on inſcrivoit des arcs dans la portion AIB de la ſpirale, ainſi que nous avons fait (*Fig.* 134.), les arcs inſcrits ſeroient entr'eux comme les nombres 0. 1. 2. 3. &c. à l'infini, & par conſéquent ils ſeroient au plus grand multiplié par le nombre des termes, c'eſt-à-dire à l'arc BX, comme 1. à 2.

De même *la partie AC de la ſeconde ſpirale, ſera égale à la moitié de la circonference, qui auroit pour rayon la droite AC, plus la moitié de l'arc CM de cette circonference, compris entre le point C & la ligne des révolutions.* Qand la ſpirale eſt parvenuë en E, le rayon AM a décrit tout ſon cercle, & quand elle parvient en C, ce rayon décrit l'arc CM. Ainſi le nombre des termes eſt le cercle du rayon AC, plus l'arc CM, par conſéquent la portion AC de la ſpirale, eſt égale à la moitié de ce cercle, plus la moitié de ſon arc.

Par la même raiſon *la portion AD de la troiſiéme ſpirale, eſt égale à la moitié de deux fois la circonference qui auroit pour rayon l'arc AD, plus la moitié de l'arc compris entre le point D & la ligne des révolutions.* Quand la ſpirale eſt parvenuë en F, le rayon AD a décrit deux fois ſa circonference, & quand elle parvient en D, ce rayon décrit l'arc compris entre le point D & la ligne des révolutions; donc le nombre des termes eſt le double de cette circonference, plus l'arc compris entre le point D & la ligne AH, & par conſéquent la ſpirale eſt égale à la moitié du double de cette circonference, plus la moitié de ſon arc.

On prouvera de la même façon que *la partie AR de la quatriéme ſpirale, eſt égale à la moitié de trois fois la circonference, qui auroit pour rayon la ligne AR, plus la moitié de l'arc compris entre le point R, & la ligne des révolutions.*

## COROLLAIRE V.

197. *Les ſpirales AB, AC, AD, AR, &c. compriſes entre le centre & la ligne droite AR qui les coupe, ſont entr'elles en raiſon doublée, ou comme les quarrez des lignes AB, AC, AD, AR, qui les terminent.* C'eſt une ſuite du ſecond Corollaire, où nous avons montré que les ſpirales 1^e^, 2^e^, 3^e^, &c. ſont entr'elles comme les

les quarrez des lignes de révolutions. Mais pour rendre ceci plus sensible, supposons que la ligne AC qui coupe les spirales, soit la ligne AQ, qui est le prolongement de la ligne de révolution, & comparons la partie A*a* de la seconde spirale avec la partie A*b* de la troisiéme.

Par la génération de la spirale, la droite *tu* est égale à la droite *u*A, & la droite *tu* est divisée en deux parties égales en *a*; donc A*a* est égal aux trois moitiés de A*u*, & par conséquent la circonference du rayon A*a*, sera égale aux trois moitiés de la circonference du rayon A*u*. Appellons donc cette circonference $\frac{3}{2}$ C.

La droite A*b* étant égale à $\frac{5}{2}$ de la droite A*u* par la même génération de la spirale, la circonference du rayon A*b*, sera aussi égale à cinq moitiés de la circonference du rayon A*u*; ainsi nous l'appellerons $\frac{5}{2}$ C.

Or quand la spirale est parvenuë en E, le rayon A*u* a décrit sa circonference, & quand elle est parvenuë en *a*, ce même rayon a décrit l'arc compris entre le point *a* & la ligne des révolutions, & par conséquent il a décrit sa demi-circonference, de façon qu'il a décrit en tout trois moitiés de sa circonference; mais sa circonference est $\frac{3}{2}$ C; donc il a décrit $\frac{3}{2}$ de $\frac{3}{2}$ C, ou $\frac{9}{4}$ C; & comme la spirale est toujours égale à la moitié de tout ce que le rayon a décrit, il s'ensuit que la spirale A*a*, vaut $\frac{9}{8}$ C.

De même quand la spirale est parvenuë en F, le rayon AB a décrit deux fois sa circonference, & quand elle est parvenuë en *b*, ce rayon a décrit sa demi-circonference, de façon qu'il a décrit en tout $\frac{5}{2}$ de sa circonference; mais sa circonference est $\frac{5}{2}$ C; donc le rayon a décrit $\frac{5}{2}$ de $\frac{5}{2}$ C, ou $\frac{25}{4}$ C, & par conséquent la spirale A*b*, vaut $\frac{25}{8}$ C. Ainsi les deux spirales A*a*, A*b*, sont entr'elles comme $\frac{9}{8}$ C à $\frac{25}{8}$ C, ou comme 9 à 25, ou comme le quarré de 3 au quarré de 5, c'est-à-dire comme le quarré de A*a*, au quarré de A*b*.

On prouvera la même chose des autres spirales terminées par la ligne AQ.

## COROLLAIRE. VI.

198. *Les spirales étant terminées par une droite AQ, si on ôte la premiere de la seconde, la seconde de la troisiéme, & ainsi de suite, les restes seront entr'eux comme les nombres impairs* 1. 3. 5. *&c.* Ce qui se démontre comme dans le troisiéme Corollaire.

## COROLLAIRE VII.

199. *Toutes les ſpirales, égales ou inégales, ſont ſemblables.* Car ſoient les ſpirales (*Fig.* 134. 136.) la premiere ſpirale AC, eſt à la premiere AE, comme la circonference de premiere révolution à la circonference de premiere révolution, puiſque l'une & l'autre ſont la moitié de leurs circonferences; d'où il ſuit encore qu'elles ſont entr'elles comme les rayons de ces mêmes circonferences; de même la ſeconde ſpirale AB, eſt à la ſeconde AF, comme la ſeconde circonference eſt à la ſeconde circonference, puiſque l'une & l'autre ſont la moitié de deux fois leur circonference, &c.

## COROLLAIRE VIII.

200. *Si l'on compare une ſpirale d'une part avec une ſpirale de l'autre, qui ne ſoit pas du même degré, c'eſt-à-dire, par exemple, la ſeconde AB* (Fig. 134.), *avec la quatriéme AH* (Fig. 136.), *elles ſeront entr'elles en raiſon compoſée de la raiſon des lignes de premiere révolution, & de celle des quarrez AF, AH des lignes de la ſeconde & quatriéme révolution* (Fig. 136.) La ſeconde ſpirale AB, eſt à la ſeconde AF, comme AB à AF, ou comme la ligne de premiere révolution AC à la ligne de premiere révolution AE, & la ſeconde ſpirale AF eſt à la quatriéme AH, comme le quarré AF au quarré AH (*n.* 197.); or la ſpirale AB (Fig. 134.), eſt à la ſpirale AH (*Fig.* 36.), en raiſon compoſée de celle de la ſpirale AB à la ſpirale AF (*Fig.* 36.), & de celle de la ſpirale AF à la ſpirale AH; donc elle eſt auſſi en raiſon compoſée de celle de la ligne AC de premiere révolution à la ligne AE de premiere révolution, & de celle du quarré AF au quarré AH.

## COROLLAIRE IX.

201. *Si l'on compare, par exemple, une ſeconde ſpirale AB* (Fig. 134.), *avec une quatriéme AH* (Fig. 136.), *& que la ligne AB, de ſeconde révolution d'une part, ſoit égale à la ligne AH de quatriéme révolution, ces deux ſpirales ſeront entr'elles en raiſon réciproque des premieres lignes de révolution AE, AC.* La ſeconde ſpirale AB, ſera égale à la circonference de ſon cercle, & la quatriéme AH, ſera double de celle du ſien. Ainſi la ſpirale AB, ſera à la ſpirale AH, comme 1. à 2. à cauſe de l'égalité des cercles; mais les lignes

de premiere révolution AE, AC, ſont auſſi comme 1. à 2. donc, &c.

## COROLLAIRE X.

202. Puiſque les parties AX, AZ, AV, AP, &c. d'une ſpirales (*Fig.* 134.), compriſes entre le centre & les lignes AX, AZ, AV, &c. qui les terminent (*n.* 197.), ſont entr'elles comme les quarrez de ces lignes, il s'enſuit que ſi on déployoit la ſpirale en ligne droite, & que les lignes AX, AZ, &c. fuſſent élevées perpendiculairement chacune ſur le point correſpondant, on auroit une parabole ABC (*Fig.* 137.), puiſque les quarrez des ordonnées ſeroient entr'eux comme leurs abſciſſes; & par la même raiſon ſi le diametre AB d'une parabole ſe replioit, en ſorte que ſes ordonnées ſe touchaſſent toutes par leur extrêmité en un ſeul point, on auroit une ſpirale. Mais il faut obſerver que ce diametre AB, en ſe repliant, devroit ſe briſer en petits arcs, tels que ceux qui ſont inſcrits dans la ſpirale; car ſi de l'extrêmité E du parametre AE de la parabole, on éleve une perpendiculaire EF, juſqu'à la rencontre de la parabole, l'ordonnée GF ſera égale à l'abſciſſe AG, comme il a été démontré ailleurs; & par conſéquent les ordonnées tirées entre les points A, G, ſeront plus grandes que leurs abſciſſes, à cauſe que leurs quarrez ſeront égaux à leurs abſciſſes multipliées par le parametre, qui ſera alors plus grand que chacune des ordonnées; donc la partie AG du diametre en ſe repliant en ſpirale, ne pourra pas contenir ſes ordonnées, à moins qu'elle ne ſe briſe en petits arcs, parce qu'autrement il s'enſuivroit qu'une ligne droite ſeroit plus grande qu'une courbe qui la renferme; & de-là on peut tirer une autre preuve, que la véritable ligne ſpirale eſt plus grande que la ſomme des arcs de ſecteurs que nous prenons ici pour cette ligne, à cauſe du peu de difference qui ſe trouve entre l'une & l'autre.

## COROLLAIRE XI.

203. *Si la parabole ABC* (Fig. 137.), *ſe change en ſpirale, l'eſpace qu'elle renferme n'eſt plus que la moitié de celui qu'elle renfermoit auparavant* Si l'on inſcrit des parallelogrames dans la parabole, la ſomme deſquels, à cauſe de leurs hauteurs, infiniment petite, ne differera pas de la parabole; il arrivera lorſque le diametre de la parabole viendra à ſe replier, que ces parallelogrames ſe chan-

geront en triangles de même hauteur & de même base, & que par conséquent la somme de ces triangles, où la spirale ne sera que la moitié de la somme des parallelogrames ou de la parabole. J'appelle ici *triangles* les secteurs inscrits dans la spirale, & l'on voit aisément que par la base de ces triangles, j'entends les arcs de ces secteurs, chacun desquels sera égale à la partie brisée de l'axe AB, qui se trouve comprise entre deux ordonnées.

Tout ceci est extrémement curieux, & même nouveau; on peut voir là-dessus ce qu'en a écrit Wallis dans son Arithmetique des infinis, d'où j'ai tiré la plûpart des choses que je viens de dire, quoique je m'en sois écarté dans le huitiéme Corollaire, parce qu'il m'a paru qu'il s'étoit trompé sur cet article.

## PROBLEME XLI.

204. *Mesurer l'espace renfermé par une ou plusieurs spirales* (Fig. 134)

En premier lieu, l'espace de la premiere spirale est égal au tiers du premier cercle. Car si l'on divise ce cercle en une infinité de petits secteurs tous égaux, & qu'on inscrive des secteurs dans la spirale, ces secteurs inscrits seront semblables entr'eux, à cause de l'égalité des angles, & leur rapport sera comme la suite infinie 0. 1. 4. 9. 16. &c. des quarrez des nombres naturels, parce qu'ils sont en raison doublée de leurs rayons AX, AZ, AV, &c. lesquels sont entr'eux comme la suite infinie 0. 1. 2. 3. &c. de ces mêmes nombres; donc leur somme sera au plus grand 1A2, ou CA3, multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire au premier cercle, comme 1. à 3. (*Partie 2. n.* 240.).

En second lieu, quand la spirale est parvenuë en B, la ligne AB de seconde révolution, a décrit deux fois son cercle; donc le nombre de secteurs de la spirale est double du nombre de secteurs de ce cercle; ainsi la somme des secteurs décrits par la spirale, est au plus grand multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire au cercle de seconde révolution pris deux fois, comme 1. à 3.

Et par la même raison on trouvera que le nombre de secteurs de la spirale, lorsqu'elle est parvenuë à l'extrêmité de la ligne de troisiéme révolution, est au troisiéme cercle pris trois fois, comme 1. à 3. que la spirale étant parvenuë à l'extrêmité de la ligne de quatriéme révolution, la somme des secteurs est au quatriéme pris quatre fois, comme 1. à 3. & ainsi des autres.

Or comme les rayons des cercles sont entr'eux comme les

nombres 1. 2. 3. 4. &c. les cercles étant en raiſon doublée de ces rayons, ſeront entr'eux comme les nombres 1. 4. 9. 16. &c. & doublant le ſecond, triplant le troiſiéme, quadruplant le quatriéme, & ainſi de ſuite, on aura 1. 8. 27. 64. &c. dont les tiers $\frac{1}{3}\ \frac{8}{3}\ \frac{27}{3}\ \frac{64}{3}$, &c. exprimeront les ſommes des ſecteurs que l'on trouve après la premiere révolution, après les deux premieres, après les trois premieres, &c. or il eſt évident que ces ſommes ſeront entr'elles comme les cubes 1. 8. 27. 64. &c. des lignes de révolution.

Mais il faut obſerver que les ſecteurs qu'on trouve après les deux premieres révolutions, comprennent ceux de la premiere, qui ont déja été décrits; par exemple, le ſecteur *aAb*, comprend le ſecteur FAG, & ainſi des autres; donc la ſomme des ſecteurs décrits à la ſeconde révolution, eſt plus grande que l'eſpace de la ſeconde ſpirale AB, de toute la valeur de la premiere ſpirale AC; c'eſt-à-dire que cette ſomme eſt égale à l'eſpace de la premiere ſpirale pris deux fois, plus à l'eſpace compris entre la premiere & la ſeconde.

Par la même raiſon la ſomme des ſecteurs, après les trois premieres révolutions, comprend les ſecteurs de la ſeconde qui ont déja été décrits; donc cette ſomme eſt plus grande que l'eſpace de la troiſiéme ſpirale de toute la valeur de la ſeconde, & par conſéquent elle eſt égale à la premiere priſe trois fois, plus l'eſpace compris entre la premiere pris deux fois, plus l'eſpace entre la ſeconde & la troiſiéme, & ainſi des autres.

Donc puiſque les ſommes des ſecteurs ſont entr'elles comme les cubes 1. 8. 27. 64. &c. ſi l'on retranche la premiere de la ſeconde, la ſeconde de la troiſiéme, la troiſiéme de la quatriéme, & ainſi de ſuite; les reſtes 1. 7. 19. 37. &c. marqueront les rapports des ſpirales. Ainſi l'aire de la premiere ſpirale AE (*Fig.* 136.), ſera à celle de la ſpirale AF, comme 1. à 7. & l'aire de la ſpirale AF, ſera à celle de la ſpirale AG, comme 7. à 19.

Et ſi l'on retranche la premiere ſpirale de la ſeconde, la ſeconde de la troiſiéme, la troiſiéme de la quatriéme, les reſtes, c'eſt-à-dire la premiere ſpirale AE, l'eſpace EF entre la premiere & la ſeconde, l'eſpace FG entre la ſeconde & la troiſiéme, &c. ſeront entr'eux comme 1. 6. 12. 18. 24. &c.

### COROLLAIRE I.

205. Le premier cercle étant donc une fois connu, on peut connoître non-ſeulement la premiere ſpirale, mais la ſeconde,

la troiſiéme, la quatriéme, &c. & encore les eſpaces entre la premiere & la ſeconde, entre la ſeconde & la troiſiéme, &c. Car ſi l'on ſuppoſe que l'aire du premier cercle ſoit 6, la premiere ſpirale AE qui en eſt le tiers, ſera deux, la ſeconde AF (*Fig.* 136.), étant à la premiere, comme 7 à 1 ſera 14, la troiſiéme AG ſera 36, & ainſi des autres; & de même l'eſpace entre la premiere & la ſeconde, ſera 12, celui qui eſt entre la ſeconde & la troiſiéme, ſera 24. &c.

## COROLLAIRE II.

206. Si l'on tire du centre une ligne droite AR (*Fig.* 136.), qui coupe les ſpirales, la portion AB de la premiere ſpirale, ſera égale au tiers du ſegment du cercle du rayon AB, compris entre la ligne AR, & la ligne des révolutions. La ſomme des ſecteurs de A en C, ſera égale au tiers du cercle du rayon AC, plus au tiers du ſegment de ce cercle compris entre la ligne AC & la ligne des révolutions, la ſomme des ſecteurs de A en D, ſera égale au tiers du cercle du rayon AD pris deux fois, plus le tiers du ſegment compris entre AD, & la ligne des révolutions, & ainſi des autres; ce qui ſe prouve de même que nous avons fait pour les lignes au Probleme précedent.

## COROLLAIRE III.

207. *Si l'on tire du centre A, la ligne droite AR, la ſomme des ſecteurs de A en B, celle des ſecteurs de A en C, celles des ſecteurs de A en D, celles des ſecteurs de A en R, &c. ſont entr'elles comme les cubes des droites AB, AC, AD, AR, &c.* C'eſt une ſuite de ce que nous avons démontré dans ce Probleme; mais pour en donner une preuve plus claire, ſuppoſons que la ligne qui coupe les ſpirales, ſoit la ligne AQ, qui eſt le prolongement de la ligne des révolutions, & comparons la ſomme des ſecteurs de A en *a*, à la ſomme des ſecteurs de A en *b*, la ligne A*a* étant les trois moitiés de la ligne AE de premiere révolution, le cercle du rayon A*a*, ſera les $\frac{9}{4}$ du cercle du rayon AE, parce que les cercles ſont en raiſon doublée de la raiſon de leurs rayons; ainſi appellons ce cercle $\frac{9}{4}$C.

De même la ligne A*b* étant les $\frac{1}{2}$ de AE, le cercle du rayon A*b* ſera les $\frac{25}{4}$ du cercle du rayon AE; c'eſt pourquoi nous l'appellerons $\frac{25}{4}$C.

Or quand la ſpirale eſt parvenuë en E, le rayon A*a* a décrit ſon cercle, & quand elle eſt parvenuë en *a*, ce rayon en a décrit

la moitié; de sorte qu'en tout il a décrit les trois moitiés de ce cercle: & comme ce cercle est $\frac{9}{4}$C, ses trois moitiés seront $\frac{27}{8}$C; or la somme des secteurs de la spirale de A en *a*, en vaut le tiers; donc cette somme vaut $\frac{1}{3} \times \frac{27}{8}$C.

D'autre part quand la spirale est parvenuë en F, le rayon A*b* a décrit deux fois son cercle, & quand elle est parvenuë en *b*, il en a décrit encore la moitié, de façon qu'il en a décrit en tout $\frac{5}{2}$, & comme ce cercle est $\frac{25}{4}$C, ses $\frac{5}{2}$ seront $\frac{125}{8}$C. Or la somme des secteurs de la spirale de A en *b*, vaut le tiers; donc cette somme vaut $\frac{1}{3} \times \frac{125}{8}$C; mais $\frac{27}{8}$ est le cube de $\frac{3}{2}$, & $\frac{125}{8}$ est le cube de $\frac{5}{2}$, & les tiers de ces cubes sont en même raison que les cubes; donc la somme des secteurs de A en *a*, est à celle des secteurs de A en *b*, comme le cube de la droite A*a*, au cube de la droite A*b*, & ainsi des autres.

Il faut observer ici, & dans les deux Corollaires suivans, ce que nous avons déja observé plus haut, que la somme des secteurs A*b*, comprend celle des secteurs A*a*, qui ont déja été décrits, que celle des secteurs A*d* comprend celle des secteurs A*b* déja décrits, & ainsi des autres; c'est pourquoi si on veut avoir l'espace A*b*, il faut retrancher de la somme des secteurs A*b*, celle des secteurs A*a*, parce qu'ils sont répetés. Supposant donc la somme des secteurs A*b* $\frac{1}{3} \times \frac{125}{8}$, on en ôtera celle des secteurs A*a*, qui est $\frac{1}{3} \times \frac{27}{8}$, & l'espace A*b* sera $\frac{1}{3} \times \frac{98}{8}$; de même si on veut l'espace A*d*, il faut ôter de la somme des secteurs A*d*, celle des secteurs A*b*, & ainsi des autres.

## COROLLAIRE IV.

208. *Toutes les spirales étant semblables, ainsi que nous avons déja dit, il s'ensuit que si l'on a deux spirales* (Fig. 134. 136.), *la premiere spirale AC d'une part, est à la premiere AE de l'autre, comme le quarré* $\overline{AC}^2$ *de la ligne de premiere révolution, au quarré AE de la ligne de premiere révolution.* Ces spirales sont le tiers de leurs cercles, & les cercles sont comme les quarrez des rayons; donc, &c. de même la spirale AC, est à la spirale AB de la même part, comme la spirale AE à la spirale AF de l'autre part; car la spirale AC, est à la spirale AB, comme le cube de AC au cube de AB, & la spirale AE est à la spirale AF, comme le cube de AE au cube de AF; mais AC. AB :: AE. AF. donc $AC^3$. $AB^3$ :: $AE^3$. $AF^3$. & par conséquent la raison des cubes étant égale de part & d'autre, la raison des spirales l'est aussi.

## COROLLAIRE V.

209. *Ayant deux ſpirales de differente grandeur* (Fig. 134. 136.), *ſi l'on compare la ſeconde ſpirale AB d'une part avec la troiſiéme AG de l'autre, ces ſpirales ſeront entr'elles en raiſon compoſée des quarrez* $\overline{AB}^2$. $\overline{AF}^2$. *des lignes de révolution ſemblables, & des cubes* $\overline{AF}^3$. $\overline{GA}^3$. *des lignes AF. AG.* (Fig. 136.). La ſpirale AB eſt à la ſpirale AF, comme le quarré $\overline{AB}^2$ au quarré $\overline{AF}^2$, & la ſpirale AF eſt à la ſpirale AG, comme le cube $\overline{AF}^3$, au cube $\overline{AG}^3$; or la ſpirale AB, eſt à la ſpirale AG en raiſon compoſée de la raiſon de la ſpirale AB à la ſpirale AF, & de celle de la ſpirale AF à celle de la ſpirale AG; donc elle eſt auſſi en raiſon compoſée de $\overline{AB}^2$. $\overline{AF}^2$. & de $\overline{AF}^3$, $\overline{AG}^3$. & il en eſt de même toutes les fois qu'on compare deux ſpirales de l'une & de l'autre part, qui ne ſont pas d'un même degré.

Que ſi en comparant, par exemple, la deuxiéme ſpirale AB d'une part, avec la quatriéme AH de l'autre, on trouve que les cercles ſont égaux, alors ces ſpirales ſont entr'elles en raiſon réciproque des lignes de premiere révolution; car la ſpirale AB ſera les $\frac{2}{3}$ de ſon cercle, & la ſpirale AH les $\frac{4}{3}$ du ſien; or les cercles ſont égaux, donc les ſpirales ſont entr'elles comme $\frac{2}{4}$, ou comme 1 à 2, c'eſt-à-dire réciproquement, comme la premiere ligne de révolution AE, à la premiere ligne de révolution AC.

## REMARQUE.

210. Archimede dans ſon Traité des Spirales, a démontré que ſi de l'extrêmité C (*Fig.* 134.), de la premiere ligne de révolution, on mene une tangente à la ſpirale, & que du centre A, on éleve une perpendiculaire ſur AC, juſqu'à ce qu'elle rencontre la tangente, la partie de cette perpendiculaire compriſe entre la tangente & le point A, ſera égale à la circonference du premier cercle de révolution; mais comme on n'a point encore trouvé de maniere Géometrique de mener une tangente à la ſpirale, & qu'on ne peut la tirer qu'en tâtonnant, on ne peut pas non plus trouver cette perpendiculaire, qui réſoudroit enfin le fameux Probleme de la quadrature du cercle.

DEFIN.

## DEFINITION XIV.

211. Si l'on conçoit qu'un cercle ACBD (*Fig.* 138.), dont le diametre AB eſt perpendiculaire ſur une ligne droite EF, roule d'un mouvement uniforme ſur cette ligne, juſqu'à ce que le ſommet A ſoit parvenu en un point E de la ligne EF; le point A par ſon mouvement décrira une courbe AGHIE, qu'on appelle *demi-cycloïde*, & ſi ce même cercle étant remis au point B, roule vers F, juſqu'à ce que ſon point A parvienne au point F de la même ligne EF, ſon point A décrira l'autre demi-cycloïde & la courbe entiere EIHGAF, ſera la *cycloïde*, autrement dite *roulette*; le cercle BCAD, s'appelle *cercle générateur*.

Il eſt évident que tous les points de la demi-circonference BSCA, s'appliquent ſur la ligne BE, laquelle par conſéquent eſt égale à cette demi-circonference; d'où il ſuit que la ligne EF, eſt égale à la circonference entiere.

## PROBLEME XLIII.

212. *Décrire une cycloïde* (Fig. 138.).

Prenez ſur une ligne droite indéfinie EF, un point B, où vous éleverez une perpendiculaire BA, de telle grandeur que vous voudrez. Diviſez BA en deux parties égales, & du point Q décrivez un cercle BCAD, faites BE égal à la demi-circonference BCA, & BF égal à la demi-circonference BDC; coupez la demi-circonference BCA en pluſieurs parties égales, (plus le nombre de ces parties ſera grand, plus la courbe que vous voulez décrire, ſera juſte). Coupez auſſi la ligne BE en un égal nombre de parties égales; du point B tirez aux diviſions de la demi-circonference les droites BS, BC, BR, &c. & des points S, C, R, &c. tirez les indéfinies RG, CH, SI, &c. paralleles à BE; enfin des points O, N, M, &c. qui diviſent BE en parties égales, tirez les droites OG, NH, MI, &c. paralleles aux cordes correſpondantes BR, BC, BS, & par les points G, H, I, &c. où elles rencontrent les paralleles RG, CH, SI, &c. faites paſſer une courbe AGHIE, qui ſera la demi cycloïde; c'eſt pourquoi faiſant la même choſe de l'autre côté, vous aurez la cycloïde entiere.

### DEMONSTRATION.

Des points O, N, M, &c. élevez des perpendiculaires OZ;

NV, MX, &c. égales chacune au diametre AB; & sur ces lignes prises pour diametres, décrivez les demi-cercles OGZ, NHV, MIX, qui seront chacun égaux au demi-cercle générateur; or je dis que ces cercles passeront par les points I, H, G, & que ces points seront les mêmes par lesquels doit passer le point A en décrivant la cycloïde.

En premier lieu, les lignes OG, BR, étant paralleles entre les paralleles GR, OB, sont égales entr'elles; & par la même raison les angles GOE, RBE, sont égaux; or ces angles sont les angles des segmens GO, RCB; donc ces segmens sont égaux: mais les segmens égaux dans les cercles égaux, ont les cordes égales; donc la corde du segment GO, est la droite GO, & par conséquent le cercle OGZ, passe par le point G. On démontrera de même, que les autres cercles passent par les points H, I.

En second lieu, puisque la ligne AE est égale à la demi-circonference BCA, & que l'une & l'autre ont été divisées en un même nombre de parties égales, chaque partie de l'une est donc égale à chaque partie de l'autre; donc quand le cercle générateur aura parcouru la partie OB, qui est le quart de BE, le quart BS de sa demi-circonference se sera appliqué sur cette partie, & par conséquent le point S sera en O; or comme du point S au point A, il n'y a que trois quarts de la demi-circonference, il faudra nécessairement que du point O où sera le point S, au point où se trouvera le point A, il n'y ait aussi que trois quarts de cette demi-circonference; donc le point A sera en G: car l'arc AR étant égal à l'arc SB, l'arc BCR, ou son égal OG, est par conséquent égal à l'arc ACS, ou aux trois quarts de la demi-circonference.

On prouvera de la même façon que lorsque le cercle générateur sera parvenu aux points N, M, le point A sera aux points H, I; donc, &c.

## COROLLAIRE I.

213. *Si d'un point quelconque R, pris sur la circonference du cercle générateur, on tire une parallele RG à la base, la droite RG est égale à l'arc RA compris entre le point R & le sommet.* Tirant les paralleles RB, GO, les droites RG, OB, seront égales; mais OB est toujours égal à un arc BS, égal à l'arc AR, à cause que BS s'appliquant sur BO, fait descendre le point A d'autant; donc

GR est égal à RA. Par la même raison la ligne IS est égale à l'arc SA, parce que IS est égal à BM, & que BM est égale à un arc BR, égal à l'arc SA.

## LEMME.

214. *Si d'un point E* (Fig. 140.), *pris sur le diametre AB d'un cercle, on éleve une perpendiculaire EF, & que de l'extrêmité A de ce diametre on tire une ligne AF, qui rencontre EF hors du cercle, il est évident que AF coupera la circonferenee en un point G; car si elle étoit tangente, elle seroit parallele à EF, & je dis que l'arc GD compris entre ces deux lignes, est moindre que la partie exterieure FD de la perpendiculaire EF.* Tirant la droite GB, & la tangente GH, l'angle du segment HGB sera égal à l'angle à la circonference GAB; c'est pourquoi l'angle FGH, qui avec l'angle HGB, vaut un angle droit, sera égal à l'angle GBA, qui avec GAB, vaut aussi un angle droit, à cause du triangle rectangle BGA; mais les triangles rectangles AFE, BGA, étant semblables, l'angle AFE est aussi égal à l'angle GBA; donc le triangle FHG est isoscele, & FH = HG; ajoûtant donc de part & d'autre la partie HD, on aura FD = GH + HD; mais GH + HD est plus grand que l'arc GD, lequel a sa convexité tournée vers ces deux lignes qui la renferment; donc FD est plus grand que l'arc GD.

Que si du sommet A (*Fig.* 141.), on tire une droite AH, qui coupe la perpendiculaire EF en un point G en-dedans du cercle, *l'arc FH compris entre les deux lignes, est plus grand que la partie FG de la perpendiculaire coupée par la droite AH*, tirant les droites FA, FB, FH, l'angle FHA est égal à l'angle FBA, l'un & l'autre étant à la circonference, & s'appuyant sur le même arc; mais à cause des triangles rectangles semblables FBA, FEA, l'angle FBA est égal à l'angle AFG; donc l'angle FHG est égal à l'angle AFG: or l'angle FGH, qui vaut les deux interieurs opposés AFG, FAG, est plus grand que AFG, & par conséquent plus grand aussi que FHG; donc dans le triangle FHG, le côté FH est plus grand que le côté FG; mais l'arc FH est plus grand que sa corde FH: donc il est plus grand aussi que FG.

## PROBLEME XLIV.

215. *Par un point donné* m (Fig. 138.), *mener une tangente à la cycloïde.*

Du point *m* tirez la droite *mit* parallele à la base ; du point *i* où elle coupe la circonference du cercle générateur, tirez la corde *i*A, & de *m* menez *fmr* parallele à *i*A, & *fmr* sera la tangente demandée.

DEMONSTRATION.

Tirez en-dessous & en-dessus du point *m* les droites *rc*, *f*D parralleles à *im*, par la proprieté de la cycloïde la ligne *im* est égale à l'arc A*i*, & la ligne *bs* égale à l'arc A*b*. Or la ligne *cb* est moindre que l'arc *bi* par le Lemme précedent ; donc *cs* est moindre que *im*, qui est égale à l'arc A*b*, plus l'arc *bi* ; mais *cr* est égale à *im*, à cause des paralleles : donc *cs* est moindre que *cr*, & par conséquent le point *r* est hors de la cycloïde.

De même la ligne *im* est égale à l'arc AI, & par conséquent *df* est aussi égale à l'arc AI ; mais D*d* est plus grande que l'arc *i*D : donc DF est plus grande que l'arc A*i*, plus l'arc *i*D ; & par conséquent le point *f* est encore hors de la cycloïde ; donc la droite *fr* ne touche la cycloïde qu'au point *m*.

DEFINITION XV.

216. Si l'on conçoit qu'un fil ayant été collé sur une ligne courbe AB (*Fig.* 139.), dont la convexité est toujours tournée d'un même côté, on vienne à le détacher peu à peu par un de ses bouts, en sorte que la partie détachée CD, ou EF, &c. soit toujours bien tenduë, & soit tangente de la courbe, ce fil décrira par son extrêmité A une ligne courbe AH, qu'on appelle *ligne de développement*, & la courbe AB sur laquelle étoit le fil, s'appelle *la développée*.

*Proprietez de la ligne de développement & de la développée.*

217. *Toute ligne CD ou NF* (Fig. 139.), *qui est tangente de la développée AB est perpendiculaire sur la ligne AH de développement, c'est-à-dire que si on élevé sur le point C une perpendiculaire CN, cette perpendiculaire sera tangente de la ligne de développement.*

Prenons un point E sur la ligne de développement qui soit plus éloigné du point d'origine A que le point C, & concevons que de ce point soit menée la tangente NF à la développée AB, comme les deux tangentes CD, ER, représentent les parties développées du fil, lorsque son extrêmité est aux points C, E, il est évident que le point E étant plus éloigné de A que le point C, le

point F doit être aussi plus éloigné de A que le point D, & que par conséquent les deux tangentes doivent se couper en R entre les points d'attouchement. Or CD est égale à l'arc AD, & les deux droites DR, RF, sont ensemble plus grandes que l'arc DF qu'elles renferment; donc CD+DR+RF, ou CR+RF, est plus grande que l'arc AD, plus l'arc DF, ou que l'arc AF; or EF est égale à l'arc AF: donc CR+RF, est plus grande que EF, & ôtant de part & d'autre la partie commune RF, la droite CR est plus grande que ER; mais RN étant oblique sur CN, est plus grande que la perpendiculaire CR; donc RN est plus grande que ER, & par conséquent la ligne CN est hors de la ligne de développement de ce côté-là.

Maintenant supposons que le point E soit entre C & A (*Fig.* 142.), & que du point E soit menée la tangente EF à la développée, le point F sera entre le point A & le point D, parce que EF représente la partie développée du fil, lorsque son extrêmité est en E, & la ligne CD la partie développée, lorsque son extrêmité est en C; or EF étant égale à l'arc AF, si l'on tire la corde FD, qui sera moindre que l'arc FD, EF+FD sera moindre que l'arc AF+FD, ou que l'arc AD, & par conséquent moindre que CD, qui est égale à l'arc AD. Tirant donc la droite ED, qui est moindre que EF+FD, la droite CD sera plus grande que ED; mais CD étant perpendiculaire sur NC, est moindre que DN, qui est oblique; donc DN est plus grande que DE, & par conséquent la droite NC est encore hors de la ligne de développement de ce côté-là; donc elle est tangente de cette ligne.

218. Soit une ligne courbe AD (*Fig.* 143.), toujours convexe du même côté, & divisée en plusieurs parties aux points B, C, & que des points de division soient menées 1°. des tangentes AE, BF, CH, 2°. des perpendiculaires BE, CF, DH, qui rencontrent les tangentes voisines, 3°. des cordes AB, BC, CD. Je dis *qu'on peut diviser la courbe en tant de parties que la raison de chaque corde à la tangente qui est à son extrêmité, c'est-à-dire la raison de AB à BE, ou de BC à CF, soit plus grande que celle de deux lignes données* ab, bc. A mesure que le nombre de divisions augmentera, l'angle ARB, ou BSC, &c. fait par la rencontre de deux tangentes, deviendra plus grand; ainsi il arrivera à la fin que cet angle sera plus grand que l'angle exterieur *bad*, en supposant que les deux lignes *ab*, *bc*, ayent été mises perpendiculairement l'une sur l'autre, en sorte qu'elles forment avec la droite *ac* tirée de leurs

extrêmitez un triangle *abc*. Quand donc l'angle ARB ſera plus grand que l'angle *dab*, l'angle BRE ſera moindre que l'angle *bac*, & par conſéquent dans le triangle rectangle RBE, le côté RB ſera plus grand par rapport au côté BE, que le côté *ab* dans le triangle rectangle *abc* par rapport au côté *bc*; & comme la corde AB eſt plus grande que RB, à cauſe qu'elle eſt oppoſée à l'angle obtus ARB du triangle ARB, il s'enſuit que la raiſon de AB à BE, ſera encore plus grande que la raiſon de *ab* à *bc*.

Or comme on peut faire la raiſon de *ab* à *bc*, infiniment grande, c'eſt-à-dire que *bc* devienne infiniment petite par rapport à *ab*, on peut faire auſſi que la raiſon de AB à BE, ſoit infiniment grande, & que par conſéquent la droite BE devienne infiniment petite.

219. *Si deux lignes courbes AE, AK* (Fig. 144.), *convexes d'un même côté partent d'un même point A, il n'eſt pas poſſible que les droites qui ſont perpendiculaires ſur l'une AK, ſoient perpendiculaires ſur l'autre.*

Si l'on veut que cela ſoit, prenons une ligne X, qui ſoit plus grande que la ligne courbe AK, & concevons que AK ſoit diviſée en tant de parties que la raiſon de chaque corde KH, à la perpendiculaire HM, ſoit plus grande que la raiſon de X à la perpendiculaire KE, les lignes OB, NC, MD, étant perpendiculaires à AK, ſeront auſſi perpendiculaires à la courbe AE par la ſuppoſition; or KE eſt plus courte que MD: car du point E élevant la perpendiculaire EV ſur KE, EV ſera tangente de la courbe AE, puiſqu'on ſuppoſe que KE eſt perpendiculaire ſur l'une & l'autre courbe, & par conſéquent EV ſera parallele à KM, & KE perpendiculaire entre ces deux paralleles, ſera plus courte que MV qui eſt oblique; mais MV eſt plus courte que MD, parce que la tangente EV la rencontre hors de la courbe AE; donc KE eſt plus courte que MD: on démontrera de même que HD eſt plus courte que NC, GC plus courte que OB, & FB plus courte que PA.

Puis donc que PA eſt plus grand que FB, on aura PA+OF; plus grand que OB, de même OB étant plus grand que GC, on aura PA+OF+NG, plus grand que NC, & continuant le même raiſonnement, on trouvera PA+OF+NG+MH, plus grand que KE; mais chaque corde étant plus grande par rapport à la perpendiculaire correſpondante, que X par rapport à KE par la conſtruction, il s'enſuit que la raiſon de AF+FG+GH +HK à PA+OF+NG+MH, eſt plus grande que la raiſon de

X à KE; & comme PA+OF+NG+MH, eſt plus grand que KE, il s'enſuit encore que le raiſon de AF+FG+GH+HK à KE, eſt encore plus grande que la raiſon de X à KE; donc AF+FG+GH+HK, eſt plus grand que X; mais X eſt plus grand que la courbe AK: donc AF+FG+GH+HK, eſt plus grand que AK; c'eſt-à-dire que les cordes priſes enſemble ſeront plus grandes que la courbe dont elles ſoutiennent les arcs; ce qui étant impoſſible, il eſt impoſſible auſſi que les perpendiculaires ſur la courbe AK, ſoient perpendiculaires ſur la courbe AE.

220. *Si deux lignes courbes AB, AF* (Fig. 145.), *qui ont leurs convexités d'un même côté, partent d'un même point A, & que les tangentes CD, BF, de l'une ſoient perpendiculaires ſur l'autre, la ligne AF ſera la ligne de dévoloppement de la ligne AB.* Si on vouloit que la ligne de développement fût une autre ligne AG, les tangentes CD, CF, ſeroient perpendiculaires ſur AG (*n.* 217.), & par la ſuppoſition elles le ſeroient auſſi ſur AF, & par conſéquent il s'enſuivroit que deux courbes AF, AG, partant d'un même point A, auroient les mêmes perpendiculaires; ce que nous avons démontré impoſſible (*n.* 219.).

221. *Deux demi-cycloïdes ABC, CDE* (Fig. 146.), *égales entr'elles étant décrites, comme on les voit ici, ſi ayant joint leurs ſommets B, D, par une droite BD, qui ſera parallele à la baſe AE, on prend un cercle générateur QPF, égal au cercle générateur de chaque demi-cycloïde, & qu'on décrive une cycloïde BFD, qui ſera par conſéquent égale aux deux demi-cycloïdes priſes enſemble; je dis que toutes les tangentes GM de l'une des demi-cycloïdes ABC, ſeront perpendiculaires à la demi-cycloïde BFQ.* A cauſe des paralleles BH, IG, les droites paralleles BI, HG, ſeront égales; mais HG eſt égale à l'arc BH: donc BI ſera auſſi égale à l'arc BH. Mais par la nature de la cycloïde quand le cercle générateur QPF ſera parvenu en I, l'arc MI ſera égal à la partie BI de la baſe; donc cet arc ſera égal à l'arc BH: tirant donc la corde MI, le ſegment MI ſera égal au ſegment BH, à cauſe de l'égalité des cercles & des arcs; donc la corde MI ſera égale à la corde BH, ou à IG, & l'angle BIM du ſegment ſera égal à l'angle IBH du ſegment, ou à l'angle HGI; donc à cauſe des paralleles BI, HG, la droite MI ſera le prolongement de la droite IG. Or ſi de M on tire la tangente MN à la cycloïde, cette tangente ſera perpendiculaire à MG, à cauſe que l'angle NMG étant à la circonference, & s'appuyant ſur le

diametre, eſt droit; donc la tangente GM eſt perpendiculaire à la demi-cycloïde BF.

Donc la demi-cycloïde BF eſt la ligne de développement de la demi-cycloïde BC (*n.* 220.).

## PROBLEME XLV.

222. *Trouver une ligne droite égale à la demi-circonference BF d'une demi-cycloïde BFQ* (Fig. 146.).

Doublez le diametre QF du cercle générateur, & vous aurez la valeur de la circonference BF de la demi-cycloïde, & par conſéquent la circonference de la cycloïde ſera égale au quadruple de ce diametre.

### DEMONSTRATION.

La demi-cycloïde BF eſt la ligne de développement de la demi-cycloïde BC; donc quand le fil développé ſera en C, la tangente CF qui ſera alors perpendiculaire ſur le milieu de AE, ſera auſſi perpendiculaire ſur le milieu de la baſe BD, & par conſéquent ſera en F, qui eſt le ſommet de la cycloïde BFD; or CF ſera égale à la demi-circonference BC, & CF eſt viſiblement le double du diametre du cercle générateur FQ; donc la demi-circonference BC eſt égale au double de FQ; mais la demi-circonference BC eſt égale à la demi-circonference BF: donc BF eſt égal à 2FQ, & par conſéquent la circonference entiere BFD eſt égale à 4FQ.

### COROLLAIRE I.

223. *Si d'un point G de la demi-circonference d'une demi-cycloïde BC* (Fig. 146.), *on mene une tangente GI, qui rencontre la tangente BD au ſommet, la partie BG de la circonference compriſe entre le ſommet & le point d'attouchement, ſera double de la tangente GI.* Par la nature des développées la droite GM eſt égale à la courbe BG; mais GM eſt double de GI (*n.* 221.); donc la courbe BG eſt double de GI.

### COROLLAIRE II.

224. *Si l'on coupe le diametre BA du cercle générateur en une infinité de parties égales, & qu'ayant tiré des points de diviſion des paralleles SHG, TZX, à la baſe, on mene les cordes BH, BZ, &c. ces cordes ſeront*

*seront les élemens d'une parabole BRA, dont l'axe sera le diametre BA, & le parametre sera égal à ce même diametre.* Par la nature du cercle, le quarré de BH est égal au rectangle BS×BA, & le quarré $\overline{BZ}$ = BT×BA; mais par la nature de la parabole $\overline{VS}$ = BS×BA, & YT = BT×BA; donc VS = BH, & YT = BZ.

## COROLLAIRE III.

225. *La somme des portions BG, BX, BC de la demi-circonference de la cycloïde ABC, est double de la parabole BRA.* L'arc BG est double de BH, ou IG (*n.* 223.), de même l'arc BX est double de BZ, &c. donc la somme de ces arcs est double de la somme des ordonnées VS, YT, RA, &c. & par conséquent double de la parabole.

## LEMME.

226. *Si l'on divise la demi-circonference AC d'un cercle* (Fig. 147.); *en parties égales aux points D, B, E, H, & qu'ayant tiré de l'extrêmité du diametre les cordes CD, CB, CE, CH, on tire par les points de division les droites DP, BS, &c. perpendiculaires au diametre, les parties DF, BG, EH, &c. de ces perpendiculaires comprises entre les points de division, & les cordes voisines sont moindres chacune que chaque arc correspondant AD, DB, &c.* Tirant les cordes DA, DB, &c. l'angle AFD étant entre le centre & la circonference, vaut la moitié de l'arc PC ou DC, plus la moitié de l'arc DA, c'est-à-dire la moitié de l'arc ADC; mais l'angle à la circonference DAC, ne vaut que la moitié de l'arc DC, moindre que l'arc ADC; donc dans le triangle ADF, le côté DA est plus grand que le côté DF. Mais l'arc DA est plus grand que sa corde DA; donc il est aussi plus grand que DF, ce qui est dans le fond évident à l'égard de DF, parce que DA est l'hypotenuse du triangle rectangle DAF; mais j'ai donné cette démonstration, afin qu'on puisse prouver de la même maniere que BG est moindre que BD, EH, moindre que EB, &c.

*Que si on prolonge les perpendiculaires au diametre en F, H, N, &c. hors du cercle* (Fig. 148.), *& qu'on prolonge aussi les cordes CB, CL, CM, &c. jusqu'à la rencontre de ces perpendiculaires, les parties AF, BH, LN de ces perpendiculaires comprises entre les points de division & les cordes prolongées, seront plus grandes chacune que chaque arc AB, BL, &c.* Par rapport à la premiere AF, il n'y a qu'à tirer

du centre O une parallele OG à la corde voiſine, ce qui coupera l'arc BA, & la droite FA, chacune en deux parties égales, de ſorte que FA ſera égale aux deux tangentes BG, GA, priſes enſemble, leſquelles ſont égales entr'elles par la nature du cercle. Or BG+GA eſt plus grande que l'arc BA; donc FA eſt auſſi plus grande que l'arc BA.

Pour prouver maintenant que HB eſt auſſi plus grand que LB, tirez la corde LA, & la tangente LI, l'angle HLA étant droit à cauſe que CLA eſt droit, les deux angles HLI, ILA pris enſemble, vaudront un angle droit, de même que les deux angles enſemble HCR, CHR du triangle rectangle CRH; or l'angle ILA du ſegment eſt égal à l'angle à la circonference LCA; donc l'angle ILH eſt égal à l'angle CHR, ou LHI; donc le triangle HLI eſt iſoſcele; donc HI=LI, &HB=LI+IB: mais LI +IB eſt plus grand que l'arc LB; donc HB eſt plus grand auſſi que cet arc.

## PROBLEME XLVI.

227. *Meſurer l'eſpace renfermé par une cycloïde* (Fig 149.).

Meſurez le cercle générateur, multipliez-le par trois, & le produit ſera la valeur de l'eſpace de la cycloïde.

### DEMONSTRATION.

Soit la demi-cycloïde ABC (*Fig.* 149.), diviſez la demi-circonference AFB de ſon cercle générateur en parties égales, comme par exemple en ſix, & par les points de diviſion tirez des lignes indéfinies paralleles à la baſe, & du point B des cordes que vous prolongerez juſqu'à la rencontre des indéfinies, ce qui vous donnera cinq triangles circonſcrits au cercle AIB, D*r*B, EKB, FLB, GMB. Diviſez de même la baſe CB en ſix parties égales, & par chaque point de diviſion tirez des paralleles aux cordes correſpondantes juſqu'à la rencontre des indéfinies, ce qui vous donnera cinq trapezes circonſcrits à la cycloïde A*d*NB, *ub*ON, *a*ZPO, *x*TQP, VSRQ; dans chacun de ces trapezes inſcrivez un triangle égal au triangle correſpondant du cercle, c'eſt-à-dire dans le ſecond trapeze *ub*ON, le triangle *u*tN égal au triangle D*r*B, & ainſi des trois autres; car dans le premier trapeze le triangle ſe trouve inſcrit de lui-même. Chaque trapeze ſe trouvera alors compoſé d'un triangle & d'un parallelograme, parce

que l'angle *u*NO est égal à l'angle IBN, à cause des paralleles IB, *d*N, & qu'ainsi ôtant d'un côté l'angle *u*N*t*, & de l'autre l'angle IB*r* qui lui est égal, l'angle restant *t*NO, est égal à l'angle restant *r*BN; & comme l'angle *b*OP est égal à l'angle *r*BN par la construction, il s'ensuit que l'angle *t*NO est égal à l'angle *b*OP, & que par conséquent la figure *bt*ON est un parallelograme, & la même chose se prouvera à l'égard des autres trapezes. Or comparant chaque trapeze circonscrit à la cycloïde, à chaque triangle circonscrit au cercle, on trouvera que le trapeze n'est pas tout-à-fait triple du triangle; car par exemple, dans le triangle IBA, le coté IA est plus grand que l'arc DA; mais *d*I, ou *u*D, ou NB, est égal à cet arc; donc IA est plus grand que *d*I. D'où il suit que le parallelograme *d*INB n'est pas tout-à-fait double du triangle correspondant. De même dans le second triangle *r*DB, le côté *r*D, ou son égal *tu*, est plus grand que l'arc ED par le Lemme précedent; mais *bt*, ou ON, est égal à cet arc; donc le parallelograme *bt*ON n'est pas tout-à-fait double du triangle *tu*N, ou du triangle *r*DB son égal, & par conséquent le trapeze *bu*ON n'est pas triple du triangle correspondant, & comme on prouvera la même chose des autres trapezes à l'égard des triangles correspondans, il s'ensuit que la somme des trapezes circonscrits à la cycloïde, n'est pas tout-à-fait triple de la somme des triangles circonscrits au cercle générateur

Maintenant inscrivons des triangles dans ce cercle, & des trapezoïdes dans la cycloide; c'est-à-dire après avoir tiré les cordes du point B aux points de division (*Fig.* 150.), tirons par les mêmes points de division des indéfinies paralleles à la base, jusqu'à la rencontre des cordes voisines, ce qui donnera cinq triangles inscrits au cercle IDB, KEB, LFB, MGB, XHB. Par les points de division de la base tirons des paralleles à chaque corde correspondante, jusqu'à la rencontre des indéfinies, ce qui donnera cinq trapezes inscrits à la cycloïde I*d*NB, *ub*ON, *a*ZPO, *x*TQP, VSRQ. Dans chaque trapeze inscrivons un triangle égal au triangle correspondant du cercle, & chaque trapeze sera composé d'un triangle & d'un parallelograme; ce qu'on démontrera comme ci-dessus. Or chaque trapeze est un peu plus que triple du triangle correspondant; car par exemple, dans le triangle DIB, le côté DI est moindre que l'arc DA (*n.* 226.); mais *d*D, ou NB son égale, est égal à cet arc; donc le parallelograme *d*DNB. est plus que double du triangle, & par conséquent *d*INB en est

plus que triple ; de même dans le triangle EKB, le côté EK, ou *tu* son égal, est moindre que l'arc ED par le Lemme précedent ; mais *bt*, ou ON, est égal à cet arc ; donc le parallelograme *bt*ON est plus que double du triangle, & le trapeze *bu*ON en est plus que triple, & ainsi des autres ; donc la somme des trapezes est plus que triple de la somme des triangles correspondans.

Or si l'on inscrit & l'on circonscrit au demi-cercle un plus grand nombre de triangles, & à la demi-cycloïde un plus grand nombre de trapezes, la difference des triangles inscrits aux circonscrits, deviendra toujours moindre, de même que la difference des trapezes inscrits aux circonscrits ; & cependant les trapezes circonscrits ne seront jamais plus que triples des triangles circonscrits, ni les trapezes inscrits moins que triples des triangles inscrits : donc quand les inscrits & les circonscrits seront en nombre infini de part & d'autre, la difference des triangles inscrits aux circonscrits sera infiniment petite ou nulle, de même que la difference des trapezes inscrits aux circonscrits, & les trapezes seront triples des triangles ; or la somme des triangles est égale au demi-cercle, & la somme des trapezes est égale à la demi-cycloïde ; donc la demi-cycloïde est triple du demi-cercle générateur.

### COROLLAIRE I.

228. *Donc la cycloïde entiere est triple du cercle générateur.*

### COROLLAIRE II.

229. Si de la demi-cycloïde CAB on ôte le demi-cercle générateur, le reste CAFB sera double de ce demi-cercle.

### COROLLAIRE III.

230. *Si d'un point F de la circonference du demi-cercle générateur* (Fig. 150.), *on tire la corde FB, & une parallele FZ à la base, & que du point Z on tire une parallele ZP à la corde FB, le segment de demi-cycloïde PZbABP sera triple du segment FABMF du demi-cercle générateur.* Tous les trapezes inscrits ou circonscrits dans le segment de la demi-cycloïde, sont triples de tous les triangles inscrits ou circonscrits au segment du demi-cercle ; donc, &c. d'où il suit que le segment CZP de la demi-cycloïde est aussi triple du segment FGB du demi-cercle.

## PROBLEME XLVII.

231. *Etant menée du ſommet D d'une demi-cycloïde* (Fig. 146.), *une tangente DQ, & d'un autre point* m *une tangente* mi, *trouver l'aire de la figure mixtiligne* mi*D, faite par les tangentes & la cycloïde.*

Du point *m* tirez *mn* parallele à la baſe, & du point *n* la corde *n*D, meſurez le ſegment *nq*D, & ce ſera le valeur de la figure mixtiligne.

### DEMONSTRATION.

Concevez que d'un point *p* pris entre *m* & le ſommet D & infiniment proche de *m*, ſoit tirée une parallele *ps* à la tangente *mi* & une tangente *pt*, de même que d'un point *d* entre *p* & D, ſoit menée une parallele *de* à la tangente *pt*, & une tangente *df*, & ainſi de ſuite, la figure mixtiligne ſera remplie de triangles *spt*, *edf*, &c. dont la ſomme ſera égale à cette figure; concevez encore que de tous les points *p*, *d*, &c. ſoient menées des paralleles *pq*, *dg*, &c. à la baſe, & que des points *b*, *g*, &c. ſoient menées les cordes *q*D, *g*D, &c. & que *pq*, *dg*, &c. ſoient prolongées juſqu'à la rencontre des cordes voiſines, vous aurez dans le ſegment *nq*D autant de triangles qu'il y en a dans la figure mixtiligne, & chaque triangle d'une part ſera égal à chaque triangle de l'autre; car par exemple le triangle *q*D*b* ſera égal au triangle *rps*, à cauſe de *q*D parallele & égal à *pt*, & de *b*D parallele & égal à *ps*, & de l'angle *qb*D égal à l'angle *pst*, à cauſe que *ps*D*b* eſt un parallelograme; d'où il ſuit que les deux triangles ſont égaux, & ainſi des autres. Donc puiſque chaque triangle d'une part eſt égal à chaque triangle de l'autre, & que le nombre en eſt auſſi égal de part & d'autre, la ſomme ſera égale à la ſomme, & le ſegment égal à la figure mixtiligne.

### COROLLAIRE I.

232. *Donc ſi la tangente CQ eſt menée de l'extrêmité de la baſe, la figure mixtiligne ſera égale au demi-cercle générateur;* & en effet la baſe étant égale à la circonference du demi-cercle, le parallelograme CQDE ſera égal au rectangle de cette circonference par le diametre, & par conſéquent quadruple du demi-cercle, qui n'eſt égal qu'à ſa circonference multipliée par la moitié du rayon ou le quart du diametre; ôtant donc de ce parallelograme la

demi-cycloïde qui eſt triple du demi-cercle, le reſte, c'eſt-à-dire la figure mixtiligne, ſera le quart du rectangle, de même que le demi-cercle en eſt le quart.

### COROLLAIRE II.

233. Donc *la cycloïde eſt au parallelograme circonſcrit comme* 3. *à* 4.

### PROBLEME XLVIII.

234. *Meſurer un ſegment de cycloïde compris entre le ſommet A* (Fig. 151.), *& une ligne OE tirée du milieu O de l'axe parallelement à la baſe.*

Du point B où la ligne OE coupe le cercle générateur, tirez la corde BA, & du point E où cette ligne coupe la cycloïde, tirez la tangente EF juſqu'à la rencontre de la tangente AF tirée du ſommet A. La droite BE étant égale au quart AB de la circonference du cercle générateur, le parallelograme ABEF, qui a pour hauteur le rayon AO de ce cercle, ſera égal au produit du quart de la circonference par le rayon, & par conſéquent il ſera égal au demi-cercle ASC, qui eſt égal à la demi-circonference multipliée par la moitié du rayon, ou au quart de la circonference multipliée par le rayon. Or le ſegment mixtiligne AFE, eſt égal au ſegment de cercle AB, ou BC ſon égal; ôtant donc du parallelograme ABEF le ſegment AB, & le ſegment mixtiligne AEF, ou le ſegment BC, le reſte ABEA ſera égal au triangle rectangle ABC, lequel eſt égal au quarré du rayon AO, comme il eſt évident; donc ajoûtant de part & d'autre le quart de cercle ABO, le ſegment de cycloïde AOE eſt égal au quarré du rayon, plus au quart du cercle AOB.

### PROBLEME XLIX.

235. *Meſurer un ſegment AFP de cycloïde* (Fig. 152.), *compris entre le ſommet A & une parallele FP à la baſe tirée de l'extrémité F du quart AF de l'axe.*

Inſcrivez dans le demi-cercle générateur un demi-exagone AEDB. Meſurez le demi-exagone, & la moitié de ſa valeur ſera celle du ſegment APF de la cycloïde.

### DEMONSTRATION.

Tirez les droites EO, DO, qui vous donneront les trois triangles

AEO, EOD, DOB, égaux & équilateraux qui compoſent le demi-exagone. Du centre O tirez la perpendiculaire OR ſur la baſe ED, & le triangle EOD ſera diviſé en deux parties égales; de ſorte que la partie AEIOA ſera la moitié du demi-exagone. Or la ligne AF étant la moitié du rayon AO, & PF étant perpendiculaire ſur AO, ſi l'on tire au point E où PF coupe le cercle les droites AE, OE, on aura deux triangles rectangles EAF, EOF, égaux & équiangles; donc EO ſera égal à EA, & par conſéquent la ligne PF paſſe par le même point E où va aboutir la corde EA de l'exagone. Tirant donc du point P la tangente PH, & du ſommet A la tangente AH, le parallelograme PHAE, ayant pour baſe la droite PE égale à l'arc AE, & pour hauteur la moitié du rayon, ſera égal au ſecteur OEA, qui eſt le produit de l'arc AE par la moitié du rayon; & ôtant d'un côté la figure mixtiligne PHA, & de l'autre le ſegment AE qui lui eſt égal, on aura PATE égal au triangle EAO, & ajoûtant d'une part le triangle EAF, & de l'autre le triangle EIO égal à EAF, on aura le ſegment PAF égal à la figure AEIO, qui eſt la moitié du demi-exagone.

### COROLLAIRE.

236. Si du ſegment PAF, on ôte le demi-ſegment AEF, le reſte PAE ſera égal à la moitié du demi-exagone, moins le demi-ſegment AET.

### PROBLEME L.

237. *Meſurer un ſegment MFO de cycloïde* (Fig. 146.), *compris entre le ſommet A & une parallele MO à la baſe tirée d'un point quelconque de l'axe.*

Du point M tirez la tangente MN, du ſommet F la tangente FN, & du point P la corde PF, meſurez le parallelograme MNFP, & retranchez-en la figure mixtiligne MNF, & le ſegment PF, le reſte ſera la valeur de MFLP, à laquelle ſi vous ajoûtez la figure FLPO, la ſomme ſera la valeur cherchée de MFO.

### *Remarques générales.*

238 *Si l'on diviſe la demi-circonference du cercle générateur* (Fig. 149), *en parties égales, de même que la baſe, & qu'ayant tiré les cordes DB, EB, FB, &c. on tire par les points de diviſion de la baſe des paralleles*

*Nu*, *Oa*, *Px*, *&c. aux cordes correſpondantes, ces paralleles ſeront les ſinus des angles qu'elles ſont avec la baſe, en prenant pour ſinus total le diametre AB.* Par exemple l'angle *d*NC étant égal à l'angle du ſegment DBN, lequel eſt égal à DAB, qui eſt à la circonference; il eſt viſible que prenant pour ſinus total le diametre AB, la corde BD égale à *Nu*, eſt le ſinus de l'angle DAB, & par conſéquent de l'angle *u*NC, & ainſi des autres.

239. *Les tangentes de la cycloïde tirées par l'extrêmité des paralleles aux cordes, ſont les ſinus du complément à l'angle droit des angles faits par ces paralleles avec la baſe.* Par exemple la droite MI (*Fig* 146), égale & parallele à la corde PQ, eſt le ſinus de l'angle MIB, ou de l'angle PFO, & la tangente MN égale à PF, eſt le ſinus de l'angle MIN, ou PQF, lequel eſt le complément à l'angle droit de l'angle MIB.

240. Donc *toutes les tangentes MN tirées des points où les paralleles aux cordes coupent la cycloïde, ſont perpendiculaires à ces paralleles*, & par conſéquent toutes les paralleles ſont perpendiculaires à la courbe de la cycloïde.

241. Nous appellerons les cordes tirées du point B (*Fig.* 149.), ou les paralleles qui leur correſpondent, *ſinus des angles ſur la baſe*, & les cordes tirées du point A, qui correſpondent aux tangentes, *ſinus de complément.*

242. *La ſomme des ſinus ſur la baſe eſt égale à la ſomme des ſinus de complément.* Si le demi-cercle AEB (*Fig.* 155.), eſt diviſé, par exemple, en cinq parties égales, il eſt viſible que les cinq cordes BG, BF, BE, BD, BC, qui ſont les ſinus des angles ſur la baſe, ſont égales aux cinq cordes AC, AD, AE, AF, AG, qui ſont les ſinus de complément.

243. *Si la demi-circonference du cercle générateur eſt diviſée en une infinité d'arcs égaux, les ſinus ſur la baſe differeront tous entr'eux d'une difference infiniment petite, & je dis que la ſomme de leurs differences ſera égale au plus grand.* Si l'on éleve tous ces ſinus perpendiculairement ſur une droite AB (*Fig.* 157.), & que de leurs extrêmitez on tire des paralleles à AB, qui coupent le plus grand ſinus, on verra que ce ſinus AC n'eſt autre choſe que la ſomme des differences; & comme ce principe eſt toujours vrai toutes les fois que les grandeurs ſont en nombre infini, & que la derniere eſt infiniment petite, il s'enſuit que ſi on prend un ſinus quelconque DB (*Fig.* 155.), la ſomme des differences du nombre infini de ſinus compris entre le point D & le point B, ſera égale

égale au sinus DB, & il faut dire la même chose des sinus de complément.

*Si de deux points* 1, 2, *pris sur la cycloïde* (Fig. 146.), *on tire des paralleles* 63, 74, *à la base, & que du point superieur on mene une tangente* 17 *du côté de la base, & du point inferieur une tangente* 26 *du côté du sommet, en sorte que ces tangentes se croisent, & soient comprises entre les paralleles, la tangente* 17 *sera plus grande que l'arc* 12 *de la cycloïde compris entre les paralleles, & la tangente* 26 *sera moindre.* Tirez dans le cercle générateur les cordes 3F, 4F, & la corde 21 de l'arc de la cycloïde, & la parallele 15 à la rangente 26, l'angle 251 est obtus; donc dans le triangle 251 le côté 21 est plus grand que le côté 51; mais le côté 21 est moindre que l'arc 21 qu'il soutient: donc le côté 51, où la tangente 26 qui est égale à ce côté, est moindre que l'arc 21. De même l'angle 729 étant obtus, le côté 79 du triangle 729, est plus grand que le côté 92; ajoûtant donc de part & d'autre la droite 19, on aura 19+97, ou la tangente 17 plus grande que 19+92; mais 19+92 est plus grande que l'arc 12; donc la tangente 17 est plus grande que cet arc.

## DEFINITION XVI.

244. Si tandis que le cercle générateur ABC (*Fig.* 153. 154.), parcourt d'un mouvement direct & uniforme la droite AD, moindre ou plus grande que sa demi-circonference, le point A tourne autour du centre d'un mouvement aussi uniforme, & se trouve en D, quand le cercle touche la ligne à ce point, & que la même chose se fasse de C en F, le point A décrira une courbe qu'on appelle *cycloïde racourcie*, quand la base DF est moindre que la circonference du cercle générateur (*Fig.* 153.), & *cycloïde allongée*, quand la base est plus longue (*Fig.* 154.).

## PROBLEME LI.

245. *Décrire une cycloïde racourcie, & une rallongée* (Fig. 153. 154.).

Divisez la demi-circonference ABC du cercle générateur en parties égales, & la demi-base CD que je suppose moindre ou plus grande que la demi-circonference en un même nombre de parties égales, chacune desquelles sera par conséquent moindre ou plus grande que chaque partie de la demi-circonfetence; par les points I, B, F, tirez des paralleles à la base, & des cordes

au point C; par les points de division de la base, tirez des paralleles aux cordes correspondantes, jusqu'à ce qu'elles coupent les paralleles à la base, & par les points d'intersection faites passer une courbe; faites la même chose de l'autre côté, & vous aurez une cycloïde qui sera racourcie ou allongée, selon que la base sera moindre ou plus grande que le demi-cercle.

Cette construction est la même que celle que nous avons donné pour la cycloïde ordinaire, & la démonstration n'en est pas differente; car il est visible que lorsque le cercle générateur aura parcouru, par exemple, la quatriéme partie CE de la demi-base CD, le point A doit être descendu de la quatriéme partie de sa circonference, & que par conséquent il doit se trouver en H, puisque la corde EH étant parallele & égale à la corde CI, l'arc HE est égal à l'arc IC, & ne vaut que les trois quarts de sa circonference, &c.

### COROLLAIRE.

246. *Toute ligne HI parallele à la base, & comprise entre le cercle & la cycloïde, est à la demi-base DC comme l'arc AI compris entre le sommet & la parallele, est à la demi-circonference.* Du point I tirant la corde IC, & du point H la parallele HE à cette corde la partie EC de la demi-base, est à cette demi-base comme l'arc AI parcouru par le point A, est à la demi-circonference; or HI est égale à HE: donc, &c.

### PROBLEME LII.

247. *Mesurer l'espace renfermé par une cycloïde racourcie ou allongée.*

Prenez le rapport de la base entiere DF (*Fig.* 153. 154.), à la demi-circonference du cercle générateur, & ce rapport sera le même que celui de l'espace AHDCBA au demi-cercle, d'où vous trouverez facilement la mesure de toute la cycloïde.

Supposons, par exemple, que la base DF (*Fig.* 153.), soit les deux tiers de la circonference, & par conséquent les quatre tiers de la demi-circonference, le rapport de l'espace AHDCBA au demi-cercle, sera comme $\frac{4}{3}$ à $\frac{3}{3}$, ou comme 4. à 3. ajoûtant donc à cet espace le demi-cercle, la demi-cycloïde sera au demi-cercle comme 4+3, ou 7 à 3, & par conséquent la cycloïde entiere sera au cercle entier comme 7 à 3. Mesurant donc le cercle & le prenant 2 fois & un tiers, parce que 3 est 2 fois & un tiers

dans 7, on aura l'espace renfermé par le cycloïde.

DEMONSTRATION.

Circonscrivez au demi-cercle AFB (*Fig.* 149.), des triangles, & à la demi-cycloïde des trapezes, & dans les trapezes des triangles égaux aux triangles correspondans, ainsi que nous avons fait pour la cycloïde ordinaire, & supposons que chaque partie égale NB de la base, ne soit que les deux tiers de chaque partie égale HB de la demi-circonference, chaque trapeze circonscrit *d*ANB, ne sera pas tout-à-fait le $\frac{7}{3}$ du triangle correspondant IAB; car la base IA de ce triangle, est plus grande que l'arc DA, & la base DI ou NB n'est que les deux tiers de cet arc, & par conséquent le parallelograme *d*INB est un peu moins des $\frac{4}{3}$ du triangle, & le trapeze *d*ANB vaut un peu moins des $\frac{7}{3}$ du triangle, & il en est de même des autres trapezes.

Maintenant inscrivez des triangles dans le demi-cercle (*Fig.* 150.), & des trapezes dans la cycloïde, & dans ces trapezes des triangles égaux aux triangles correspondans du demi-cercle; chaque trapeze sera un peu plus des $\frac{7}{3}$ du triangle correspondant: car la base DI du triangle DIB est moindre que l'arc AD, & la base *d*D, ou NB du parallelograme *d*DNB, est égale aux deux tiers de cet arc par la supposition; donc ce parallelograme vaut un peu plus des $\frac{4}{3}$ du triangle, & le trapeze *d*INB, vaut plus des $\frac{7}{3}$ de ce même triangle, & il en est de même des autres trapezes.

Or si le nombre des trapezes & des triangles soit circonscrits, soit inscrits, devient infini, ils se confondront avec la cycloïde, & par conséquent la difference cessant entr'eux, la somme des trapezes, c'est-à-dire la demi-cycloïde, sera à la somme des triangles, ou au demi-cercle, comme 7 à 3; & ôtant de la demi-cycloïde le demi-cercle, le reste CAFB sera au demi-cercle comme 4 à 3; mais la base entiere étant les deux tiers de la circonference, est par conséquent les $\frac{4}{3}$ de la demi-circonference; donc cette base est à la demi-circonference comme 4 à 3, & ce rapport est le même que celui de la partie CAFB de la cycloïde au demi-cercle; donc, &c.

Et on prouvera la même chose des cycloïdes allongées: d'où il est aisé de trouver la valeur des segmens faits par des lignes égales & paralleles à quelqu'une des cordes tirées du point B.

*Methode générale pour trouver les courbes des trois Cycloïdes.*

248. Soient décrites sur une même base AB (*Fig.* 156.), trois cycloïdes, dont l'une AHB soit racourcie, & ait pour cercle générateur le cercle HEP, l'autre ACB soit la cycloïde ordinaire, & ait pour générateur le cercle CDP, & la troisiéme ARB soit rallongée, & ait pour générateur le cercle RFP; concevons que chaque circonference soit divisée en parties infiniment petites, mais en nombre égal; de sorte que ces parties soient semblables entr'elles, & que du point P soient tirées des cordes aux points de division, les mêmes cordes qui passeront par les divisions du premier cercle, passeront par celle des deux autres; car par exemple, l'angle VPH étant à la circonference des trois cercles, vaut également dans les uns & dans les autres la moitié de l'arc qu'il embrasse, & par conséquent l'arc HV vaut autant de degrez de sa circonference, que l'arc CT de la sienne, & l'arc RS de la sienne; donc si HV est la premiere division de la grande circonference, l'arc TC sera aussi la premiere division de la seconde, & l'arc SR sera la premiere division de la troisiéme, puisque ces divisions sont semblables. D'où il suit que concevant la base AD divisée en un même nombre de parties égales, les paralleles tirées de ces divisions aux cordes correspondantes, seront les mêmes dans les trois cycloïdes, à la longueur près.

Or il faut remarquer que de même qu'une corde PX coupe les trois cercles proportionnellement, en sorte que l'arc RL est à sa circonference, comme l'arc CZ à la sienne, & l'arc HX à la sienne, de même aussi cette corde est coupée proportionnellement par les circonferences, de façon que PL est à son rayon comme PZ au sien, & PX au sien. D'autre part si des points X, Z, L, où la corde PX coupe les circonferences, on tire des paralleles à la base jusqu'à la rencontre des cycloïdes, on aura comme l'arc HX est à sa demi-circonference, ainsi la parallele X*q* est à la base, & comme l'arc CZ à sa demi-circonference, ainsi la parallele Z*x* à la base, & enfin comme l'arc RL à sa demi-circonference, ainsi la parallele L*z* à la base; mais les trois arcs ont même raison à leurs circonferences; donc les trois paralleles ont même raison à leur base, & sont par conséquent égales entr'elles; d'où il suit que la ligne *hq* qui passe par leurs extré-

mitez, est parallele à la corde PX, & qu'elle est divisée proportionnellement aux trois rayons PR, PC, PH, de même que cette corde.

Tout cela supposé, des points de division de la base tirons des perpendiculaires *mu* sur les paralleles immédiatement superieures, les parties *um* de ces paralleles seront infiniment petites, & par conséquent égales aux differences des paralleles entr'elles. Des mêmes points de division tirons des droites *mt* paralleles aux paralleles immédiatement superieures, & menons les droites *at*, *an*, perpendiculaires sur *mt*, (je n'en marque qu'une de chacune, de peur de broüiller la figure par une trop grande quantité de lignes) nous aurons *at* = *mu*. Or comme les angles des paralleles sur la base se surpassent tous d'une même quantité, de même que les angles des cordes sur la base, il s'ensuit que l'angle *amt*, qui est la difference des deux angles faits par les deux paralleles voisines *ma*, *ma* avec la base, est égal à l'angle TPC, qui est aussi la difference des angles des cordes sur la base. Donc les triangles rectangles TCP, *nam*, sont semblables, & donnent PC. CT :: *am*. *an*. Mais CT étant infiniment petite, est égale à son arc TC, ou à *mm*. Donc PC. *mm* :: *am*. *an*.

D'autre part la parallele superieure *am*, égale à KP, étant le sinus de son angle sur la base par rapport au rayon CP, de même que *mu* est le sinus de ce même angle par rapport au rayon *mm*, on a PC. *mm* :: *am*. *mu*, ou *at*. Donc *am*. *am* :: *an*. *at*; mais les deux paralleles *am*, *am*, étant voisines, ne different entr'elles que d'une quantité infiniment petite; donc *an*, *at*, ne different aussi que d'un infiniment petit, & sont par conséquent égales entr'elles, & leur somme est égale au petit arc *aa*; donc ce petit arc *aa* est double de *ta*, ou de *mu*: & comme cela arrivera partout entre deux paralleles voisines, il s'ensuit que tous les petits arcs *aa* pris ensemble, sont doubles de tous les *mu* pris ensemble.

Mais si l'on tire la corde CK à l'extrêmité de la corde PK, qui est égale à *am*, la corde KC sera le sinus de complément de l'angle KPA, ou *am*A, par rapport au rayon CP; & comme le triangle *mum* est semblable à KCP, il s'ensuit que *mu* étant le sinus de l'angle *am*A, par rapport au rayon *mm*, *um* sera le sinus du complément; donc tous les *mu* pris ensemble, seront égaux à tous les *um* pris ensemble (*n*. 242.); mais les *um* sont les differences des paralleles: donc leur somme est égale à la plus grande;

CP (*n.* 243.), & de même tous les *um* des paralleles compriſes depuis A juſqu'à la parallele *aum* pris enſemble, ſont égaux à la parallele *aum*. Mais dans les petits triangles rectangles *mum*, les *um* étant les differences des ſinus, ou des cordes tirées du point P, qui forment les triangles rectangles correſpondans dans les demi-cercles, les *mu* ſeront les differences des ſinus de complément, ou des cordes tirées du point C; ainſi la ſomme de ces differences ſera égale au plus grand ſinus de complément qui eſt encore CP, & la ſomme de tous les *mu* compriſes depuis la parallele *aum*, juſqu'au point P, ſera égale à la ſomme des differences des cordes tirées du point C à tous les points compris entre K & C, & par conſéquent cette ſomme ſera égale à la corde KC.

Or tous les *aa* compris entre A & C, étant double des *mu* compris entre A & P, & la ſomme de ces *mu* étant égale au diametre CP, il s'enſuit que la courbe A*aa*C de la demi-cycloïde ordinaire, eſt double du diametre de ſon cercle générateur, & de même tous les *aa* compris entre la parallele *aum* & le ſommet C, étant doubles de tous les *mu* compris entre cette même parallele & le diametre, & tous ces *mu* étant égaux à la corde KC, il s'enſuit que la portion *aa*C compriſe entre cette parallele & le ſommet, eſt double de la corde KC de l'arc correſpondant.

Ceci a déja été démontré ci-deſſus, & d'une maniere même plus facile, & nous n'en avons parlé que pour faciliter l'intelligence de ce qui ſuit.

Maintenant pour trouver la courbe de la cycloïde racourcie AOOHP, des extrêmitez O des paralleles, tirons des perpendiculaires Og à la parallele immédiatement ſuperieure, & en même tems les cordes OO, & des points *a* de la cycloïde ordinaire, tirons *ar* parallelele à la parallele immédiatement ſuperieure. En premier lieu, nous aurons CP. CH :: *a2m.* · *oa.* comme il a été démontré plus haut. Et en ſecond lieu, dans les triangles rectangles ſemblables *amn*, *oar*, nous aurons *a2m. oa* :: *an. or.* Donc CP. CH :: *an. or.* & doublant les antecedens 2CP. CH. :: 2*an. or.* & compoſant 2CP. 2CP + CH :: 2*an.* 2*an* + *or.* mais 2*an* eſt égal à l'arc *aa*, comme on a vû ci-deſſus, & 2*an* + *or* eſt égal à OG; donc 2CP. 2CP + CH :: *aa. og.* mais tous les *aa* pris enſemble, ſont égaux à 2CP, c'eſt-à-dire la demi-cycloïde A*a*C eſt double du diametre CP, comme on a vû ci-deſſus; donc tous les *og* pris enſemble ſont égaux à 2CP + CH; or chaque *og* a même raiſon

avec l'arc *aa* correspondant; donc comptant les *aa* depuis le sommet 1*aa*. 1*og* :: 2*aa*. 2*og* :: 3*aa*. 3*og*. & ainsi de suite; mais les 1*aa*, 2*aa*, 3*aa*. &c. sont chacun double des cordes correspondantes tirées du sommet C, c'est-à-dire des sinus de complément par rapport au diametre CP; donc 1*og*, 2*og*, 3*og*, &c. sont chacun double des sinus de complément par rapport au diametre 2CP+CH; de même tous les *oa* ayant même rapport à leurs *am* que CH à CP, & tous les *am* étant les sinus droits des angles sur la base par rapport au diametre CP, les *ao* seront aussi les sinus droits de ces mêmes angles par rapport au diametre CH.

Prenant donc une ligne droite AP (*Fig.* 158.), égale à 2CP+HC, portons y de P en A les sinus PB, PB, &c. de complément par rapport au diametre 2CP+HC, puis ayant élevé en P la perpendiculaire PD égale à CH, élevons sur les points B les perpendiculaires BC égales aux sinus droits par rapport au diametre CH; & de leurs extrêmitez tirons les droites CC, & les paralleles CG à AP. Il est visible par cette construction que chaque BB sera égale à chaque O*g*, & chaque CC à chaque *oa*; d'où il suit que chaque triangle rectangle CCG, sera égal à chaque triangle *oog*, & que par conséquent la courbe qui passera par tous les points C, C, &c. sera la même qui passe par chaque point *o*, *o*, *o*, &c. or il est visible que *a*CCCD est une Ellipse, dont le demi-grand axe est AP, & le demi-petit axe est PD; car si tous les sinus droits BC étoient sinus par rapport au diametre AP, la courbe seroit un cercle, à cause que les PB sont les sinus de complément: mais ces sinus droits diminuënt dans le même rapport de DP à PA: donc la courbe est une Ellipse, &c.

Par rapport à la cycloïde allongée, tirons de tous les points où les paralleles la coupent, des droites *bf* paralleles aux *mt* & des droites *bq* paralleles aux *at*, nous aurons d'un côté CP. CR :: *am. ab.* & de l'autre les triangles *afb*, *anm*, étant semblables, *am. ab* :: *an. af.* donc CP. CR. *an. af.* & doublant les antecedens 2CP. CR :: 2*an. af.* & divisant 2CP. 2CP − CR :: 2*an.* 2*an* − *af.* mais 2*an* = *aa*, & 2*an* − *af* = *bq*. donc 2CP. 2CP − CR :: *aa. bq.* mais tous les *aa* sont égaux à 2CP; donc tous les *bq* sont égaux à 2CP − CR, & continuant de raisonner comme nous avons fait pour la cycloïde racourcie, nous trouverons que la courbe A*bb*R de la cycloïde allongée, est égale à la courbe ACCCD (*Fig.* 158.), d'un quart d'Ellipse, dont le demi-grand axe AP est égal à 2CP − CR, & le petit demi-axe égal à CR.

## PROBLEME LIII.

249. *Couper un demi-cercle en raiſon donnée par un point C pris ſur ſon diametre AB* (Fig. 160.).

Prenez une troiſiéme proportionnelle OD aux deux lignes OC, OB, dont l'origine O eſt le centre du diametre : du centre O, décrivez le demi-cercle DHF, élevez au point B la perpendiculaire BR, que vous ferez égale à la demi-circonference DHF, & ſur cette ligne décrivez une demi-cycloïde allongée, dont le cercle générateur ſoit le cercle du diametre AB. Coupez BR en P, en ſorte que BP ſoit à BR dans la raiſon donnée, par exemple, comme 3 à 5. du point P élevez la perpendiculaire PQ, & du point Q où elle coupe la cycloïde, tirez QT parallele à la baſe ; enfin du point N où cette parallele coupe le demi-cercle donné, tirez la droite NC au point donné C, & la mixtiligne NCA, ſera au demi-cercle comme 3. à 5.

### DEMONSTRATION.

Prolongez ON juſqu'à ce qu'elle coupe le demi-cercle DHF en H, & du point H tirez HV parallele à la baſe, les ſegmens FHV, ANT, étant ſemblables, on a, l'arc FH eſt à la ligne HV, comme l'arc AN à la droite NT ; or l'arc AN multiplié par le demi-rayon OB, eſt égal au ſecteur ANO, & la droite NT multipliée par le demi-rayon OB, eſt égal au triangle BNO ; donc le ſecteur ANO eſt au triangle BNO, comme l'arc AN à la droite NT, ou comme l'arc FH, à HV ; mais par la conſtruction HV. NT :: OD. OB :: OB. OC, & les triangles BNO, CNO, qui ont même hauteur, ſont auſſi comme OB. OC. donc HV. NT :: BNO. CNO. & comme nous avons trouvé HV. HF :: BNO. ANO. donc NT. FH :: CNO. ANO. ou FH. NT :: ANO. CNO. & compoſant FH+NT. FH :: ANO+CNO. ANO. mais la demi circonference DHF eſt à l'arc FH, comme le demi-cercle BNA au ſecteur ANO, parce que le demi-cercle BNA eſt au ſecteur ANO, comme la demi-circonference BNA à l'arc AN. Mettant donc dans la derniere proportion la demi-circonference DHF & le demi-cercle BNA, au lieu des conſéquens FH, ANO, qui ſont en même raiſon ; nous aurons FH +NT, eſt à la demi-circonference DHF, comme le ſecteur ANO, plus le triangle CNO, ou comme la figure mixtiligne CNA, eſt au demi-cercle BNA ; mais par la nature de la cycloïde,

cloïde, QN est à sa base BR, comme l'arc AN à la demi-circonference BNA, ou comme l'arc FH à la demi-circonference DHF; donc puisque la demi-circonference DHF est égale à BR, l'arc HF est égal à QN; donc FH + NT = QT, ou BP, & par conséquent on a BP, BR, comme le mixtiligne CNA au demi-cercle BNA; ainsi CNA est au demi-cercle BNA, comme 3. à 5.

### COROLLAIRE.

250. Si le point C par où doit se faire la division du demi-cercle, est à l'extrêmité B du diametre, la cycloïde sera la cycloïde ordinaire, & si ce point est sur le diametre prolongé, la cycloïde sera une cycloïde racourcie. Au reste la solution de ce Probleme est purement méchanique; car la droite PQ n'étant pas parallele à une corde tirée du point B, on ne peut pas avoir au juste le point Q où cette ligne coupe la cycloïde, parce qu'on ne peut avoir de vrais points de la cycloïde que ceux qui se trouvent par l'intersection des paralleles aux cordes tirées du point B, & des paralleles à la base tirées par l'extrêmité de ces cordes.

## AVERTISSEMENT.

251. Comme il me reste du vuide dans la derniere planche de cette quatriéme partie, j'ajoûterai ici quelques Problemes, qui ne laisseront pas que d'avoir leur utilité.

### PROBLEME LIV.

252. *Inscrire dans un demi-cercle ABC* Fig. 159.), *des cordes qui soient en proportion continuë, dont la raison soit donnée.*

Soit la raison donnée celle de AC à AD; décrivez sur le diametre AD un demi-cercle qui touche le demi-cercle donné en A; portez son diametre AD sur la circonference du grand de A en B, & tirez la ligne AB qui coupe le petit en E; portez la corde AE sur le grand cercle de A en K, & tirez la corde AK, qui coupe le petit en G; portez la corde AG sur le grand cercle de A en H, & ainsi de suite les cordes AC, AB, AK, AH, AM, &c. seront en proportion continuë dans la raison de AC à AD & cette proportion pourroit être continuée à l'infini, si l'on vouloit.

DEMONSTRATION.

Les triangles rectangles AED, ABC, sont semblables, donc AC. AD. ou AB :: AB. AE. ou AK. de même les triangles AKB, AGE, sont semblables; car l'angle A est commun, l'angle ABK est égal à l'angle AEG, parce que l'arc KA, dont la moitié est la mesure de l'angle ABK, vaut autant de degrez de son cercle que l'arc GA, dont la moitié est la mesure de l'angle AEG, en vaut du sien, attendu que l'un & l'autre de ces arcs est aussi la mesure de l'angle de segment TAK; donc AB. AE. ou AK :: AK. AG. ou AH. & on prouvera la même chose des autres cordes; donc :: AC. AB. AK. AH. AM. &c.

COROLLAIRE.

253. Si après avoir inscrit dans un demi-cercle ABC (*Fig.* 163), des cordes AH, AI, AK, &c. en proportion continuë dans la raison de AB à AD., on prend une troisiéme proportionnelle AE aux deux lignes AD, AB, & qu'ayant décrit sur les diametres AD, AE, des demi-cercles qui touchent le demi-cercle ABC au point A, on tire des points H, I, K, du cercle moyen, des perpendiculaires au diametre, jusqu'à ce qu'elles coupent les cordes voisines de part & d'autre, les parties FD, GM, ON, &c. des cordes comprises entre les perpendiculaires & le petit demi-cercle, sont égales aux parties HG, IO, KP, &c. de ces mêmes cordes comprises entre le petit cercle & le cercle moyen, chacune à celle qui suit, c'est-à-dire FD = HG, GM = IO, ON = KP, &c. car les triangles rectangles semblables AGD, AHF, ont le côté AD égal au côté AH par la construction; donc ils sont égaux, & par conséquent AF = AG. Donc ôtant de AD sa partie AF, & de AH sa partie AG, le reste FD est égal au reste HG. De même les triangles AIM, AOG, sont semblables; car ils ont l'angle en A commun, & l'angle AIM égal à l'angle AGO, à cause que l'angle AIM ayant son sommet à la circonference du cercle moyen, vaut la moitié de l'arc qu'il embrasse, lequel est égal à l'arc ACI, & que l'angle AGO étant à la circonference du petit cercle, vaut aussi la moitié de l'arc APO qu'il embrasse, lequel arc vaut autant de degrez de sa circonference, que l'arc ACI en vaut de la sienne. Donc le troisiéme angle est égal au troisiéme angle; & comme outre cela le côté AG de l'un des triangles, est égal au côté AI de l'autre, il s'ensuit que les deux trian-

gles sont égaux, & que par conséquent AM = AO; ôtant donc de AG sa partie AM, & de AI sa partie AO, on aura GM = IO, & ainsi des autres.

En second lieu, les parties HG, IO, &c. des cordes comprises entre le petit cercle & le moyen, sont égales aux parties RI, TK, &c. de ces mêmes cordes comprises entre le cercle moyen & le grand, chacune à celle qui suit, c'est-à-dire HG = RI, IO = TK, &c. & les parties HQ, RI, &c. comprises entre le cercle moyen & le plus grand, sont égales aux parties RS, TV, &c. comprises entre le grand cercle & les perpendiculaires, chacune à celle qui suit; c'est-à-dire HQ = RS, IR = VT, &c. car à cause des paralleles RQ, OG, & SH, IM, les deux triangles RAQ, SAH, sont semblables & égaux, de même que les deux triangles OAG, IAM; donc RA = HA, & ôtant d'une part IA, & de l'autre GA, on aura RI = HG, & comme on a aussi SA = QA, ôtant RA d'une part & HA de l'autre, on aura RS = QH.

## PROBLEME LV.

254. *Connoissant la moyenne AB d'une progression continuë de trois lignes* (Fig. 162.), *& la difference BR des extrêmes, trouver les extrêmes.*

Elevez BR perpendiculairement sur l'extrêmité de AB, du milieu O de BR pris pour centre, & de l'intervalle OB ou OR, décrivez le cercle BTRS, du point A par le centre O tirez la droite ATS; portez AT sur AB de A en M, & AS de A en D, les trois lignes AM, AB, AD, seront en proportion continuë, & la difference MD des extrêmes, sera égale à TS, ou à la difference BR; donc AM, AD, seront les extrêmes demandées.

### DEMONSTRATION.

AB étant tangente du cercle TRSB, & AS secante, on a AT. AB :: AB. AS. mais AT = AM, & AS = AD; donc :: AM. AB. AD. donc, &c.

## LEMME.

255. *La difference AE* (Fig. 160.), *de deux grandeurs AB, CD; est égale à la difference du double AG de la plus grande, & de la somme CH des deux.*

Doublez la grande AB, en sorte qu'elle devienne AG, & ajoûtez la grande à la petite de D en H, & vous verrez évidemment que la difference AE est toujours la même, parce que ce qu'on ajoûte de part & d'autre, est égal.

## PROBLEME LVI.

256. *Inscrire dans un demi-cercle ABB* (Fig. 162.), *des triangles ABN, ABN, &c. dont la somme des droites BN, BN, &c. soit moindre que le double du diametre AB, & circonscrire un même nombre de triangles ACB, ACB, &c. dont la somme des droites CB, CB, &c. soit plus grande que le double du diametre, en sorte que le défaut de la premiere somme joint à l'excès de la seconde, soit égal à une ligne donnée X.*

Regardez le diametre AB comme la moyenne proportionnelle de trois lignes en proportion continuë, dont la difference des extrêmes est X, & cherchez par le Probleme précedent les deux extrêmes AM, AD, sur lesquelles prises pour diametres, vous décrirez deux autres demi-cercles qui touchent le demi-cercle donné au point A. Inscrivez au demi-cercle ABB des cordes AB, AB, qui soient en progression continuë dans la raison de AB à AM, & concevez que cette progression soit continuée à l'infini. Par les points B, B, B, &c. tirez des perpendiculaires au diametre, jusqu'à ce qu'elles rencontrent les cordes voisines de part & d'autre, & vous aurez une suite infinie de triangles inscrits, & autant de circonscrits, qui satisferont au Probleme.

## DEMONSTRATION.

Tous les BM allant en décroissant à l'infini, la somme de leurs differences sera égale au plus grand BM; car ce que nous avons dit à l'égard des sinus des arcs de cercle (*n.* 243.), est vrai en général de toutes les grandeurs qui vont en décroissant à l'infini. Or si du premier BM j'ôte le premier NM, qui est égal au second BM, le reste sera la difference du premier & du second BM; de même si du second BM j'ôte le second NM, égal au troisiéme BM, le reste sera la difference du second & du troisiéme BM, & ainsi des autres; donc tous les BM, moins tous les MN pris ensemble, sont égaux à la somme des differences des BM, & par conséquent ils sont égaux au plus grand BM: or par le Lemme précedent chaque BM, moins son MN, est égal à 2BM — BN,

donc la somme des BM prise deux fois, moins la somme des BN, est égale au plus grand BM ; or les BM étant les differences des cordes AB, AB, &c. leur somme est égale à la plus grande, ou au diametre AB ; donc la somme des BM prise deux fois, est égale au double du diametre, & par conséquent 2AB moins tous les BN, est égal à BM, & donnant de part & d'autre tous les BN, on aura 2AB égal à BM, plus tous les BN ; & enfin ôtant de part & d'autre BM, on aura 2AB — BM égal à tous les BN ; ainsi tous les BN sont moindres que deux fois le diametre de la grandeur BM.

De même si du premier DC on ôte son BD égal au second DC, le reste sera la difference du premier DC au second DC ; & si du second DC on ôte son DB égal au troisiéme DC, le reste sera la difference du second au troisiéme DC, & ainsi de suite ; donc tous les DC, moins leur DB, sont égaux à la somme des differences des DC, & par conséquent au premier DC. Or par le Lemme précedent chaque CD, moins son BD, est égal à 2CD, moins BC ; donc tous les CD pris deux fois, moins tous leurs BC, sont ensemble égaux au premier CD ; mais tous les CD étant les differences des cordes AC, AC, &c. leur somme est égale à la premiere corde AC ; donc tous les CD pris deux fois, sont égaux à 2AC, & par conséquent 2AC, moins tous les BC, est égal à DC ; & donnant de part & d'autre tous les BC, on aura 2AC égal à DC, plus tous les BC, & retranchant DC de part & d'autre, on aura tous les BC égaux à 2AC, moins CD ; mais la premiere corde AC est égale au premier AD, & son CD est égal au premier BD ; donc tous les BC sont égaux à 2AD, moins BD ; & comme 2AD surpasse 2AB de 2BD, il s'ensuit que tous les BC surpassent 2AB d'une fois BD.

Donc puisque tous les BN sont moindres que deux fois le diametre AB de la grandeur BM, & que tous les BC sont plus grands que 2AB de la grandeur BD, si l'on ajoûte ensemble ces deux differences, la somme DM sera égale à X, ainsi qu'il étoit requis.

# ADDITION

## *Aux Sections Coniques.*

QUelques personnes sçavantes à qui j'ai fait voir le Manuscrit de cet Ouvrage, m'ayant conseillé de ne pas omettre certaines propositions touchant les Sections Coniques, que j'avois crû pouvoir négliger, je me suis rendu à leur avis, & quoique cette troisiéme Partie fût déja imprimée, il m'a paru qu'on aimeroit encore mieux les trouver ici, quoique hors de leur place, que si je les avois tout-à-fait supprimées.

257. *Un diametre MR* (Fig. 164.) *d'une Ellipse ABaD étant donné, si du point M on mene une tangente MT, & une ordonnée MP à l'axe Aa, le rectangle CP×PT des parties CP, PT, de la droite CT, comprise entre la tangente & le centre de l'Ellipse est égal au rectangle AP×PA des parties AP, Pa de l'axe Aa coupées par l'ordonnée MP.*

Par la proprieté de la tangente de l'Ellipse nous avons :: CP. CA. CT. or CT = CP + PT; donc :: CP. CA. CP + PT; & faisant le produit des extrêmes, & le quarré de la moyenne, nous avons $\overline{CA}^2 = \overline{CP}^2 + PT \times CP$, & retranchant $\overline{CP}^2$ de part & d'autre, $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = PT \times CP$; mais $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2$ est égal au rectangle AP×Pa; donc AP×Pa = PT×CP.

258. *Deux diametres conjugués MR, SQ* (Fig. 164.), *d'une Ellipse ABaD étant donnez, si de leurs extrêmitez M, S, on tire deux ordonnées MP, SK à l'axe Aa, le quarré de la partie CK de l'axe comprise entre l'une des ordonnées SK, & le centre C est égal au rectangle AP×Pa des parties de l'axe coupées par l'autre ordonnée.*

AP×PA = $\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2$ = PC×PT (*n.* 257.); donc donnant $\overline{PC}^2$ de part & d'autre, nous avons $\overline{AC}^2 = PC \times PT + \overline{PC}^2$; or AK×Ka = $\overline{AC}^2 - \overline{KC}^2$, mettant la valeur de $\overline{AC}^2$, nous aurons AK×Ka = PC×PT + $\overline{PC}^2 - \overline{KC}^2$; cela posé,

Par la proprieté de l'Ellipse AP×Pa. AK×Ka :: $\overline{PM}^2$, $\overline{KS}^2$, & à

cauſe des triangles rectangles ſemblables PMT, KSC, $\overline{PM}^2.\overline{KS}^2 :: \overline{PT}^2.\ \overline{CK}^2$. donc $AP\times Pa.\ AK\times Ka :: \overline{PT}^2.\ \overline{CK}^2$. & mettant au lieu des deux premiers termes leurs valeurs $PC\times PT$, & $PC\times PT + \overline{PC}^2 - \overline{KC}^2$, nous aurons $PC\times PT.\ PC\times PT + \overline{PC}^2 - \overline{CK}^2 :: \overline{PT}^2.\ \overline{CK}^2$, & faiſant le produit des moyens & celui des extrêmes $PC\times PT\times\overline{CK}^2 = PC\times PT\times\overline{PT}^2 + \overline{PC}^2\times\overline{PT}^2 - \overline{CK}^2\times\overline{PT}^2$, & donnant $\overline{CK}^2\times\overline{PT}^2$ de part & d'autre, $PC\times PT\times\overline{CK}^2 + \overline{CK}^2\times\overline{PT}^2 = PC\times PT\times\overline{PT}^2 + \overline{PC}^2\times\overline{PT}^2$, & diviſant par PT, nous aurons $PC\times\overline{CK}^2 + \overline{CK}^2\times PT = PC\times\overline{PT}^2 + \overline{PC}^2\times PT$, & diviſant par $PC+PT$, nous aurons $\overline{CK}^2 = \frac{PC\times\overline{PT}^2 + \overline{PC}^2\times PT}{PC+PT} = PC\times PT$ ; car $PC\times PT$ multiplié par $PC+PT$, donne $PC\times\overline{PT}^2 - \overline{PC}^2\times PT$. Donc $\overline{CK}^2 = PC\times PT = AP\times Pa$.

259. *Les quarrez* $\overline{MR}^2$, $\overline{SQ}^2$, *des diametres conjugués MR, SQ ; ſont enſemble égaux aux quarrez* $\overline{Aa}^2$, $\overline{BD}^2$, *des deux axes.*

$\overline{CK}^2 = AP\times Pa = \overline{AC}^2 - \overline{PC}^2$ (*n.* 258) ; donc retranchant $\overline{CK}^2$ de part & d'autre, & donnant $\overline{PC}^2$, nous aurons $\overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CK}^2 = AK\times Ka$ ; cela poſé.

Par la proprieté de l'Ellipſe $\overline{CA}^2.\ \overline{CB}^2 :: AK\times Ka.\ \overline{SK}^2$. & mettant $\overline{PC}^2$ au lieu de $AK\times KA$, nous avons $\overline{CA}^2.\ \overline{CB}^2 :: \overline{PC}^2.\ \overline{SK}^2$, ou $\frac{\overline{CB}^2\times\overline{PC}^2}{\overline{CA}^2}$.

De même $\overline{CA}^2.\ \overline{CB}^2 :: AP\times Pa$, ou $\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2.\ \overline{PM}^2$. ou $\frac{\overline{AC}^2\times\overline{CB}^2 - \overline{PC}^2\times\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}$, ou $\overline{CB}^2 - \frac{\overline{PC}^2\ \overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}$.

Or dans le triangle rectangle CPM, on a $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$ ;

donc mettant la valeur de $\overline{PM}^2$, on aura $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CB}^2 - \frac{\overline{PC}^2 \times \overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}$

De même dans le triangle rectangle CSK, on a $\overline{CS}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KS}^2$, & mettant la valeur de $\overline{SK}^2$, on aura $\overline{CS}^2 = \overline{CK}^2 + \frac{\overline{CB}^2 \times \overline{PC}^2}{\overline{CA}^2}$, & mettant au lieu de $\overline{CK}^2$, sa valeur $\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2$, on aura $\overline{CS}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 + \frac{\overline{CB}^2 \times \overline{PC}^2}{\overline{CA}^2}$, ajoûtant donc ensemble les quarrez $\overline{CM}^2$, $\overline{CS}^2$, & leur valeur, nous aurons $\overline{CM}^2 + \overline{CS}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CB}^2 - \frac{\overline{CB}^2 \times \overline{CP}^2}{\overline{CA}^2} + \overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 + \frac{\overline{CB}^2 \times \overline{PC}^2}{\overline{CA}^2}$, & effaçant les termes qui se détruisent par des signes contraires, nous aurons $\overline{CM}^2 + \overline{CS}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AC}^2$.

260. *Deux diametres conjugués Mm, Ss* (Fig. 165.), *d'une hyperbole étant donnés, la difference de leurs quarrez est égale à la difference des quarrez des deux axes Aa, Bb.*

Menez les asymptotes CK, *cg*, & les droites AB, MS, qui seront paralleles à l'asymptote C*g*, & qui seront divisées chacune en deux également par l'asymptote CK, ainsi que nous l'avons démontré en parlant des asymptotes. Des points A, M, B, S, tirez sur l'asymptote CG, ou CK, les perpendiculaires AF, ML, BE, SK, qui formeront les deux triangles AEG, BEG, semblables & égaux, & les deux triangles MLH, SKH, aussi égaux & semblables.

Les droites AG, GB, GC, seront égales entr'elles, de même que les droites BE, AF, & aussi EG, EF, & KH, HL; ainsi nous pourrons mettre les unes au lieu des autres qui leur sont égales. De plus CE = CG + GE, & CF = CG − GF = CG − GE, & par conséquent au lieu de CE, CF, ou de leurs quarrez, nous pourrons mettre leur valeur ou les quatrez de leurs valeurs. Cela posé;

Dans

Dans le triangle rectangle CEB, on a $\overline{CB}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$, & mettant le quarré de la valeur de CE, on aura $\overline{CB}^2 = \overline{CG}^2 + 2GE \times CG + \overline{GE}^2 + \overline{EB}^2$.

Dans le triangle rectangle CFA, on a $\overline{CA}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{FA}^2$, ou $\overline{EB}^2$, & mettant le quarré de la valeur de $\overline{FC}^2$, on aura $\overline{CA}^2 = \overline{CG}^2 - 2GE \times CG + \overline{GE}^2 + \overline{EB}^2$, & retranchant le quarré $\overline{CA}^2$ du quarré $\overline{CB}^2$, & la valeur de l'un de la valeur de l'autre, on aura $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = 4GE \times CG$.

Maintenant les triangles semblables FAG, LMH donnent GA. AF :: HM. ML, ou KS, ou $\frac{AF \times HM}{GA}$. & GA. GF :: MH. HL, ou HK, ou $\frac{GF \times HM}{GA}$. donc $CK = HC + HK = HC + \frac{GF \times HM}{GA}$, & $CL = HC - HK = HC - \frac{GF \times HM}{GA}$. Donc $\overline{CK}^2 = \overline{HC}^2 + \frac{2GF \times HM \times HC}{GA} + \frac{\overline{GF}^2 \times \overline{HM}^2}{\overline{GA}^2}$, & $\overline{KS}^2 = \frac{\overline{AF}^2 \times \overline{HM}^2}{\overline{GA}^2}$, & par conséquent dans le triangle rectangle KCS, nous avons $\overline{CS}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KS}^2 = \overline{HC}^2 + \frac{2GF \times HM \times HC}{GA} + \frac{\overline{GF}^2 \times \overline{HM}^2}{\overline{GA}^2} + \frac{\overline{AF}^2 \times \overline{HM}^2}{\overline{GA}^2}$.

De même $\overline{CL}^2 = \overline{HC}^2 - \frac{2GF \times HM \times HC}{GA} + \frac{\overline{GF}^2 \times \overline{HM}^2}{\overline{GA}^2}$, & $\overline{LM}^2 = \frac{\overline{AF}^2 \times \overline{HM}^2}{\overline{GA}^2}$; donc dans le triangle rectangle MCL, nous avons $\overline{MC}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{LM}^2 = \overline{HC}^2 - \frac{2GF \times HM \times HC}{GA} + \frac{\overline{GF}^2 \times \overline{HM}^2}{\overline{GA}^2} + \frac{\overline{AF}^2 \times \overline{HM}^2}{\overline{GA}^2}$.

retranchant donc le quarré $\overline{MC}^2$ du quarré $\overline{CS}^2$, & la valeur de l'un de la valeur de l'autre, nous aurons $\overline{CS}^2 - \overline{MC}^2 = \frac{4GF \times HM \times HC}{GA \text{ ou } GC}$

ou $\frac{4GE \times HM \times HC}{GC}$. Mais par la proprieté des asymptotes le rectangle $HM \times HC = \overline{GA}^2 = \overline{GC}^2$; donc $\overline{CS}^2 - \overline{MC}^2 = \frac{4GE \times \overline{GC}^2}{GC}$ $= 4GE \times GC$; & comme nous avons trouvé ci-dessus $\overline{BC}^2 - \overline{CA}^2 = 4GE \times GC$; donc $\overline{BC}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CS}^2 - \overline{MC}^2$.

261. *Dans toute section conique, soit parabole, cercle, ellipse, ou hyperbole, deux tangentes AB, BC, étant données* (Fig. 166.), *si du point B où elles se coupent, on tire une droite BD, qui coupe la courbe en deux points B, D, & que l'on joigne les points d'attouchement par la droite AC, on aura toujours BD.BP :: DH. HP.*

Des points D, P, tirez DT, PR, paralleles à la tangente CB, & par conséquent ordonnées au diametre QZ; je suppose ici que la section conique est une parabole, du même point D tirez LM parallele à AC, & du point B menez le diametre BM de l'ordonnée AC, & enfin du point P la droite PR parallele à la tangente BC.

A cause des triangles semblables DLB, QPB; LMB, QOB; & DMT, POR, on a DB. BP :: LD. PQ :: DM. PO :: LM. QO. Donc $\overline{LM}^2$. $\overline{QO}^2$ :: $\overline{DM}^2$. $\overline{PO}^2$. & au lieu des quarrez des lignes LM, QO, DM, PO, mettant les triangles semblables, dont ces lignes sont les côtez homologues, nous aurons LMB. QOB :: DMT. OPR. ou LMB. DMT :: QOB. OPR. & par conversion de raison, LMB. LMB—DMT :: QOB. QOB—OPR. ou LMB. BTDL :: QOB. BRPQ. ou LMB. QOB :: BTDL. BRPQ. ou enfin $\overline{LM}^2$. $\overline{QO}^2$ :: BTDL. BRPQ.

Mais le trapezoïde BTDL est égal au triangle CZL; car le triangle SYV, est égal au parallelograme BTYX, comme nous l'avons démontré en plusieurs endroits, & le triangle SYV, est égal au triangle YZD; donc YZD est égal au parallelograme BTYZ, & ajoûtant de part & d'autre le trapezoïde CYDL, nous aurons CZL = BTDL.

De même le trapezoïde BRPQ est égal au triangle QCX; mettant donc les triangles au lieu des trapezoïdes, on aura $\overline{LM}^2$. $\overline{QO}^2$ :: CZL. QCX. mais les triangles CZL, QCX, étant semblables,

sont entr'eux comme $\overline{CL}^2$, $\overline{QC}^2$, ou $\overline{HD}^2$, $\overline{PH}^2$, & $\overline{LM}^2$, $\overline{QO}^2$, sont entr'eux comme $\overline{DB}^2$, $\overline{BP}^2$; donc $\overline{DB}^2$. $\overline{BP}^2$ :: $\overline{HD}^2$. $\overline{PH}^2$. donc DB. BP :: DH. HP.

262. *Autour d'un parallelograme donné ABCD, circonscrire une ellipse, dont le diametre parallele aux côtez AB, CD* (Fig. 167.) *soit au diametre parallele aux côtez AD, BC, comme une ligne OI à une ligne RL.*

Je suppose la chose faite, & menant par le milieu des lignes AB, CD, la droite MN, & par le milieu des côtez AD, BC, la droite XZ, les deux droites XZ, MN, feront les deux diametres qu'il faut chercher. Or par la proprieté de l'ellipse on a $\overline{MN}^2$. $\overline{XZ}^2$ :: $\overline{AP}^2$. XP×PZ, & supposant que le quarré égal à XP×PZ, soit $xx$, nous aurons $\overline{MN}^2$. $\overline{XZ}^2$ :: $\overline{AP}^2$. $xx$. or $\overline{MN}^2$. $\overline{XZ}^2$ :: $\overline{LR}^2$. $\overline{OI}^2$. donc $\overline{LR}^2$. $\overline{OI}^2$ :: $\overline{AP}^2$. $xx$. & LR. OI :: AP. $x$. ayant donc trouvé une ligne EK = $x$, on aura $\overline{EK}^2 = xx =$ XP×PZ; mais XP×PZ = $\overline{XF}^2 - \overline{PF}^2$. donc $\overline{EK}^2 = \overline{XF}^2 - \overline{PF}^2$. & $\overline{EK}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{XF}^2$. Je fais donc un triangle rectangle, dont l'un des côtez soit EK, & l'autre KV, soit égal à PF, & par conséquent on a $\overline{EV}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KV}^2$. ou $\overline{EV}^2 = \overline{XF}^2$. donc EV est égal au demi-diametre cherché XF, & celui-ci étant trouvé, on trouvera aisément l'autre MF, & le reste de la construction.

263. *Dans toute section conique ABC* (Fig. 169.), *dont une tangente CD est donnée, & une ou plusieurs droites DM, DZ, qui coupent la tangente en un même point D; si d'un point V de l'une de ces lignes on mene deux droites à deux differens points X, P, de la tangente, & une troisiéme au point d'attouchement C, & qu'ayant ensuite tiré une droite BN parallele à DM, & posée entr'elle & la tangente, on mene d'un autre point M de la ligne DM, les droites MX, MP, & qu'on coupe la partie ON de la parallele comprise entre les droites MX, MP, dans la même raison que sa partie FO a été coupée par la droite VC, la ligne menée du point M par le point de division T, passera par le point d'attouchement C; & si l'on prend d'autres points sur la même ligne DM, & qu'on fasse la même chose, toutes les droites qui passeront par ces points, & par les points de division faits sur les parties corres-pon-*

*dantes de la parallele, passeront toutes par le point d'attouchement.*

*Et si on mene une parallele* rt *à la droite DZ, & que prenant un point* a *sur cette ligne, on mene les droites* aX, aP, *& qu'on coupe la partie* br *de la parallele en même raison que FO, a été divisée en E, la droite qui passera par le point* a, *& par le point* c *de division, passera aussi par le point d'attouchement, & faisant la même chose à l'égard de tel point que l'on voudra de la droite DZ, la même chose arrivera toujours, & ainsi des autres lignes qu'on pourroit mener par le point D.*

Du point X menez XR parallele à BN, la droite XH comprise entre les jambes de l'angle XVF, sera coupée en Q en même raison que la droite BO l'est en E, & la droite XR comprise entre les jambes de l'angle XMP, sera aussi divisée en H en même raison à cause des paralleles & des triangles semblables. Or les triangles RMX, HVX, HMX, QVX, étant entre mêmes paralleles, seront entr'eux comme leurs bases, & à cause de XR. HX :: HR. QX. on aura RMX. HVX :: HMX. QVX.

Comme nous ne sçavons point si MH prolongée passe par C, menons la droite HC, & par la même raison nous aurons XRP. XHP :: XHC. XQC. & la raison qui regne dans cette proportion, est la même que la raison de la proportion précédente; c'est-à-dire, ces triangles de même que les précedens, sont entr'eux dans la raison des bases qui sont les mêmes de part & d'autre. Ajoûtant donc ensemble les termes de ces deux proportions, nous aurons RMX+XRP. HVX+XHP :: HMX +XHC. QVX+XQC. ou XMP. XVP :: XMC. VXC. ou XMP, XMC :: XVP. XVC, c'est-à-dire le triangle XMP est coupé par les droites MH, HC, en même raison que le triangle XVP par la droite VC. Mais si du point C on tire la droite CM, le triangle XMP sera aussi divisé en même raison, c'est-à-dire dans la raison de XC à CP; donc les droites MH, HC, sont en lignes droites: car si elles ne l'étoient pas, elles prendroient leur cours ou à droite ou à gauche de la droite MC, qui joint leur extrêmité, & par conséquent ou elles retrancheroient quelque chose du triangle XCM, ou elles lui donneroient quelque chose, & dans l'un ou l'autre cas, le triangle XCM ne seroit plus au triangle total XMP dans la même raison de XC à CP; donc la droite MT prolongée passe par le point C.

Pour prouver la même chose à l'égard de la droite DZ, menez par le point X la droite X*u* parallele à *rt*, & X*u* sera coupé en *n* dans la même raison que *rb* est coupé en *c*, de plus à cause des pa-

ralleles XR, BN, vous aurez VP. VH :: PD. DX. & à cause des paralleles *rt*, *xu*, vous aurez *a*P. *au* :: PD. DX. donc VP VH :: *a*P. *au*; d'où il suit que les lignes VP, *a*P, étant coupées proportionnellement aux points H, *u*, les triangles HVX, QVX, HXP, QXC, auront les hauteurs proportionnelles aux hauteurs des triangles *ua*X, *na*X, *u*PX, *n*CX, en supposant qu'on ait mené la droite *n*C; car nous ignorons encore si *an* prolongée passe par C, & comme ces triangles ont aussi les bases proportionnelles par la construction, il s'ensuit qu'ils sont proportionnels, & HVX. *ua*X :: QVX. *na*X. & HPX. *u*PX :: QCX. *n*CX. & ajoûtant ensemble les termes de ces proportions, nous aurons HVX + HPX. *ua*X + *u*PX :: QVX + QCX. *na*X + *n*CX. ou VXP. *a*XP :: VXC. *a*XC. ou VXP. VXC :: *a*XP. *a*XC. c'est-à-dire le triangle *a*XP est coupé par les droites *an*, *n*C, en même raison que le triangle PVX par la droite VC. mais si du point C l'on tire la droite C*a*, le triangle *a*XP est aussi divisé en même raison, c'est-à-dire dans la raison de XC à CP; donc la droite *ac* prolongée passe par le point C, & ainsi des autres.

Dans cette figure 169, la ligne MT prolongée rencontre la parallele XR, & la jambe VP de l'angle VPX en un même point H; mais si cela n'arrive pas dans d'autres occasions, comme dans la figure 168, cela ne fait rien pour la démonstration; car RX sera toujours coupée en H en même raison que ZN en T, ou que FO en E, & XS sera aussi coupée en même raison en Q. Donc on aura toujours RMX. SVX :: HMX. QVX.

Et tirant la droite HC, on aura pour la même raison RPX. SPX :: HCX. QCX. la raison de cette proportion sera la même que celle de la proportion précedente; car tous ces triangles sont entr'eux comme les bases qui sont les mêmes de part & d'autre. Donc ajoûtant ensemble les termes de ces deux proportions, on aura MXP. PVX :: CMX. CVX. & par conséquent le triangle MXP est coupé par les droites MH, HC, en même raison que le triangle PVX par la droite VC: mais du point C tirant la droite CM, le triangle PMX est encore divisé dans la même raison; donc MH étant prolongée, passe par C; car si MH, HC, n'étoient pas en ligne droite, où elles passeroient à droite de MH ou à gauche, & par conséquent ou elles retrancheroient quelque chose de la partie CMX du triangle XMP, ou elles lui ajoûteroient quelque chose; ainsi cette partie ne seroit plus au triangle total XMP dans la même raison de XC à XP.

264. *Dans l'ellipſe & l'hyperbole le parallelograme fait par deux diametres conjugués, eſt égal au rectangle des deux axes.*

Soient l'ellipſe ABa*b*, (*Fig.* 171.), dont le grand axe eſt A*a*, le petit B*b*, & les deux diametres conjugués F*f*, G*g*, tirez les droites AB, B*a*, FG, G*f*, le triangle ABO ſera le quart du rectangle des deux axes, & par conſéquent le triangle AB*a* en ſera la moitié; de même le triangle FGO ſera le quart du parallelograme fait par les deux diametres conjugués, & par conſéquent le triangle FG*f* en ſera la moitié; ainſi ſi je démontre que ces deux triangles ſont égaux, il ſera facile d'en conclure que le rectangle & le parallelograme le ſont auſſi, & prenez garde que je dis le parallelograme fait par les deux diametres, c'eſt-à-dire ayant l'angle obtus FOG, & non pas le rectangle des deux diametres; car alors la proportion deviendroit fauſſe, ce qui mérite attention.

Pour en venir donc à la démonſtration, conſiderez que les ſegmens AB*a*, FG*f*, ayant les portions BO, GO, de leurs diametres proportionnelles à leurs diametres B*b*, G*g*, ſont par conſéquent égaux entr'eux; d'où il ſuit que leurs baſes A*a*, F*f*, ſont réciproques à leurs hauteurs (*n.* 117.), ou aux perpendiculaires tirées de leur ſommet B, G; ſur leurs baſes; mais les triangles inſcrits AB*a*, FG*f*, ont même baſe & même hauteur que les ſegmens; donc ces triangles ſont égaux entr'eux: car toutes les figures qui ont les baſes & les hauteurs réciproques, ſont égales; donc le rectangle des deux axes, ou le double du triangle AB*a* eſt égal au parallelograme des diametres conjugués, ou au double du triangle FG*f*.

Soit maintenant une hyperbole (*Fig.* 165.), dont les deux axes ſont A*a*, B*b*, & les deux diametres conjugués M*m*, S*s*, je mene les droites BA, MS, ce qui me donne deux triangles, dont le premier BAC eſt la huitiéme partie du rectangle des deux axes, & le ſecond SCM eſt auſſi la huitiéme partie du parallelograme fait par les deux diametres, ayant l'angle aigu SCM. Cela poſé.

Par la proprieté des aſymptotes le rectangle MH×HC, eſt égal au rectangle AG×GC, & comme MH eſt autant inclinée ſur HC, que AG ſur GC, il s'enſuit que le parallelograme MH×HC eſt égal au parallelograme AG×GC, & prenant les moitiés de ces parallelogrames, nous aurons le triangle MHC égal au triangle AGC; donc le triangle SMC double du triangle MHC, eſt égal

au triangle BAC double du triangle AGC. Puis donc que MSC huitiéme partie du parallelograme des diametres, eſt égal à FCA, huitiéme partie du rectangle des axes, il s'enſuit que le parallelograme eſt égal au rectangle.

265. *Les aſymptotes OE, OG, d'une hyperbole* (Fig. 104.), *étant données, & un point Q de la courbe, décrire cette hyperbole.*

Je diviſe l'angle EOG des aſymptotes en deux parties égales par la droite indéfinie OB, & la poſition de cette droite ſera la même que celle du premier axe. Du point Q je mene QST parallele à OB, & comme je ſçais que ſi les deux hyperboles oppoſées étoient tracées, la partie TS ſeroit égale à RQ, & que j'aurois TS×SQ égal au quarré de la moitié du grand axe (*n.* 160.), je mets RQ au lieu de TS ſon égale, & j'ai RQ×SQ égal au quarré de la moitié du premier axe. Prenant donc une moyenne proportionnelle entre RQ & SQ, & la portant de O en B, la droite OB eſt la moitié du premier axe.

Pour trouver le ſecond axe, du point Q je mene la droite EG perpendiculaire au premier axe prolongé, & j'ai EQ×QG égal au quarré de la moitié du petit axe (*n.* 150. 151.); prenant donc une moyenne proportionnelle entre EQ & QG, cette moyenne proportionnelle eſt la moitié du petit axe. Ainſi les deux axes étant trouvés, je décris la courbe, comme il a été enſeigné plus haut, & cette courbe paſſe par le point Q.

266. J'ai dit dans le ſecond cas de la démonſtration du Probleme 12 (*n.* 48.), que ſi deux ordonnées AB, CD (*Fig* 39.), à deux differens diametres d'une parabole, ſe rencontroient en un point R hors de la courbe, & que les diametres interceptés PH, GI, fuſſent égaux, on avoit BR×AR. $\overline{HA}^2$ :: RD×CR. $\overline{CI}^2$. & je ne l'ai point démontré, parce que c'étpit une ſuite des principes que j'avois établi auparavant; cependant comme cette propoſition eſt de conſéquence, & que je ſerois fâché que les Commençans s'y trouvaſſent arrêtés, voici de quelle façon je le démontre.

J'ai démontré (*n.* 29.), que dans la figure 27. le trapezoïde NLXP eſt égal au trapezoïde LIQZ. Donc auſſi dans la figure 32 le trapezoïde H*a*IQ eſt égal au trapezoïde O*a*KP. Or il eſt évident que dans la même figure 32, les deux droites XH, OZ, ordonnées aux deux diametres BL, DK, qui les coupent en deux également aux points T, V, ſe coupent au point *a* hors de

la parabole. Ainſi il faut que je prouve qu'en ſuppoſant AT=CV, on a $aX \times aH$. $\overline{TH}^2 :: aZ \times aO$. $\overline{OV}^2$. ce que je fais en cette ſorte.

La droite XH étant diviſée en deux également en T, & la droite H*a* lui étant ajoûtée, on a $aX \times aH + \overline{TH}^2 = \overline{Ta}^2$; donc $aX \times aH = \overline{Ta}^2 - \overline{TH}^2$. Mais les triangles T*a*I, THQ, étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrez $\overline{Ta}^2$, $\overline{TH}^2$ de leurs côtez homologues; donc $\overline{TA}^2$. $\overline{TH}^2 ::$ TAI. THQ. & $\overline{TA}^2 - \overline{TH}^2$. $\overline{TH}^2 ::$ T*a*I—THQ. THQ, c'eſt-à-dire $Xa \times aH$. $\overline{TH}^2 ::$ H*a*IQ. THQ. ou $Xa \times aH$. H*a*IQ :: $\overline{TH}^2$. THQ. mais les triangles THQ, ASQ, étant ſemblables, on a $\overline{TH}^2$. THQ :: $\overline{AS}^2$. ASB. donc $Xa \times aH$. H*a*IQ :: $\overline{AS}^2$. ASB. On prouvera de même que $aZ \times aO$ *a*OPK :: $\overline{SC}^2$. SCD. or O*a*PK = *a*HQI, & SCD=ASB; donc $aZ \times aO$. *a*HQI :: $\overline{SC}^2$. ASB. mais nous avons trouvé $Xa \times aH$. *a*HQI :: $\overline{AS}^2$. ASB. donc $XA \times aH$. $AZ \times aO :: \overline{AS}^2$. $\overline{SC}^2$. Or ſi du point S où les tangentes ſe coupent, on mene S*m* parallele aux diametres, nous avons démontré (*n.* 48.), que S*m* doit paſſer par le point *a*, & que par conſéquent T*a* = AS, & V*a* = SC; donc $Xa \times aH$. $Za \times aO :: \overline{Ta}^2$. $\overline{Va}^2$. ou $\overline{Ta}^2$. $Xa \times aH :: \overline{Va}^2 :: Za \times aO$. donc $\overline{Ta}^2 - Xa \times aH$. $\overline{Ta}^2 :: \overline{Va}^2 - Za \times aO$. $\overline{Va}^2$. c'eſt-à-dire $\overline{TH}^2$. $\overline{Ta}^2 :: \overline{VO}^2$. $\overline{Va}^2$. ou $\overline{TH}^2$. $\overline{VO}^2 :: \overline{Ta}^2$. $\overline{Va}^2$, mais nous avons $Xa \times aH$. $Za \times aO :: \overline{Ta}^2$. $\overline{Va}^2$. donc $Xa \times aH$. $Za \times aO :: \overline{TH}^2$. $\overline{OV}^2$. ou $Xa \times aH$. $\overline{TH}^2 :: Za \times aO$. $\overline{OV}^2$. ce qu'il falloit démontrer; donc auſſi dans la figure 39, RB×AR. $\overline{HA}^2 ::$ RD×CR. $\overline{CI}^2$.

Ce que nous venons de démontrer pour la parabole, eſt également vrai pour les deux autres ſections coniques, en ſuppoſant que les diametres interceptez ſoient proportionnels. Car à l'égard de l'ellipſe (*Fig.* 71.), nous avons le trapezoïde OPIH égal au trapezoïde OQSR (*n.* 104.); ainſi on prouvera de même

que

que ci-dessus, que $Od \times OP. Ob \times OQ :: \overline{CN}^2. \overline{AN}^2.$ en supposant, comme il vient d'être dit, que le diametre intercepté CP, est au diametre intercepté A*a*, comme CD est à AB. Or si du point N où les tangentes se rencontrent, on mene un diametre au centre V, ce diametre passera par le point O (*n.* 117.); donc dans les triangles semblables NCV, O*p*V, on aura $\overline{NC}^2. \overline{Op}^2 :: \overline{NV}^2. \overline{OV}^2.$ & dans les triangles semblables ANV, *a*OV, on aura $\overline{AN}^2. \overline{aO}^2 :: \overline{NV}^2. \overline{OV}^2.$ donc $\overline{NC}^2. \overline{AN}^2 :: \overline{Op}^2. \overline{aO}^2.$ donc $Od \times OP. Ob \times OQ :: \overline{Op}^2. \overline{aO}^2.$ ou $\overline{Op}^2 - \overline{Pp}^2. \overline{Oa}^2 - \overline{aQ}^2 :: \overline{Op}^2. \overline{aO}^2.$ ou $\overline{Op}^2 - \overline{pP}^2. \overline{Op}^2 :: \overline{Oa}^2 - \overline{aQ}^2. \overline{aO}^2.$ & divisant, on aura enfin $\overline{Op}^2 - \overline{pP}^2. \overline{Op}^2 - \overline{Op}^2 + \overline{pP}^2 :: \overline{Oa}^2 - \overline{aQ}^2. \overline{Oa}^2 - \overline{Oa}^2 + \overline{aQ}^2.$ c'est-à-dire $Od \times OP. \overline{pP}^2 :: Ob \times OQ. \overline{aQ}^2.$ ou $Od \times OP. Ob \times OQ :: \overline{pP}^2. \overline{aQ}^2.$

La démonstration pour l'hyperbole est la même que pour l'ellipse, & de-là on tire ces Theoremes généraux.

*Dans toute Section Conique si deux ordonnées à deux differens diametres, se rencontrent hors de la Section, & que les diametres interceptés soient égaux dans la parabole, ou proportionnels dans l'ellipse & dans l'hyperbole, le rectangle de la premiere ordonnée, plus sa partie exterieure par sa partie exterieure, est au rectangle de la seconde ordonnée, plus sa partie exterieure par sa partie exterieure, comme le quarré de la moitié de la premiere ordonnée au quarré de la moitié de la seconde.*

*Dans toute Section Conique si deux ordonnées à deux differens diametres, se coupent ou en-dedans de la courbe ou en-dehors, ou sur le perimetre, & que les diametres interceptés soient égaux dans la parabole, ou proportionnels dans l'ellipse & dans l'hyperbole, les deux tangentes des diametres étant menées, la ligne droite qui passera par le point où les tangentes se coupent, & par celui où les ordonnées se coupent, sera toujours un diametre de la courbe, & les lignes menées des deux points où la premiere ordonnée coupe la courbe aux deux points où la seconde ordonnée coupe la courbe, seront ordonnées à ce diametre.*

## PROBLEME.

*Trouver quelles sont les Sections Coniques qu'on peut inscrire les unes dans les autres, & parmi celles qu'on peut inscrire quelles sont les plus grandes.*

Si de l'extrêmité de l'axe d'une Section Conique on éleve une

ligne perpendiculaire à cet axe, & égale au parametre de la Section, & que de l'extrêmité de ce parametre (*Fig.* 172. 174. 175.), on mene une ligne parallele à l'axe, lorsque la Section est une parabole (*Fig.* 172.), ou une droite à l'autre extrêmité de l'axe, lorsque la section est une ellipse ou une hyperbole (*Fig.* 174. 175.). On sçait que dans la parabole le quarré d'une ordonnée quelconque CB (*Fig.* 172.) est égal au rectangle de l'abscisse AC par le parametre AP, ou par la droite CO = AC à cause des paralleles; que dans l'ellipse (*Fig.* 182.), le quarré d'une ordonnée CB est égal au rectangle de l'abscisse AC par la droite CO parallele au parametre AP (*n.* 76.), & que dans l'hyperbole (*Fig.* 175.), le quarré d'une ordonnée OI est égal au rectangle de l'abscisse AO par la droite OS parallele au parametre AP (*n.* 135.) & comprise de même que dans l'ellipse entre l'axe & la droite menée de son extrêmité à l'extrêmité du parametre. Or ceci doit s'entendre de même du cercle; car tous les diametres de cette figure étant égaux, son parametre est par conséquent égal au diametre; c'est pourquoi si de l'extrêmité du diametre on mene AP, égal & perpendiculaire au diametre (*Fig.* 172.), & ensuite la droite PQ, on aura toujours $\overline{XS}^2 = AX \times XT$. ce que nous prouverons bien-tôt. Cela posé, la question proposée est facile à résoudre.

Si l'on veut trouver, par exemple, le plus grand cercle qu'on puisse inscrire dans une parabole YAB (*Fig.* 172.), dont le parametre est AP, on fera l'abscisse AQ = AP, & sur cette abscisse prise pour diametre, on décrira un cercle qui sera inscrit dans la parabole, & qui sera le plus grand de ceux qu'on peut lui inscrire.

Car menant la droite PQ, & une ordonnée XS, on aura $\overline{XS}^2 = AX \times XQ$ par la propriété du cercle; & comme à cause du triangle rectangle isoscele PAQ, on a XQ = XT, donc on aura aussi $\overline{XS}^2 = AX \times XT$. mais par la propriété de la parabole, on a $\overline{XT}^2 = AX \times XH$, & XH est plus grand que XT; donc $AX \times XH$ est plus grand que $AX \times XT$; donc $\overline{XT}^2$ est plus grand que $\overline{XS}^2$, & XT plus grand que XS; d'où il suit que le point S du cercle est dans la parabole, & comme la même chose arrivera partout, le cercle sera tout entier dans la parabole,

De plus ce cercle ſera le plus grand qu'on puiſſe inſcrire à la parabole ; car ſi on vouloit en inſcrire un autre dont le diametre fût plus grand, ſon parametre deviendroit auſſi plus grand que celui de la parabole. Ainſi ſuppoſant que ce parametre fût égal à AS (*Fig.* 173.), & qu'ayant pris l'abſciſſe AV = AS, on décrivît le cercle, les ordonnées au cercle, qui étant prolongées, iroient aboutir ſur VS entre S, & le point H où la droite VS coupe PO, ſeroient plus grandes que les ordonnées de la parabole, qui iroient aboutir ſur la droite PH ; car par la proprieté du cercle on auroit $\overline{MN}^2 = AM \times MF$, & par la proprieté de la parabole on auroit $\overline{ME}^2 = AM \times MI$ ; mais MI eſt moindre que MF ; donc $AM \times MI$ eſt moindre que $AM \times MF$ ; donc $\overline{ME}^2$ eſt moindre que $\overline{MN}^2$, & par conſéquent ME moindre que MN ; donc le point N du cercle ſeroit hors de la parabole, & ce cercle ne ſeroit point inſcrit comme il étoit requis.

De même ſi l'on veut trouver la plus grande ellipſe qu'on puiſſe inſcrire dans une parabole en ſuppoſant ſon premier axe de telle grandeur qu'on voudra, on fera le parametre de cet axe égal au parametre AP de la parabole (*Fig.* 174.), puis prenant l'abſciſſe AQ égale au grand axe, on décrira une ellipſe avec ce grand axe & le parametre AP, & cette ellipſe ſera inſcrite à la parabole & ſera la plus grande qu'on puiſſe lui inſcrire avec un tel axe.

Car menant la droite PQ & une ordonnée RT, on aura par la proprieté de l'ellipſe $\overline{RT}^2 = AR \times RO$, & par la proprieté de la parabole $RS = AR \times RF$ ; mais RF eſt plus grand que RO ; donc $AR \times RF$ eſt plus grand que $AR \times RO$ ; donc $\overline{RS}^2$ eſt plus grand que $\overline{RT}^2$, & par conſéquent RS plus grand que RT, & le point de l'ellipſe eſt dans la parabole ; & comme cela arrivera partout, l'ellipſe ſera toute entiere dans la parabole.

De plus cette ellipſe ſera la plus grande qu'on puiſſe inſcrire avec le grand axe AQ ; car ſi on augmente ſon parametre, en ſorte qu'il ſoit plus grand que le parametre AP de la parabole, on prouvera de même que nous avons fait pour le cercle, que l'ellipſe aura une partie hors de la parabole.

Il eſt viſible qu'on peut inſcrire dans la parabole une infinité de cercles qui iront toujours en diminuant, & qui ſeront toujours

moindres que le plus grand, de même qu'avec le grand axe on peut inscrire une infinité d'ellipses, puisqu'il n'y aura qu'à diminuer de plus en plus le parametre de la plus grande inscrite.

Si on veut trouver la plus grande parabole qu'on puisse inscrire dans une hyperbole, on menera du sommet de l'hyperbole la droite AP perpendiculaire au premier axe (*Fig.* 175.) & de l'autre extrêmité M de cet axe, on menera la droite indéfinie APR, & décrivant une parabole VAS avec le parametre AP, cette parabole sera la plus grande qu'on puisse inscrire dans l'hyperbole.

Car menant du point P une parallele à l'axe, & d'un point quelconque O une ordonnée, on aura par la proprieté de la parabole $\overline{OR}^2 = AO \times OX$, & par la proprieté de l'hyperbole $\overline{OI}^2 = AO \times OS$; mais OS est plus grand que OX; donc $AO \times OS$ plus grand que $AO \times OX$; donc $\overline{OI}^2$ plus grand que $\overline{OR}^2$, & OI plus grand que OR; ainsi le point R de la parabole sera dans l'hyperbole, & comme cela arrivera partout, la parabole sera toute entiere dans l'hyperbole.

De plus cette parabole sera la plus grande qu'on puisse inscrire dans l'hyperbole. Car si on donne à la parabole un parametre AN plus grand que AP (*Fig.* 176.), menant NQ parallele à l'axe, toutes les ordonnées à la parabole, lesquelles étant prolongées, iront aboutir entre N & le point R, où NQ coupe NR, seront plus grandes que les ordonnées correspondantes de l'hyperbole, ce qui est facile à démontrer par l'inspection seule de la figure.

Les figures 177, 178, &c. montrent comment on peut trouver d'autres sections qui soient les plus grandes qu'on puisse inscrire dans une section donnée, ce qui est trop facile pour m'y arrêter plus long-tems. On observera seulement par la figure 181, qu'on ne sçauroit inscrire une hyperbole dans une parabole.

On trouvera de la même façon quelles sont les sections de même espece qui peuvent être inscrites les unes dans les autres, & celles qui ayant même sommet, doivent se couper.

Il y auroit une infinité d'autres belles choses à dire touchant les sections coniques; mais je suis persuadé que ceux qui auront bien compris ce que j'en ai dit, seront en état de les découvrir par eux mêmes, sans avoir besoin de plus longs éclaircissemens.

# LA THEORIE ET LA PRATIQUE DU GEOMETRE.

## QUATRIE'ME PARTIE.

*Des proprietez des Corps & de leurs ſurfaces.*

### SECTION I.

*Des differentes poſitions des lignes à l'égard des Plans, & de celles des Plans entr'eux.*

DEFINITION I.

1. UNE ligne AB (*Fig.* 1.), eſt dite être ſur un plan CDEF, lorſque toutes ſes parties touchent ce plan.

2. *Si deux points A, G, d'une ligne droite touchent un plan, tous ſes autres points le touchent auſſi, & la ligne entiere eſt dans le plan.* Si entre les points A, G, on tire dans le plan la droite AG, cette droite touchera le

plan dans tous ſes points, à cauſe que le plan ne hauſſe ni ne baiſſe dans aucune de ſes parties, & elle ne differera point de la partie de la ligne qui touche le plan aux points A, G, & qui eſt compriſe entre ces points, parce que d'un point à un autre, on ne peut tirer qu'une ſeule ligne droite; d'où il ſuit que ſi on prolonge la ligne AG en B, le prolongement GB qui ſera encore tout entier ſur le plan par la même raiſon que ni l'un ni l'autre ne hauſſent ni ne baiſſent, ſera commun aux deux lignes; car autrement l'une des deux changeroit de direction, & ne ſeroit plus droite.

3. *Deux lignes droites AB, AC* (Fig. 2.), *qui ſe coupent en A, peuvent toujours être conſiderées comme étant dans un même plan.* Joignez leur extrêmitez par la droite BC, & concevez que BC ſe meuve toujours parallelement à elle-même ſur la droite CA, BC par ſon mouvement décrira une ſurface plane BCFE, puiſqu'elle ſe meut ſur une ligne dont les parties ne hauſſent ni ne baiſſent, & qu'étant toujours parallele à elle-même, elle ne hauſſe & ne baiſſe pas non plus. C'eſt pourquoi ſi dans ce plan vous joignez les points A, B, par une ligne droite, cette ligne ſera la même que la ligne AB, parce qu'on ne peut tirer qu'une ſeule droite entre deux points, & par conſéquent les deux AB, AC, ſeront dans le même plan.

Il eſt évident que ſi l'on prolonge les droites AB, AC, au-delà de A, leurs prolongemens ſeront encore dans le même plan.

4. Donc *tout triangle ABC peut être conſideré comme étant dans un même plan.*

## DEFINITION II.

5. Une ligne AB (*Fig.* 3.), eſt dite perpendiculaire ſur un plan CDEF, lorſqu'elle eſt également inclinée vers tous les côtez de ce plan.

6. *Si une ligne AB eſt perpendiculaire ſur deux lignes HI, RS, qui ſont dans un même plan, & qui ſe coupent en B, cette ligne eſt perpendiculaire ſur le plan.* Prenez ſur HI deux points H, I, également diſtans du point B, où tombe la perpendiculaire, & portez ſur RS, la diſtance BI, de B en R, & de B en S, la ligne AB étant perpendiculaire ſur HI, & ſon point B également diſtant de H & de I, ſon point A ſera auſſi également diſtant de H & de I, & par la même raiſon le point A ſera auſſi également des points R, S, de

la droite RS, sur laquelle la ligne AB est aussi perpendiculaire. Tirez la droite AI, & concevez que le triangle BAI se meuve autour de son côté BA qui demeure immobile, l'extrêmité I de sa base BI, décrira une circonference ISHR, qui passera par les trois points S, H, R, & cette circonference aura tous ses points également éloignés non-seulement du centre B, mais encore du point A, puisque la droite AI sera toujours la même partout; donc la droite AB n'inclinera pas plus vers un point de la circonference que vers un autre, & par conséquent elle sera perpendiculaire au cercle ISHR, & au plan ECDB dans lequel est ce cercle.

7. *D'un même point B* (Fig. 3.), *on ne peut élever sur un plan qu'une seule perpendiculaire BA.* Toute autre BP inclinera nécessairement plus d'un côté que d'un autre; donc, &c.

8. *Si deux ou plusieurs lignes AB, CD, EF* (Fig. 4.), *sont perpendiculaires sur un plan, elles sont paralleles entr'elles.* Joignez les points A, C, E, où les perpendiculaires touchent le plan par les droites AC, AE, CE; concevez que la perpendiculaire AB se meuve toujours parallelement à elle-même sur la ligne AC; quand elle arrivera en C, elle tombera nécessairement sur la droite CD; car autrement l'une des deux ne seroit pas perpendiculaire au plan; donc les deux AB, CD, sont paralleles: concevez encore que AB étant en C, continuë à se mouvoir toujours parallelement à elle-même sur la droite CE; quand elle arrivera en E, elle tombera encore sur EF par la même raison, & par conséquent les deux AB, EF, seront aussi paralleles. Donc les trois AB, CD, EF, le seront aussi.

Il suit de-là que si deux ou plusieurs lignes sont paralleles, & que l'une d'entr'elles soit perpendiculaire sur un plan, les autres seront aussi perpendiculaires sur le même plan; ce qui se démontre de la même façon.

9. *Si une ligne AB* (Fig. 4.), *perpendiculaire sur un plan GHIK, se meut toujours parallelement à elle-même sur une droite AC qui est dans le plan, elle formera un plan ABCD qui sera perpendiculaire sur le plan GHIK;* ce qui est évident puisque le plan ABCD n'est autre chose qu'une suite de lignes toutes perpendiculaires au plan GHIK.

10. *Si deux plans ABCD, EFGH, se coupent* (Fig. 5.), *ils se coupent en une ligne, & cette ligne est droite.* Le plan ABCD est la même chose que la suite infinie de ses Elemens AB, PO, PO,

&c. & le plan EFGH eſt auſſi la même choſe que la ſuite de ſes Elemens GE, SR, SR, &c. donc quand le plan ABCD coupe le plan EFGH, chaque Element de l'un ne coupe chaque Element de l'autre qu'en un ſeul point, puiſque ces Elemens ſont des lignes, & que les lignes ne ſe coupent qu'en un point; donc ces deux plans ſe coupent en une ſuite de points A, O, O, &c. & par conſéquent en une ligne; & comme ces points A, O, O, &c. en tant qu'ils appartiennent aux Elemens du plan ABCD, ne s'écartent ni à droite ni à gauche, c'eſt-à-dire ni vers EF, ni vers GH, & qu'en tant qu'ils appartiennent au plan EFGH, ils ne hauſſent ni ne baiſſent, il s'enſuit que tous ces points A, O, O, &c. ſont en ligne droite, & que par conſéquent les deux plans ſe coupent en une ligne droite.

## DEFINITION III.

11. La ligne droite AD commune à deux plans qui ſe coupent, s'appelle *commune ſection* des deux plans.

12. *Ayant deux plans ABCD, EFGH* (Fig. 5.), *qui ſe coupent en la ligne AD, ſi dans le plan ABCD on tire une droite PO perpendiculaire à la commune ſection AD, & dans le plan EFGH une droite SO perpendiculaire à la même commune ſection & au point O, & que les deux lignes PO, SO, ſe trouvent perpendiculaires entr'elles, le plan ABCD ſera perpendiculaire au plan EFGH.* Concevant que dans le plan ABCD ſoient tirées une infinité de lignes PO, Po, &c. paralleles à la droite PO, toutes ces lignes ſeront perpendiculaires au plan EFGH; car ſi elles ne l'étoient pas, elles inclineroient plus d'un côté que de l'autre, & par conſéquent elles ne ſeroient pas paralleles à PO; donc la ſomme de ces lignes, où le plan ABCD qui eſt la même choſe que cette ſomme, eſt perpendiculaire au plan EFGH.

13. *Si deux plans ABCD, EFGH* (Fig. 6.), *perpendiculaires à un même plan ILKM, ſe coupent entr'eux, leur commune ſection NO eſt perpendiculaire ſur le plan ILKM.* Cette ſection NO conſiderée comme appartenante au plan ABCD, n'incline pas plus du côté de E que du côté de H; donc elle eſt perpendiculaire ſur la droite EH, De même cette ſection conſiderée comme appartenante au plan EFGH, n'incline pas plus vers A que vers D; donc elle eſt perpendiculaire ſur AD: mais les deux lignes EH, AD ſont dans le plan ILKM, & ſe coupent; donc NO étant perpendiculaire ſur

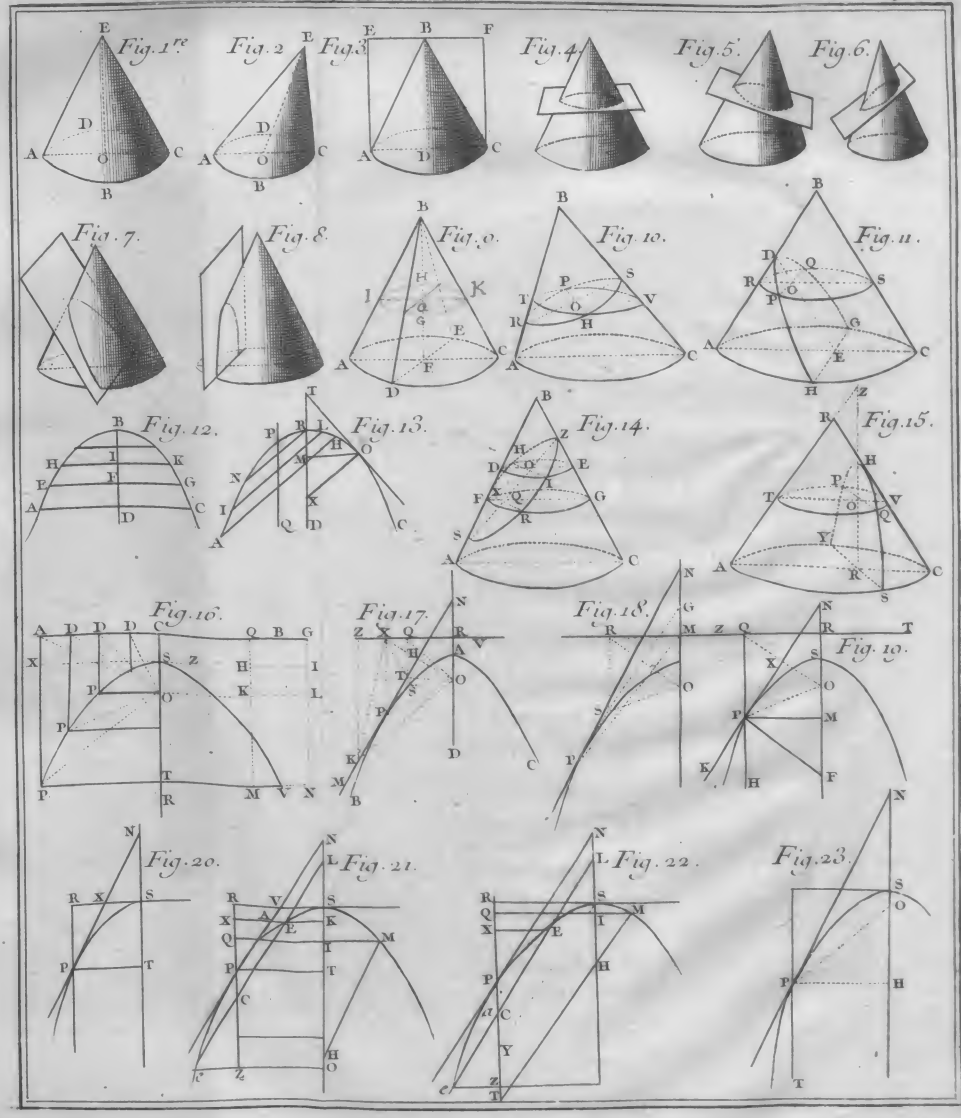


Fig. 1re
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.

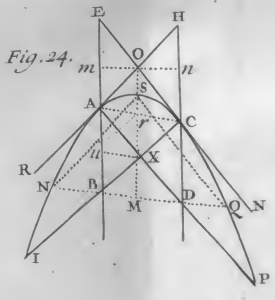



Fig. 24.

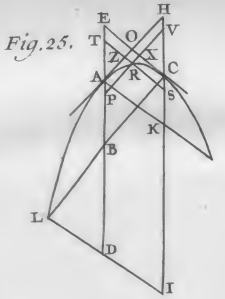



Fig. 25.

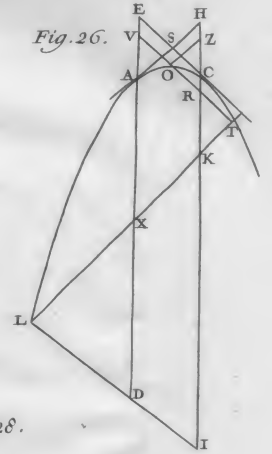



Fig. 26.

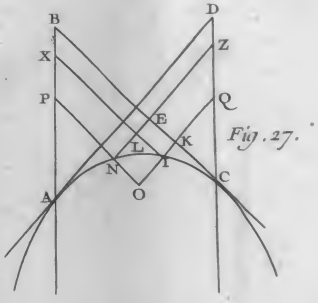



Fig. 27.

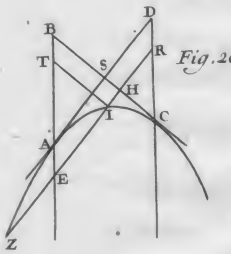



Fig. 28.

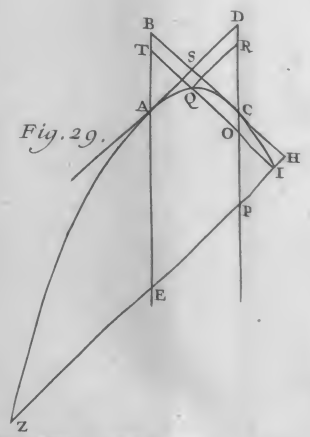



Fig. 29.

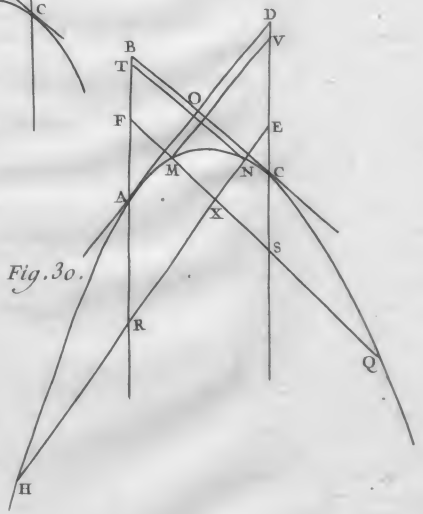



Fig. 30.

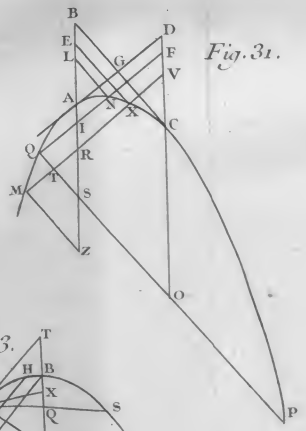



Fig. 31.

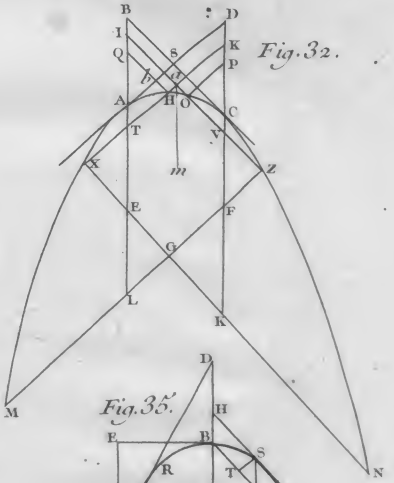



Fig. 32.

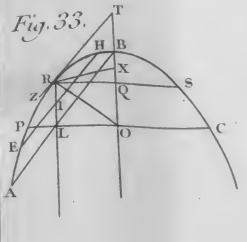



Fig. 33.

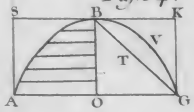



Fig. 34.

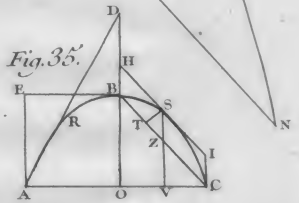



Fig. 35.

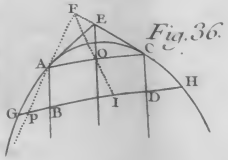



Fig. 36.

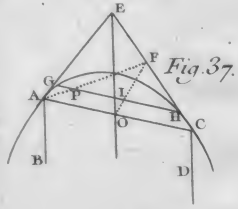



Fig. 37.

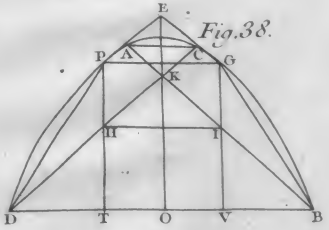



Fig. 38.

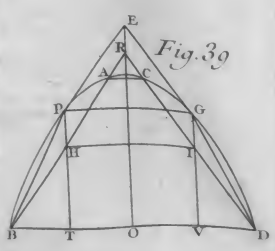



Fig. 39.

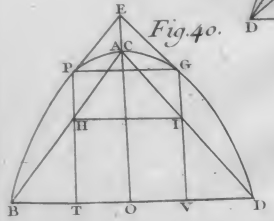



Fig. 40.

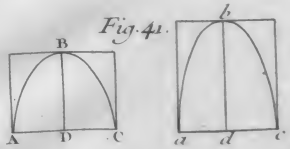



Fig. 41.

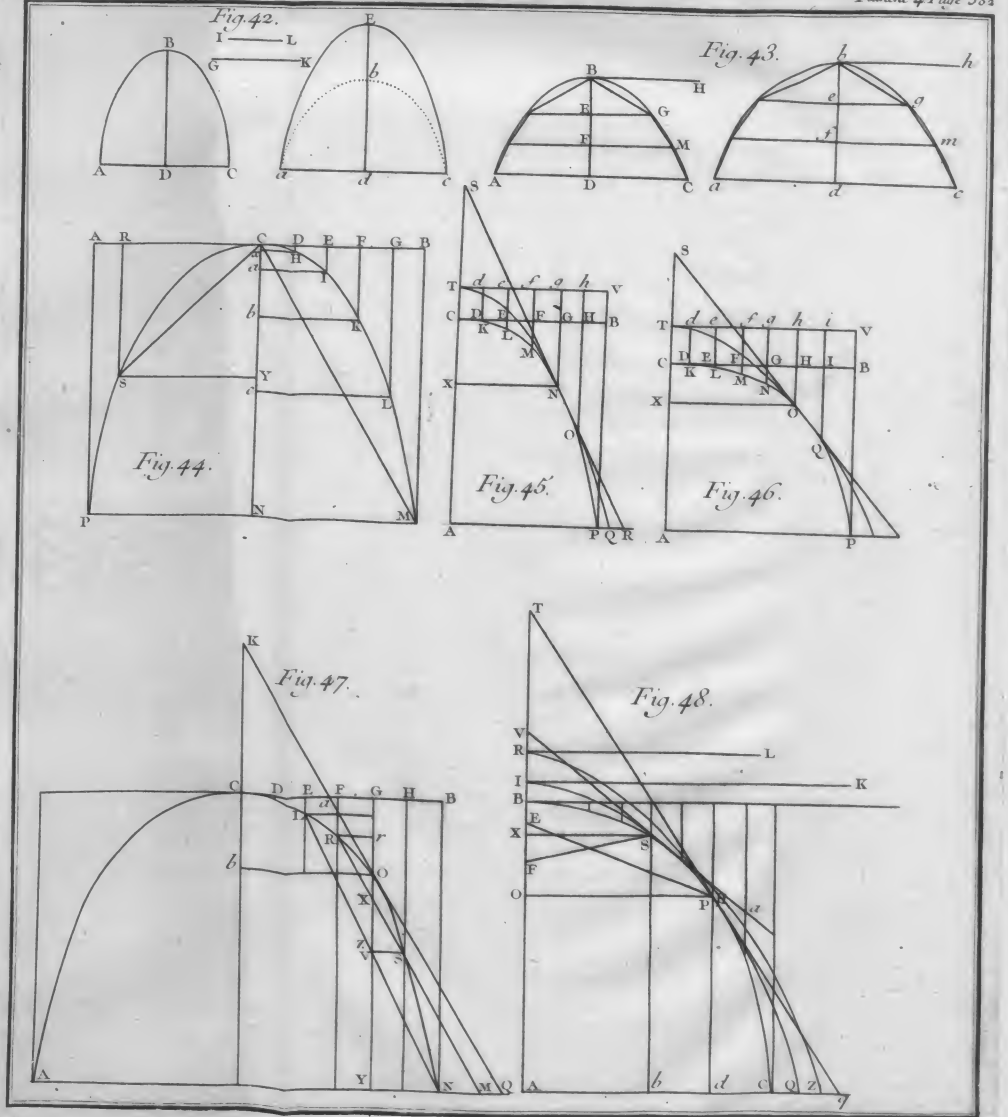


Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.

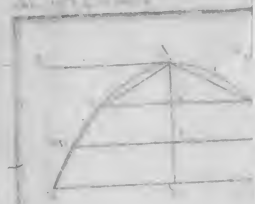


Fig. 49.

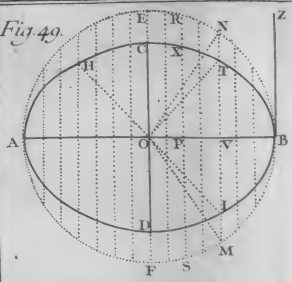



Fig. 50.

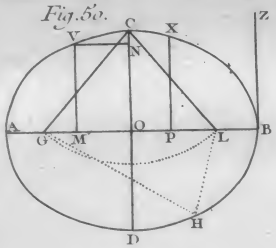



Fig. 51.

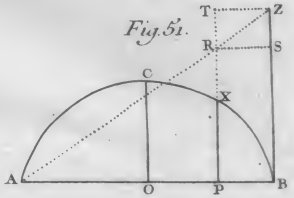



Fig. 52.

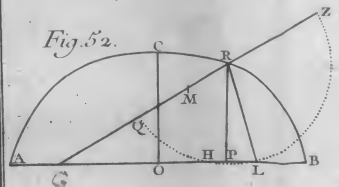



Fig. 53.

Fig. 54.

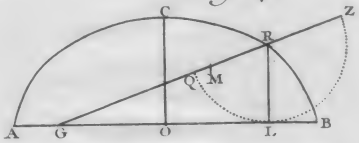



Fig. 55.

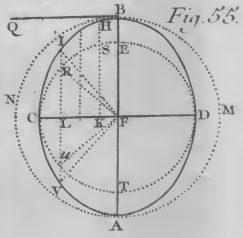



Fig. 56.

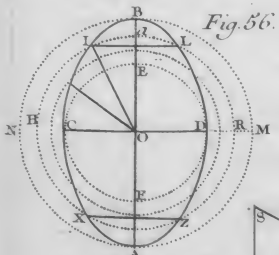



Fig. 57.

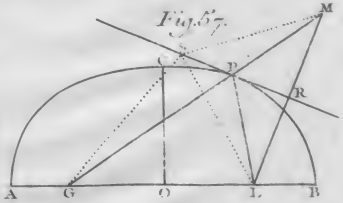



Fig. 58.

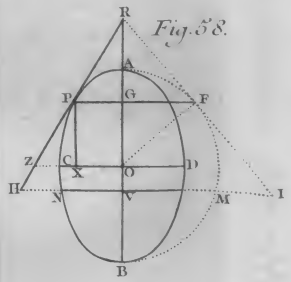



Fig. 59.

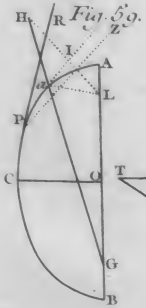
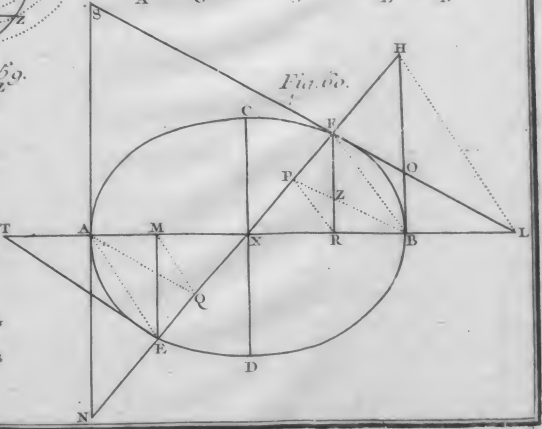



Fig. 60.



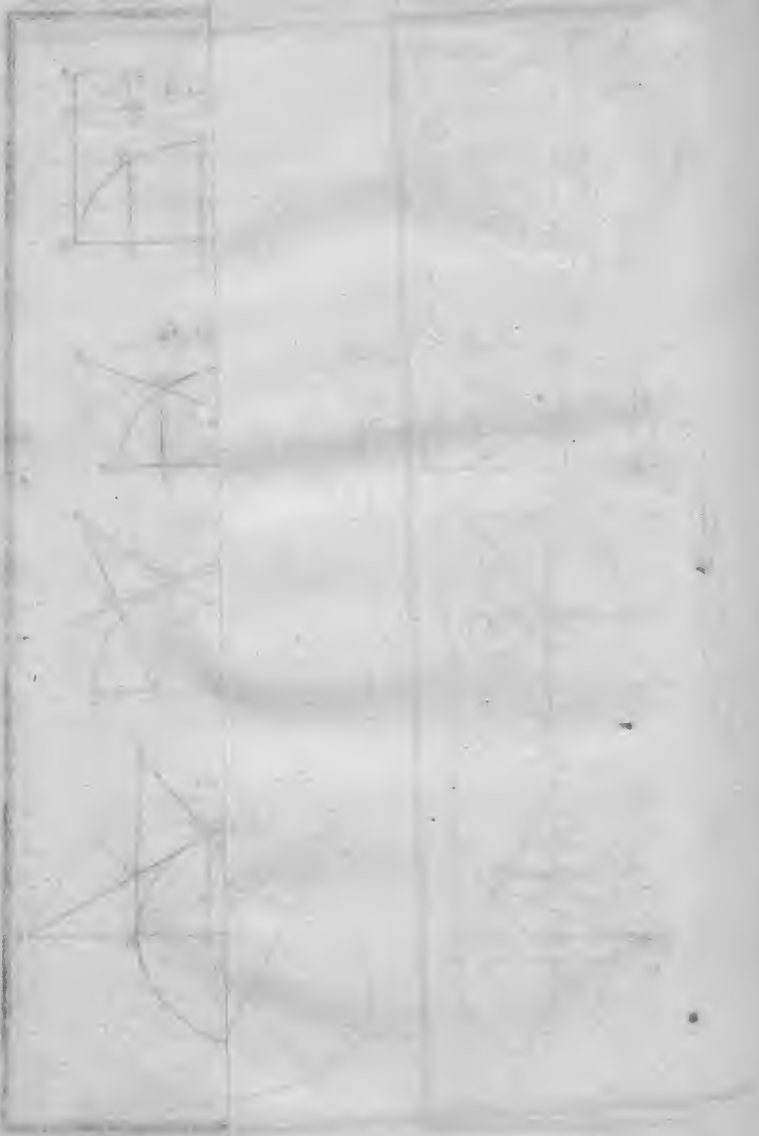


Fig. 61

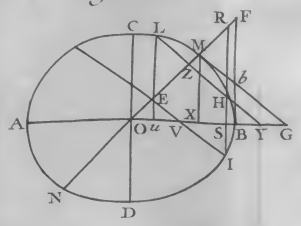



Fig. 62

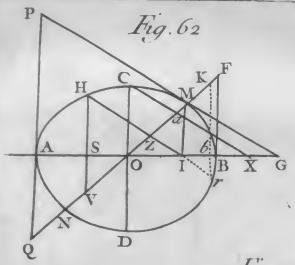



Fig. 63

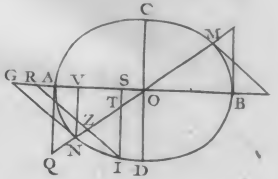



Fig. 64

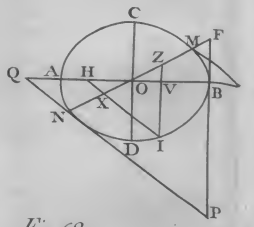



Fig. 65

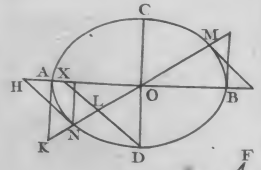



Fig. 66

Fig. 67

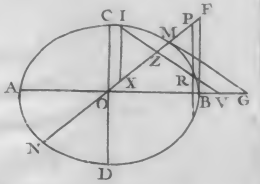



Fig. 68

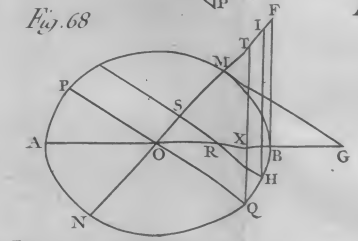



Fig. 69

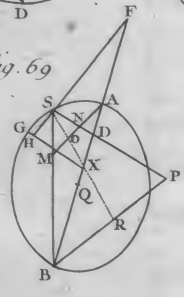



Fig. 70

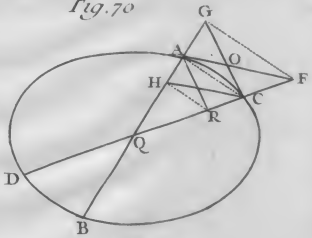



Fig. 71

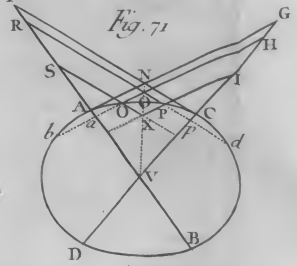



Fig. 72

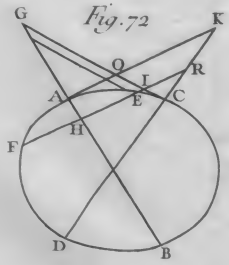
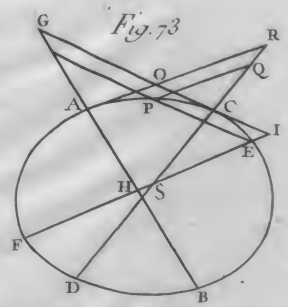



Fig. 73




23.

Gravé par Dubreuil.

Fig. 74.

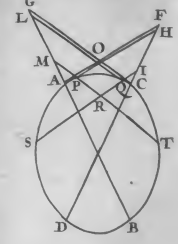



Fig. 75.

Fig. 76.

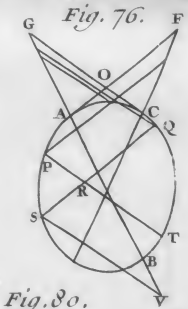



Fig. 77.

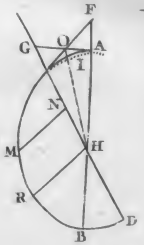



Fig. 78.

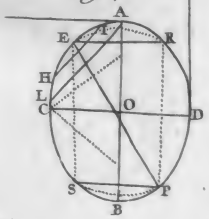



Fig. 79.

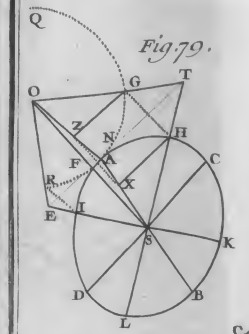



Fig. 80.

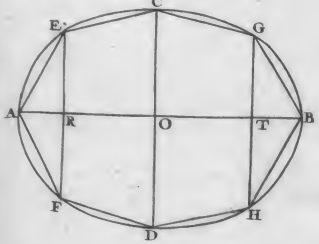



Fig. 81.

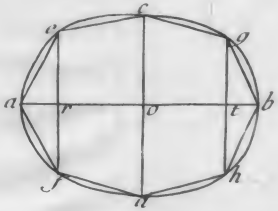



Fig. 82.

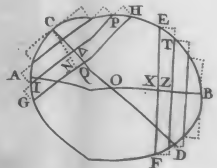



Fig. 83.

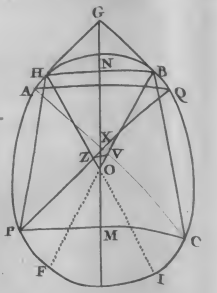



Fig. 84.

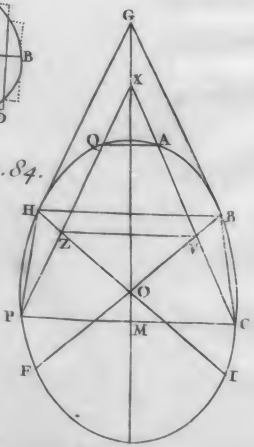



Fig. 85.

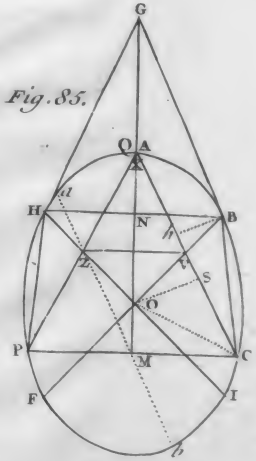


Fig. 86

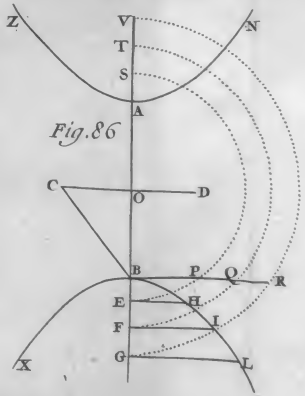



Fig. 87

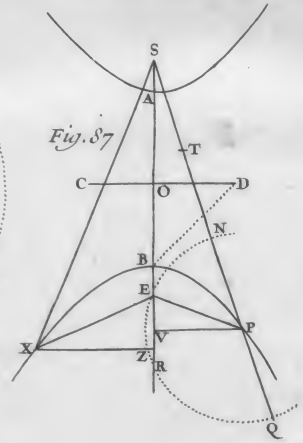



Fig. 88

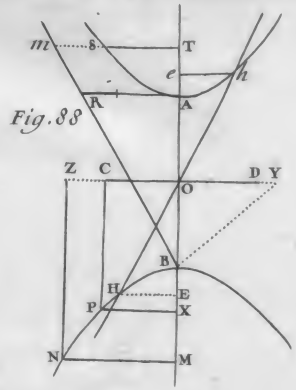



Fig. 89

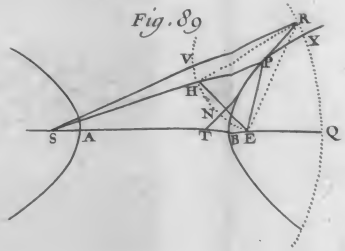



Fig. 90

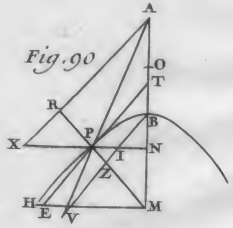



Fig. 91

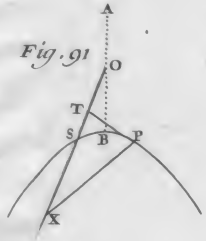



Fig. 92

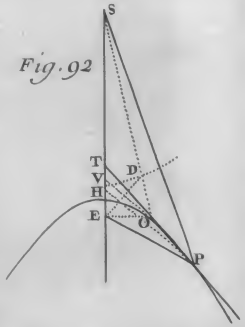



Fig. 93

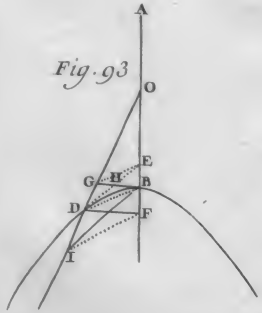



Fig. 94

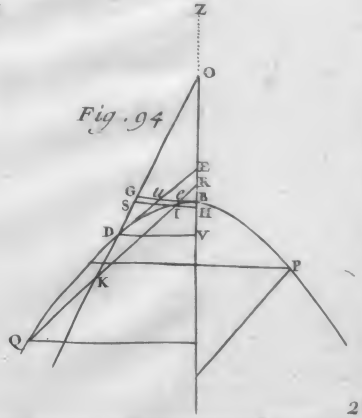


Fig. 95

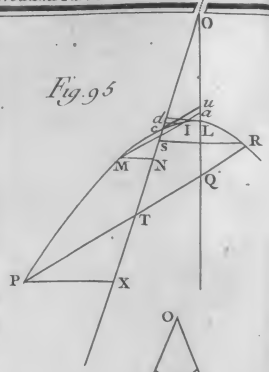



Fig. 96

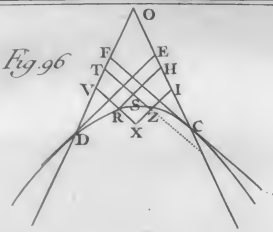



Fig. 97

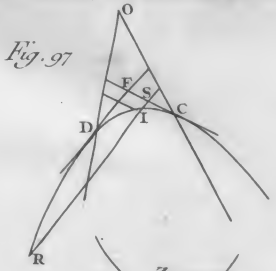



Fig. 98

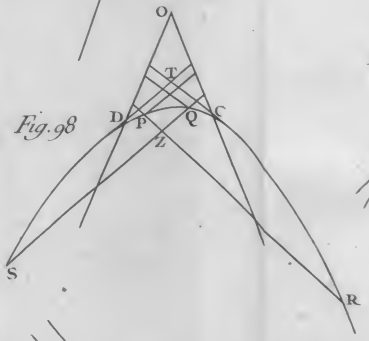



Fig. 99

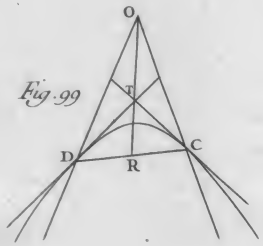



Fig. 100

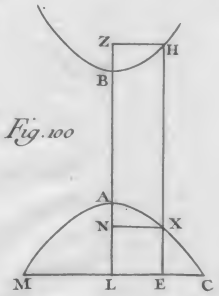



Fig. 101

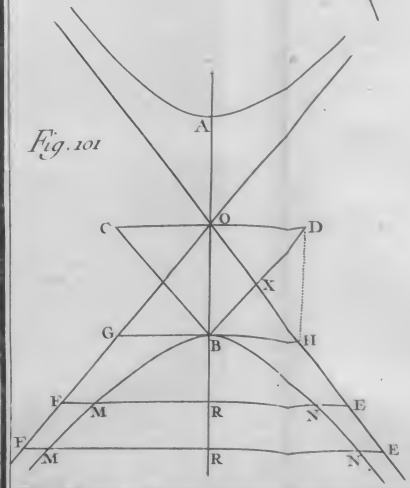



Fig. 102

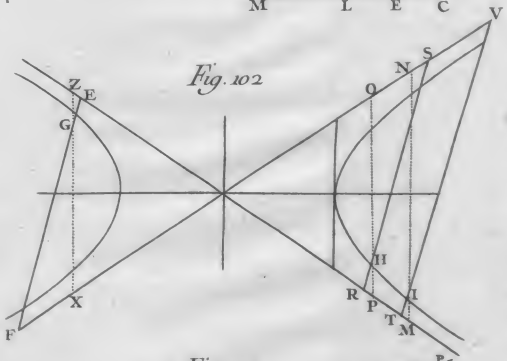
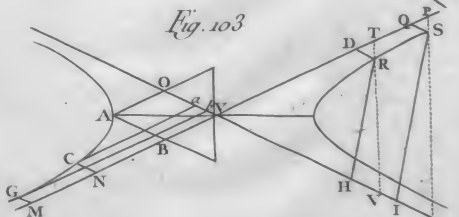



Fig. 103






Gravé par Wigbrylans

Fig. 104.

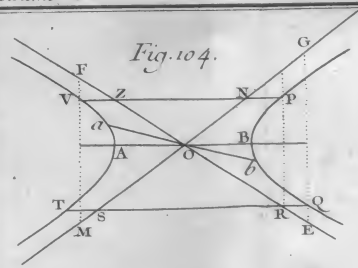



Fig. 105.

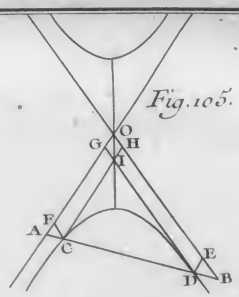



Fig. 106.

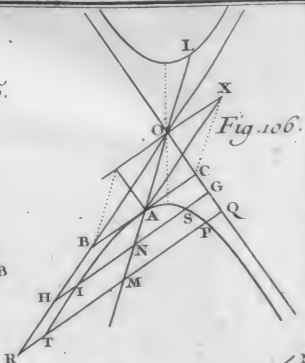



Fig. 107.

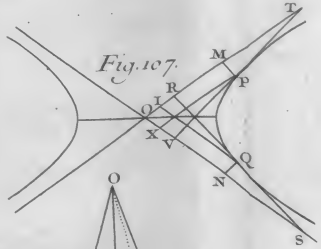



Fig. 108.

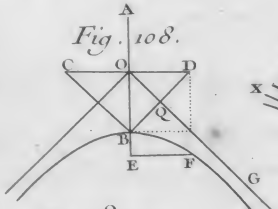



Fig. 109.

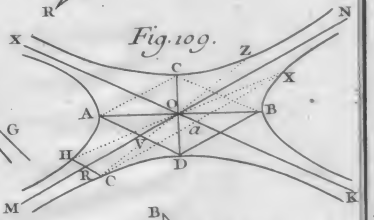



Fig. 110.

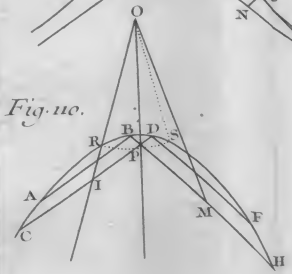



Fig. 111.

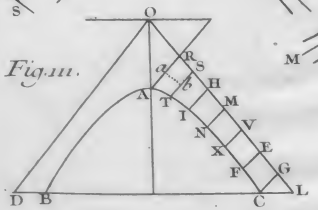



Fig. 112.

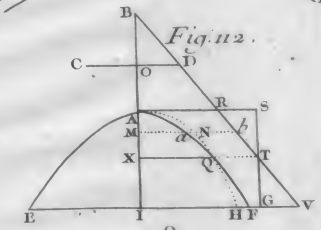



Fig. 113.

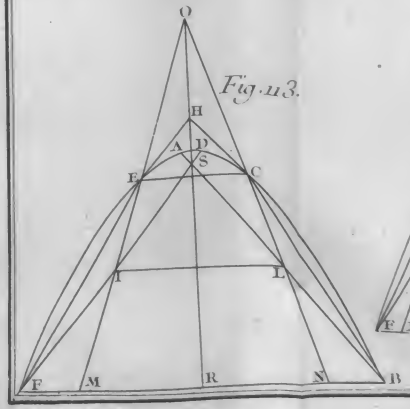



Fig. 114.

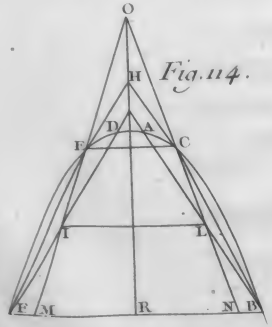
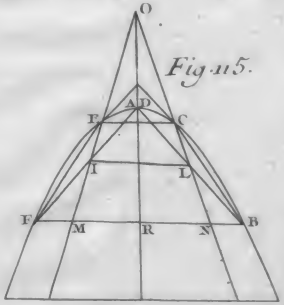



Fig. 115.



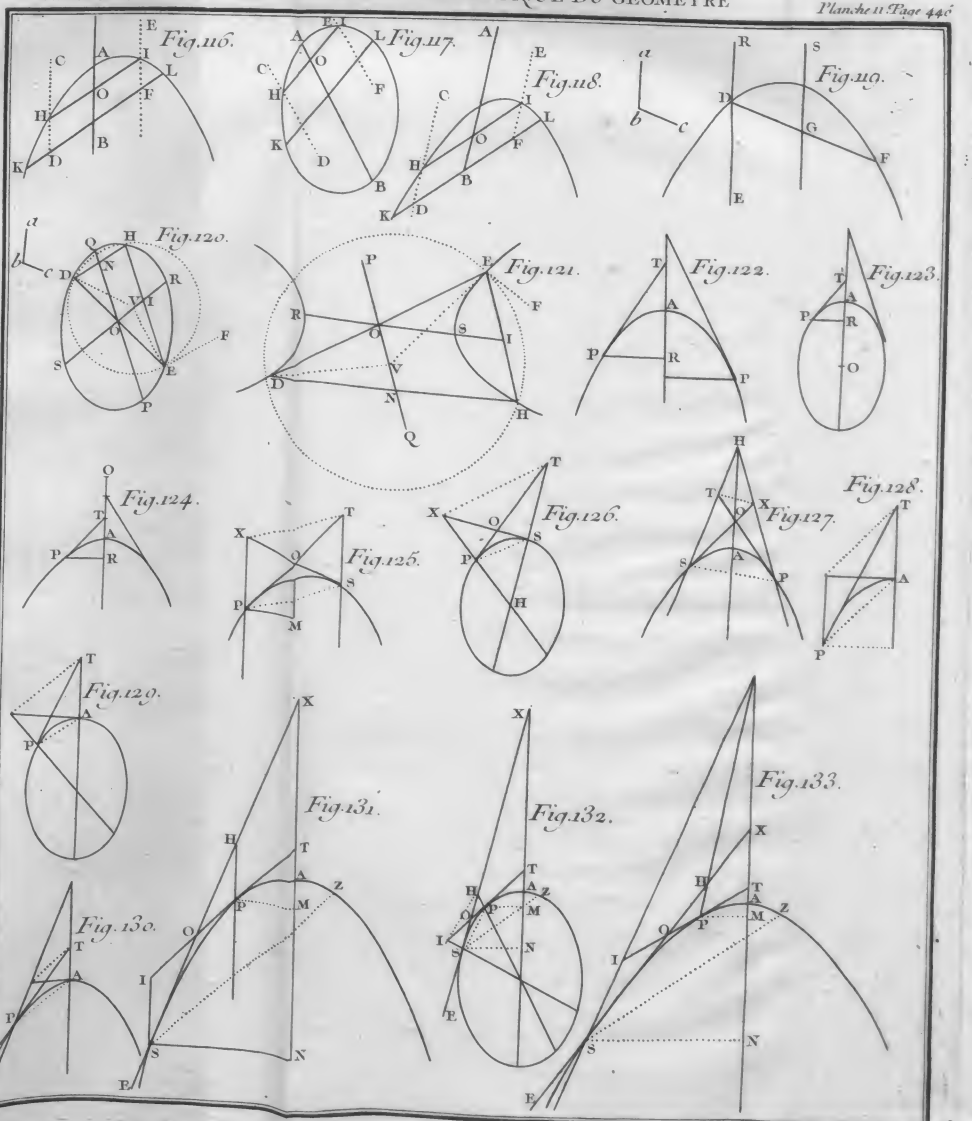


Fig.116.
Fig.117.
Fig.118.
Fig.119.
Fig.120.
Fig.121.
Fig.122.
Fig.123.
Fig.124.
Fig.125.
Fig.126.
Fig.127.
Fig.128.
Fig.129.
Fig.130.
Fig.131.
Fig.132.
Fig.133.

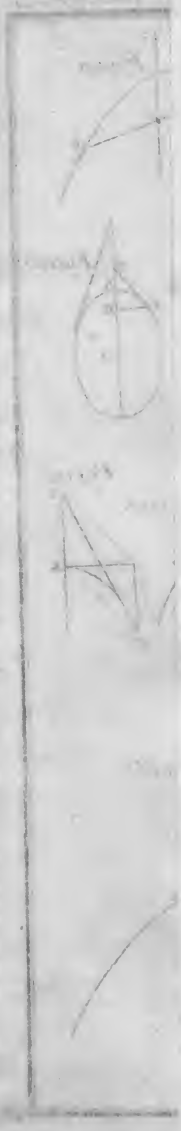


Fig.134.

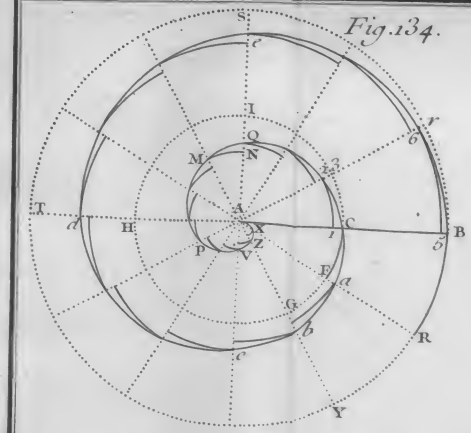



Fig.135.

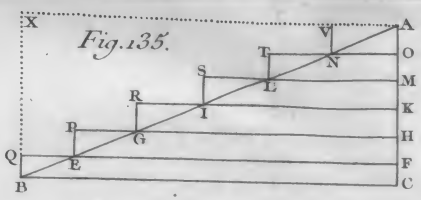



Fig.136.

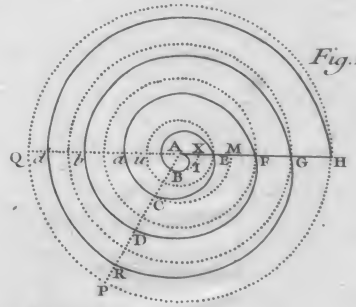



Fig.137.

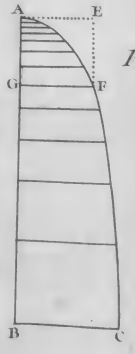



Fig.138.

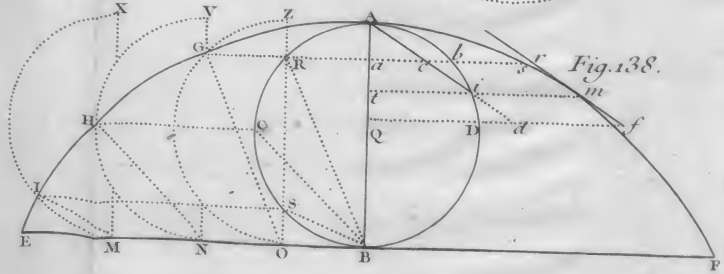



Fig.139.

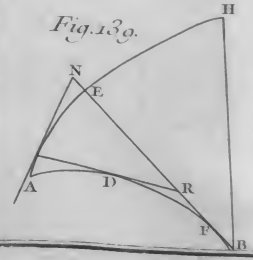



Fig.140.

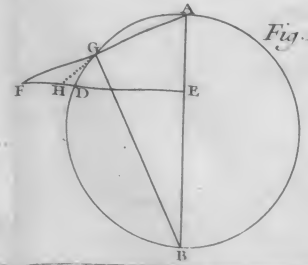
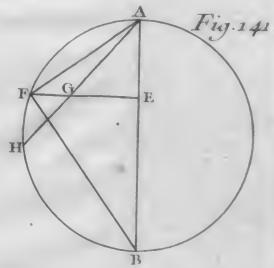



Fig.141.



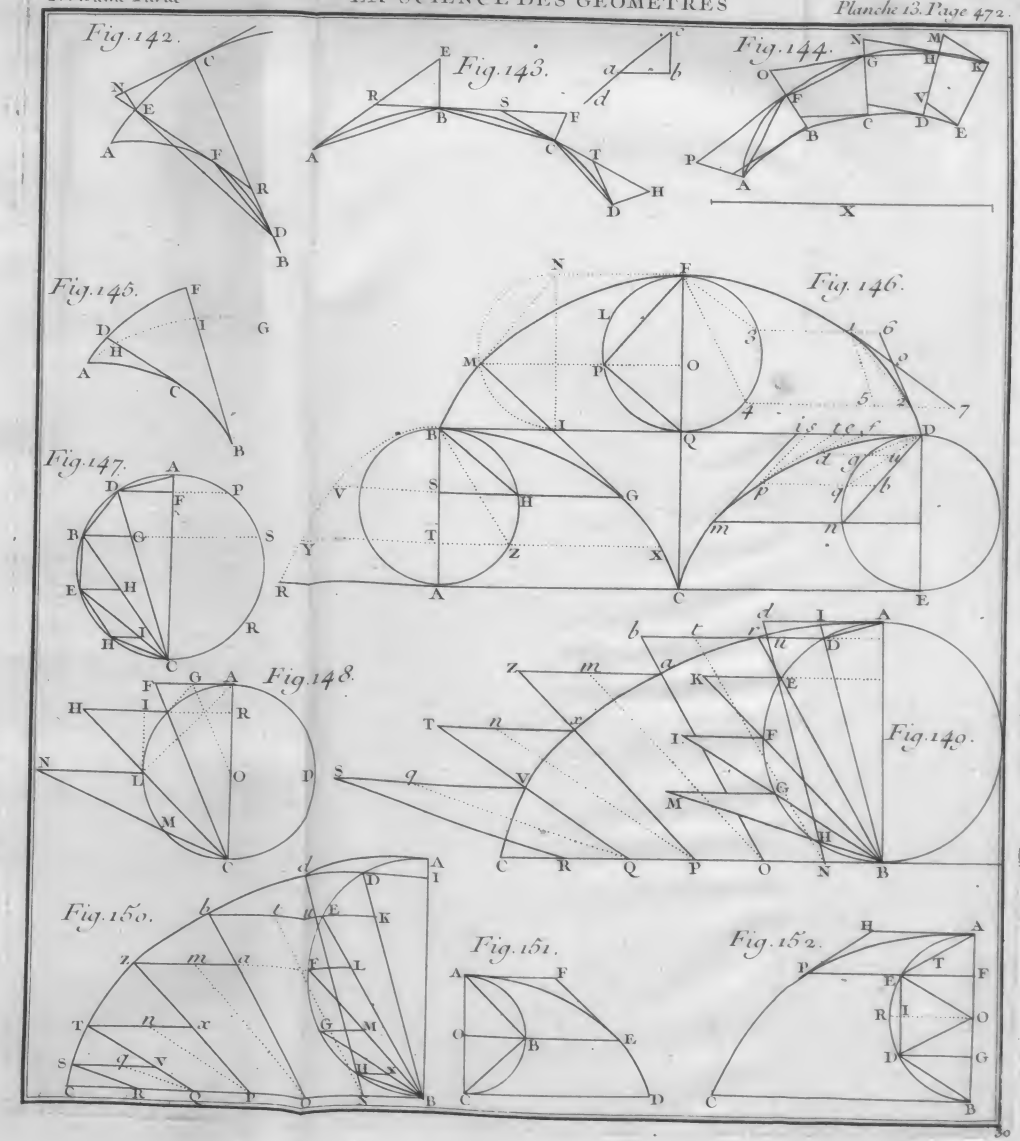


Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.

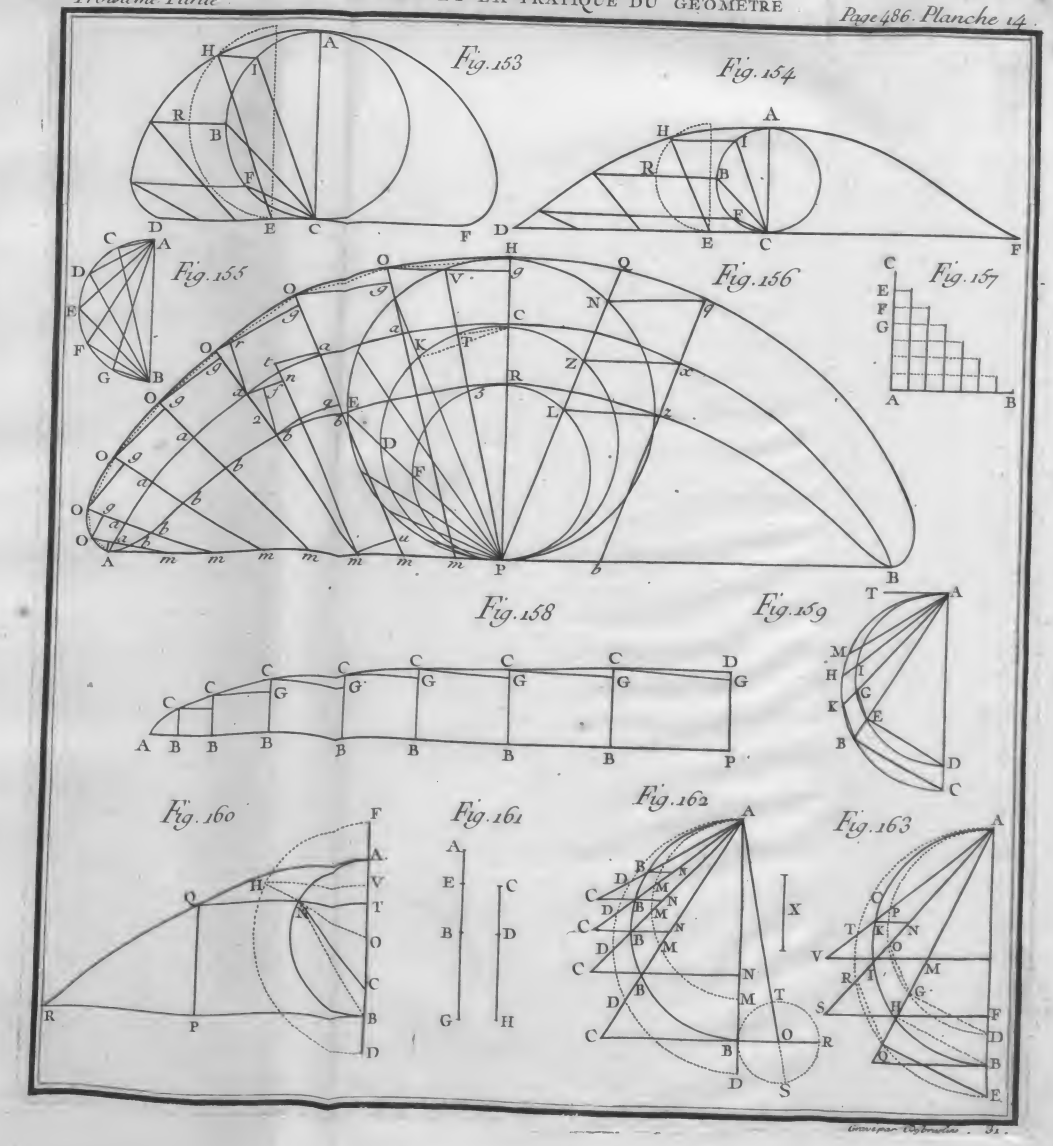


Fig. 153
Fig. 154
Fig. 155
Fig. 156
Fig. 157
Fig. 158
Fig. 159
Fig. 160
Fig. 161
Fig. 162
Fig. 163

Fig. 164.

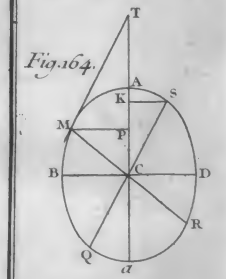



Fig. 165.

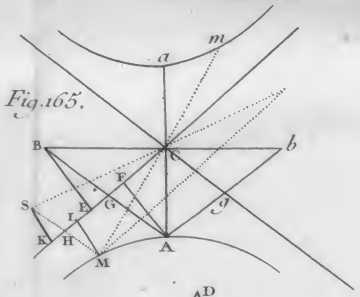



Fig. 166.

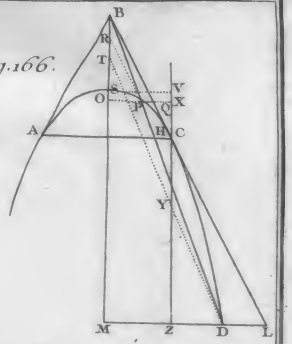



Fig. 167.

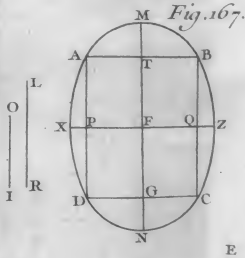



Fig. 168.

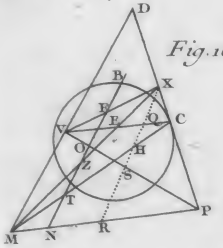


Fig. 169.

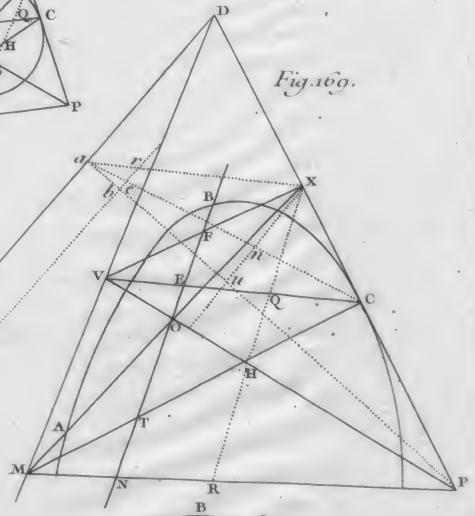



Fig. 170.

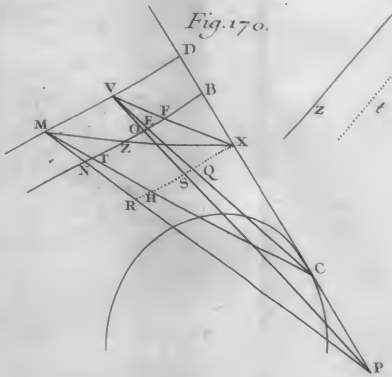



Fig. 171.

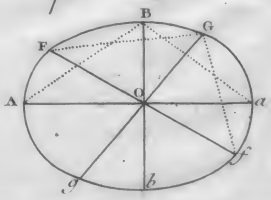


Fig. 172.

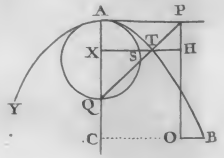



Fig. 173.

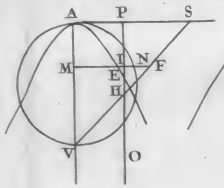



Fig. 174.

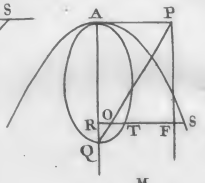



Fig. 175.

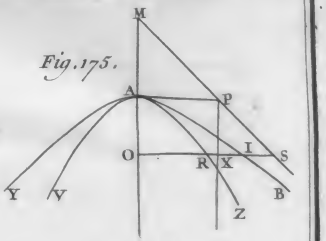



Fig. 176.

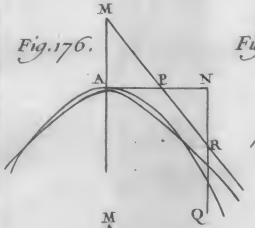



Fig. 177.

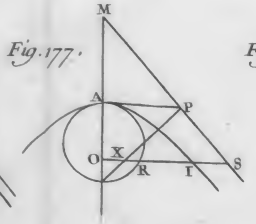



Fig. 178.

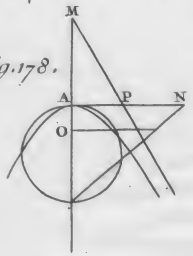



Fig. 179.

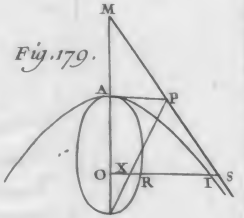



Fig. 180.

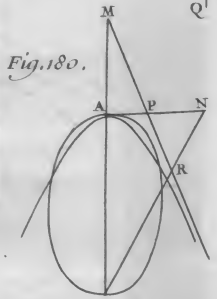



Fig. 181.

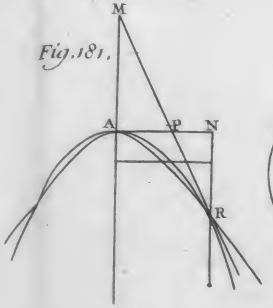



Fig. 182.

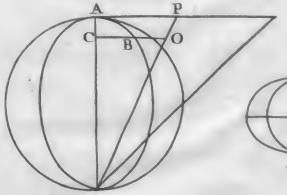



Fig. 183.

Fig. 184.

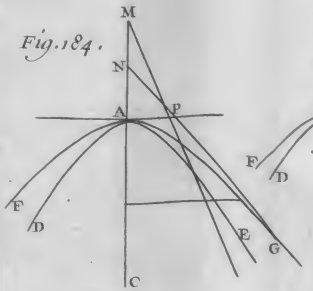



Fig. 185.

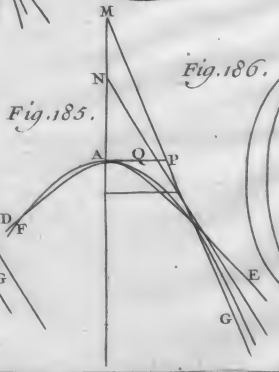
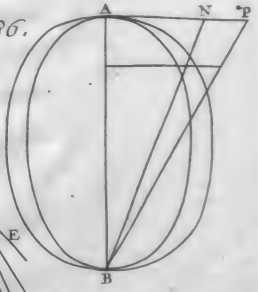
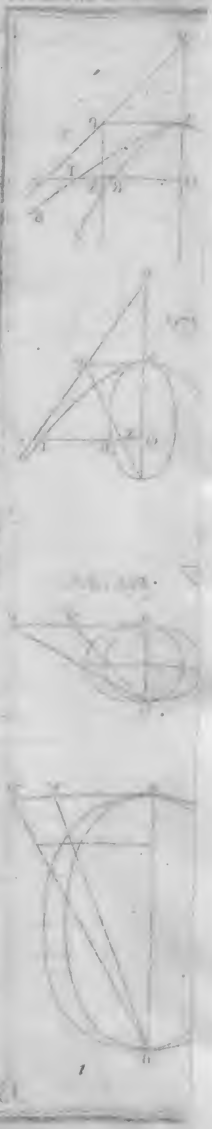



Fig. 186.





sur l'une & sur l'autre, est aussi perpendiculaire sur le plan ILKM. (*n.* 6.).

14. Si une ligne droite AB est inclinée sur un plan HILM (*Fig.* 7.), & qu'on veüille trouver l'angle aigu qu'elle fait avec ce plan, on tirera de l'un de ses points B une perpendiculaire BD sur le plan, ainsi que nous l'enseignerons bien-tôt; puis ayant tiré la ligne AD, on mesurera l'angle BAD dans le triangle BAD, & cet angle sera le même que celui que la ligne AB fait avec le plan; car concevant que du point A soit élevée une perpendiculaire AF, laquelle se meuve toujours parallelement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle soit parvenuë en D, où elle tombera sur DB, qui lui est parallele; cette ligne AF pendant son mouvement décrira un plan AFBD qui sera perpendiculaire au plan HILM (*n.* 9.) & le triangle ABD étant dans ce plan AFBD, sera aussi perpendiculaire au plan HILM. Donc son côté AB n'inclinera pas plus du côté de HI que du côté de LM, & par conséquent l'angle aigu que ce côté fait avec le plan, ne peut être que l'angle DAB.

## DEFINITION IV.

15. L'angle aigu qu'une ligne fait avec un plan, s'appelle l'*inclinaison* de cette ligne sur ce plan.

16. Si un plan ABCD (*Fig.* 8.), est incliné sur un plan EFGH, on connoîtra l'angle aigu qu'il fait avec ce plan en cette sorte. D'un point O pris sur la commune section AD, tirez dans le plan ABCD une droite OR perpendiculaire à AD, & du même point tirez dans le plan EFGH une droite OP, qui soit aussi perpendiculaire à AD, & l'angle ROP sera l'angle aigu fait par les deux plans; car si de tous les points de AD on conçoit qu'il soit tiré dans le plan ABCD une infinité de paralleles à OR, & dans le plan EFGH, une infinité de paralleles à OP, & que l'angle ROP se meuve toujours parallelement à lui-même le long de OD, ou de OA, la ligne OR pendant son mouvement tombera successivement sur toutes ses paralleles, & la ligne OP sur les siennes, de sorte que chaque parallele à OR, fera avec chaque parallele à OP un angle égal à l'angle ROP, & par conséquent cet angle sera l'angle fait par les deux plans.

## DEFINITION V.

17. Deux plans sont dits paralleles entr'eux, lorsqu'ils sont éga-

lement éloignés dans toutes leurs parties.

18. *Si trois lignes égales AB, CD, EF,* (Fig. 9.) *ſont perpendiculaires ſur un plan GIHL, & que les points A, C, E, où elles touchent ce plan, ne ſoient pas en ligne droite, le plan MNOP qui paſſe par leurs extrêmitez B, D, F, eſt parallele au plan GIHL.* Tirez les droites BD, BF, FD, qui ſeront dans le plan MNOP, parce que chacune d'elles a deux points dans ce plan; d'où il ſuit que tous les Elemens du triangle BDF ſeront auſſi dans ce plan auſſi bien que leur prolongement de part & d'autre vers MO & vers NP; or les trois lignes BD, BF, FD ſont paralleles au plan HGIL, puiſque tous leurs points en ſont également éloignés; donc tous les Elemens du triangle DDF ſont auſſi paralleles à ce plan de même que leurs prolongemens; donc auſſi le plan MNOP dans lequel ſont les Elemens du triangle & leurs prolongemens, eſt auſſi parallele au plan HGIL.

Et il ne faut pas dire que les parties du plan MNOP ſur leſquelles les Elemens du triangle ne tombent point non plus que leurs prolongemens, pourront peut-être n'être pas paralleles au plan GIHL. Car ſi l'on tire dans le triangle une ligne parallele au côté MO, & qu'on la prolonge de part & d'autre en R & en S, cette ligne ſera parallele au plan GIHL, & ſi elle ſe meut toujours parallelement à elle-même vers MO, puis vers NP, elle ſera toujours parallele au plan; mais le plan qu'elle décrira dans ce mouvement, ſera le même que le plan MNOP, puiſqu'ayant toujours une partie dans ce plan, elle y ſera toute entiere; donc le plan MNOP ſera parallele dans toutes ſes parties au plan GIHL.

19. *Toutes les perpendiculaires tirées entre deux plans paralleles, ſont égales.* Cela eſt évident, puiſque ces plans étant également éloignés, les perpendiculaires qui meſurent les diſtances de ces parties, doivent être égales.

20. *Si une ligne AB* (Fig. 9.), *eſt perpendiculaire entre deux plans GIHL, MNOP, les deux plans ſont paralleles.* Tirez dans l'un des plans des droites AC, AE, &c. & concevez que la ligne AB ſe meuve toujours parallelement à elle-même ſur celle de ces lignes que vous voudrez, ou tantôt ſur les unes, tantôt ſur les autres, il eſt viſible qu'elle ſera toujours perpendiculaire ſur l'un & l'autre plan; car autrement l'un des deux hauſſeroit ou baiſſeroit, & la ligne ne ſeroit pas perpendiculaire ſur tous les deux; donc les deux plans ſont paralleles.

21. *Si deux plans paralleles ABCD, EFGH* (Fig. 10.), *coupent*

*un troisiéme plan ILMN, leurs communes sections IL, MN avec ce plan, seront paralleles.* Les deux lignes IL, MN, sont dans le plan ILMN; ainsi si elles n'étoient pas paralleles, toutes les lignes paralleles qu'on tireroit de l'une à l'autre, ne seroient pas égales; donc ces lignes s'approcheroient d'un côté & s'éloigneroient d'un autre; donc les plans ABCD, EFGH à qui elles appartiennent, s'approcheroient aussi d'un côté & s'éloigneroient de l'autre; donc ils ne seroient point paralleles, ce qui est contre la supposition.

22. *Si deux lignes AB, AC* (Fig. 11.), *qui font un angle, sont coupées par deux plans paralleles GHIL, MNOP, elles sont coupées proportionnellement.* Tirez la droite ED par les deux points E, D, où le premier plan coupe les deux lignes, & la droite CB par les deux points où l'autre plan les coupe, ED, CB, seront paralleles, & les triangles ADE, ABC, seront dans un même plan: donc AB. AD :: AC. AE.

## PROBLEME I.

23. *D'un point A élevé sur un plan BCDE* (Fig. 12.), *abbaisser une perpendiculaire sur ce plan.*

Tirez une droite HI dans le plan; du point A abbaissez une perpendiculaire AR sur HI, & du point R élevez sur HI la perpendiculaire RO dans le plan, enfin du point A abbaissez sur RO la perpendiculaire AO, qui sera perpendiculaire au plan.

### DEMONSTRATION.

Tirez dans le plan la droite TOS parallele à HI, puisque HI est perpendiculaire sur les deux lignes AR, OR, elle est aussi perpendiculaire sur le plan AOR (*n.* 6.), & par conséquent TO parallele à HI, est aussi perpendiculaire sur AOR (*n.* 8.); donc AO est perpendiculaire sur TS, mais AO est aussi perpendiculaire sur OR par la construction; donc AO étant perpendiculaire sur les deux lignes TS, OR, est perpendiculaire sur leur plan BTCDE. (*n.* 6.).

## PROBLEME II.

24. *Par un point donné A sur un plan EFGH* (Fig. 13.), *élever une perpendiculaire sur ce plan.*

Prenez à discretion un point D hors du plan par lequel vous abaisserez une perpendiculaire DC par le Probleme précedent,

enſuite du point A tirez une parallele AB à la droite DC, & la ligne AB ſera la perpendiculaire demandée; car ſi vous concevez que la ligne DC ſe meuve toujours parallelement à elle-même le long de la ligne CA, elle tombera ſur AB, & par conſéquent AB ſera perpendiculaire au plan, de même que DC.

## DEFINITION VI.

25. Si trois ou pluſieurs angles plans ABC, ABD, DBC (*Fig.* 14.), qui ne ſont pas dans un même plan, ont leur ſommet à un même point B, & que leurs côtez s'ajuſtent enſemble, ils forment un angle en B, qu'on appelle *angle ſolide.*

26. *Deux angles plans ABC, ABD, ne peuvent pas compoſer un angle ſolide.* Si les deux côtez AB, BD, de l'angle ABD, s'ajuſtoient avec les deux côtez AB, BC, de l'angle ABC, les deux angles tomberoient entierement l'un ſur l'autre, & ne formeroient qu'un ſeul & unique plan.

27. *Si un angle ſolide eſt compoſé de trois angles plans ABC, ABD, DBC* (Fig. 14.), *la ſomme de deux de ces angles ſera toujours plus grande que le troiſiéme.* Du plus grand angle ABC retranchez un angle ABE égal à l'angle ABD, & faiſant BE égal à BD, tirez les droites AEC, AD, DC, les triangles ABE, ABD, ſeront égaux, à cauſe des deux côtez AB, BE, égaux aux deux côtez AB, BD, chacun à chacun, & de l'angle compris ABE égal à l'angle compris ABD; ainſi AE ſera égal à AD. Or dans le triangle ACD les deux côtez AD, DC, pris enſemble ſont plus grands que le troiſiéme AC; ôtant donc d'une part le côté AD, & de l'autre la droite AE égale à AD, le côté CD eſt plus grand que la droite CE; & par conſéquent l'angle DBC eſt plus grand que l'angle EBC, à cauſe que les deux côtez CB, BD, ſont égaux aux deux côtez CB, EB, chacun à chacun, & que le troiſiéme CD eſt plus grand que CE. Donc ſi on ajoûte l'angle DBC à l'angle ABD, & l'angle CBE à l'angle ABE égal à ABD, les deux enſemble ABD, DBC, ſeront plus grands que les deux enſemble ABE, EBC, ou que l'angle ABC.

28. *Les angles ABC, ABD, DBC, qui forment un angle ſolide, valent enſemble moins que quatre angles droits.* Tirez les baſes AC, AD, CD, qui formeront trois angles ſolides A, C, D; or dans l'angle ſolide A, les deux angles plans BAD, BAC, ſont enſemble plus grands que l'angle DAC; de même dans l'angle ſolide D, les deux angles BDA, BDC, ſont plus grands que l'angle

ADC; enfin dans l'angle solide C, les deux angles BCD, BCA, sont plus grands que l'angle DCA. Mais les trois angles DAC, ACD, CDA, du triangle ADC, valent ensemble deux droits; donc les six BAD, BAC, BDA, BDC, BCD, BCA, valent ensemble plus de deux droits: or si on ajoûte à ces six les trois ABD, ABC, DBC, leur somme vaudra six angles droits, parce que cette somme est la même des angles des trois triangles ABD, ABC, DBC, & que dans chaque triangle la somme des trois angles vaut deux angles droits; donc puisque les six en valent plus de deux, les trois ajoûtés, c'est-à-dire les trois angles ABD, ABC, DBC, qui forment l'angle solide, vaudront moins de quatre angles droits; & on démontreroit la même chose si l'angle solide étoit composé de plus de trois angles plans.

### PROBLEME III.

29. *Trois angles plans étant donnés, lesquels pris deux à deux, sont plus grands que le troisième; construire avec ces trois angles un angle solide* (Fig. 15.).

Coupez les côtez des trois angles, en sorte que ces côtez soient égaux entr'eux, & ayant tiré leurs bases, construisez avec ces trois bases un triangle ABC, autour duquel vous circonscrirez un cercle ABC. Du centre H du cercle élevez une perpendiculaire HR de telle grandeur que son quarré joint au quarré du rayon AH, soit égal au quarré de l'un des côtez égaux des angles donnés, & tirez les droites AR, CR, BR, qui formeront un angle solide composé des trois angles donnés, car il est évident que les trois triangles ARC ARB, CRB, seront égaux chacun à chacun, aux trois triangles que vous aurez fait en donnant des bases aux angles, à cause que le quarré de chaque côté de ces triangles est égal au quarré de HR, plus le quarré de AH, de même que chaque côté des triangles ARC, ARB, CRB, & que les bases sont aussi égales chacune à chacune.

## SECTION II.

### *De la Stereometrie ou Mesure des Corps.*

### DEFINITION VI.

30. On appelle *cube* un solide ABCDEFGH (*Fig.* 16.), com-

pris sous six faces, dont tous les côtez sont égaux entr'eux, & tous les angles sont droits. Le plan AGHD sur lequel on conçoit qu'il s'appuye, se nomme *base*, & la droite AB perpendiculaire entre ce plan, & celui qui lui est opposé, se nomme *hauteur*.

## DEFINITION VII.

31. Le *parallelepipede* est un solide ABCDEFGH (*Fig.* 17.), compris sous six parallelogrames, dont les opposés sont paralleles & égaux entr'eux. On le nomme *parallelepipede rectangle* quand tous les angles de ses parallelogrames sont droits, & *parallelepipede incliné*, quand les parallelogrames qui sont autour de sa base AGHD, font des angles aigus avec elle (*Fig.* 18.).

## DEFINITION VIII.

32. La pyramide est un solide ABCDE compris sous une base ABCD (*Fig.* 19.), de tel nombre de côtez qu'on veut, & sous autant de faces triangulaires que la base a de côtez, lesquelles ont toutes leur sommet en un même point E. La droite tirée du centre O de la base au sommet, s'appelle *axe* de la pyramide, lequel ne differe point de la hauteur, lorsqu'il est perpendiculaire sur la base; mais quand il est incliné, alors la pyramide s'appelle *inclinée*, & sa hauteur doit se prendre par une perpendiculaire EH (*Fig.* 20.) tirée du sommet sur sa base prolongée en cas de besoin.

## DEFINITION IX.

33. Le *cone droit* est une pyramide dont la base est un cercle (*Fig.* 21.), & dont l'axe est perpendiculaire sur la base, & le cone *incliné* est celui dont l'axe fait un angle aigu avec la base (*Fig.* 22.).

## DEFINITION X.

34. Le *prisme* est un solide composé de plusieurs faces, deux desquelles, à sçavoir la base ABC (*Fig.* 23.), & la face DEF qui lui est opposée, sont semblables & égales, & les autres sont des parallelogrames. On l'appelle *prisme triangulaire*, quand la base est un triangle, & quand la base est un cercle, il se nomme cylindre (*Fig.* 28.), & alors les parallelogrames se changent en une surface courbe.

## DEFINITION XI.

35. La *Sphere* est un solide ABCDE (*Fig.* 24.), compris sous une surface courbe, dont toutes les parties sont également éloignées du centre O du solide.

Si l'on conçoit qu'un demi-cercle BAD tourne autour de son diametre BD, il décrira dans son mouvement une Sphere, dont la partie compriſe entre le cercle que décrit la demi-corde AE & le point B, s'appelle *ſégment de Sphere*, & la partie AOCB décrite par le rayon OA, s'appelle ſecteur de Sphere; enfin le diametre BD ſe nomme axe.

## PROBLEME IV.

36. *Meſurer un cube ABCDEFG* (Fig. 16.).

Multipliez le côté AD de ſa baſe par l'autre côté AG, & le produit ſera la baſe AGHD; multipliez enſuite cette baſe par la hauteur AB, & le produit ſera la valeur du cube.

## DEMONSTRATION.

Concevez que par tous les points de la hauteur AB, il paſſe des plans paralleles, ſemblables & égaux à la baſe, leſquels tombent les uns ſur les autres, la ſomme de ces plans ſera le cube même. Or la ſomme de ces plans eſt égale à la baſe multipliée par le nombre des termes qui eſt ici AB; donc le cube eſt égal à la baſe AGHD, multipliée par la hauteur AB.

## AUTRE DEMONSTRATION.

Suppoſons que le côté du cube propoſé (*Fig.* 25.) ait une toiſe de longueur; diviſez la longueur & la largeur de la baſe, ou de la face oppoſée AEFD, chacune en ſix parties égales, parce qu'une toiſe contient ſix pieds, & par les points de diviſion élevez des perpendiculaires juſqu'aux côtez oppoſés, la face AEFD ſera diviſée en 36 pieds quarrez tous égaux entr'eux; & ſi de tous les angles de ces quarrez vous abbaiſſez des perpendiculaires ſur la baſe, le cube ſera diviſé en 36 parallelepipedes, dont la baſe & le côté oppoſé vaudront chacune un pied quarré, & les parallelogrames des côtez auront chacun un pied de baſe, & une toiſe de hauteur. C'eſt pourquoi diviſant la hauteur AB en ſix parties égales, & faiſant paſſer par les points de diviſion des plans paralleles à la baſe du cube, ces plans couperont chaque paral-

lelepipede en six parties égales, qui auront chacune un pied quarré de base, & un pied de hauteur, & qui par conséquent seront autant de petits cubes; donc la somme sera égale au cube total; il y aura donc six fois 36 ou 216 petits cubes. Or 36 est le produit de 6, par six, c'est-à-dire d'un côté de la base par l'autre, & six foix 36 ou 216, est le produit de 36, ou de la base par la hauteur 6 du cube. Donc, &c.

## PROBLEME V.

37. *Mesurer un parallelepipede* (Fig 17. 18.).

Si le parallelepipede est rectangle, multipliez les côtez AD, AG de la base l'un par l'autre, & ensuite multipliez leur produit par la hauteur AB.

Mais si les côtez AD, AG, de la base, ne sont pas perpendiculaires entr'eux, tirez une perpendiculaire OG entre les côtez paralleles AD, GH, de la base, & multipliez AD par OG, ce qui vous donnera la valeur de la base, laquelle étant multipliée par la hauteur AB, vous donnera celle du parallelepipede.

Enfin si le parallelepipede est incliné (*Fig.* 18.), cherchez d'abord la valeur de la base, puis tirez une perpendiculaire CO entre la base & la face qui lui est opposée, & multipliant la base par cette perpendiculaire, le produit sera la valeur du parallelepipede; car si l'on conçoit que par tous les points de la perpendiculaire CO, il passe des plans paralleles, semblables & égaux à la base, la somme de ces plans sera égal au parallelepipede. Or la somme de ces plans est la même chose que le premier plan, ou la base multipliée par le nombre des termes, ou par la perpendiculaire CO; donc, &c.

## COROLLAIRE I.

38. Il suit de-là que les *trois dimensions des corps doivent être perpendiculaires les unes sur les autres.* Ainsi supposant que dans le parallelepipepe incliné les côtez de la base ne soient pas perpendiculaires entr'eux (*Fig.* 18.), si l'on prend AD pour la largeur du parallelepipede, il faut prendre la perpendiculaire HR pour la longueur, & la perpendiculaire CO pour la hauteur.

## COROLLAIRE II.

39. Les parallelepipedes étant le produit de leurs bases par leurs hauteurs, il s'ensuit que *ceux qui ont les bases égales & les hauteurs*

*leurs inégales, sont entr'eux comme leurs hauteurs, & que ceux qui ont les hauteurs égales & les bases inégales, sont entr'eux comme leurs bases.*

## COROLLAIRE III.

40. Les prismes & les cylindres droits ou inclinés se mesureront de la même façon que les parallelepipedes.

## PROBLEME VI.

41. *Mesurer une pyramide ABCDO* (Fig. 26.).

Cherchez la valeur de sa base, & multipliez-la par le tiers de la hauteur OR, ce qui vous donnera la valeur de la pyramide.

## DEMONSTRATION.

Concevez que par tous les points de la hauteur OR, il passe des plans paralleles à la base, les sections que ces plans formeront avec la pyramide, seront des surfaces semblables à la base. Car comparant, par exemple, la section EFGH avec la base, on aura, à cause des triangles semblables OEH, OAD, EH. AD :: OH. OD, & à cause des triangles OHG, ODC, HG. DC :: OH. OD; donc EH. AD :: HG. DC, & on prouvera de même que les autres côtez GF, FE, sont proportionnels aux deux CB, BA; & quant aux angles, les droites EH, HG, étant paralleles aux deux AB, BC, il est visible que si l'angle EHG se meut parallelement à lui-même le long de HD, il tombera sur l'angle ADC, & lui sera égal, & ainsi des autres. Or toutes les sections faites par les plans qui passent par les points de la perpendiculaire OR étant semblables, elles seront entr'elles comme les quarrez de leurs côtez homologues EH, AD, ou comme les quarrez des abscisses OX, OR; car EH. AD :: OH. OD. & OH. OD :: OX. OR à cause des triangles semblables ORD. OHX. & par conséquent EH. AD :: OX. OR. mais les abscisses sont entr'elles comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3. 4. &c. à l'infini; donc les sections sont entr'elles comme les quarrez de ces nombres, & par conséquent la somme des sections est à la plus grande ou à la base ABCD, multipliée par le nombre des termes OR, comme 1. à 3. ainsi qu'il a été enseigné ci-dessus en parlant de l'Arithmetique des infinis (*Partie 2. n.* 240.); mais la somme

des sections est la même chose que la pyramide; donc la pyramide est à la base multiplipliée par OR, comme 1. à 3. & par conséquent elle est le tiers du produit.

### COROLLAIRE I.

42. On mesurera de la même façon les pyramides inclinées en observant de prendre pour la hauteur la perpendiculaire tirée du sommet sur la base.

### COROLLAIRE II.

43. Les cones soit droits, soit inclinés, se mesureront aussi de la même maniere, puisqu'ils ne sont autre chose que des pyramides, dont la base est un polygone d'une infinité de côtez.

### COROLLAIRE III.

44. *Les pyramides qui ont les bases égales & les hauteurs inégales, sont entr'elles comme leurs hauteurs, & celles qui ont les hauteurs égales & les bases inégales, sont entr'elles comme leurs bases.*

### COROLLAIRE IV.

45. *Si sur les trois parallelogrames d'un prisme triangulaire ABCDEF* (Fig. 27.), *on tire des diagonales, & qu'on coupe le prisme par des plans qui passent par les diagonales, on aura trois pyramides, chacune desquelles sera égale au tiers du prisme.* Car la pyramide ABCD ayant la base ABC & la hauteur AD commune avec le prisme en sera le tiers, & par la même raison la pyramide DFEC, dont la base est le triangle DFE, en sera aussi le tiers; & quand à la pyramide EDCB, dont la base DBE est égale à la base DBA de la pyramide DBAC, il est visible qu'à cause du sommet commun C, elle est égale à la pyramide DBAC, & par conséquent au tiers du prisme.

### DEFINITION XII.

46. Si l'on coupe une sphere ACFD (*Fig.* 29.) par un plan ABC la section ABC est un cercle; car il est visible que la section commune du plan & de la surface de la sphere a tous ses points également éloignés du centre, & que par conséquent si du centre O on tire une perpendiculaire OR sur le plan, le point O sera également éloigné de tous les points A, B, C de la section, laquelle par conséquent sera un cercle; or ce cercle s'appelle *grand*

*cercle* de la ſphere lorſque le plan coupant paſſe par le centre O, parce qu'alors le diametre de ce cercle eſt égal à l'axe, au lieu que les autres cercles faits par des plans qui ne paſſent pas par le centre, ont le diametre moindre que l'axe, & s'appellent à cauſe de cela *petits cercles* de la ſphere.

## PROBLEME VII.

47. *Meſurer une ſphere* (Fig. 29).

Prenez la valeur du grand cercle DBF, & multipliez-la par le diametre DF, les deux tiers du produit ſeront la valeur de la ſphere.

### DEMONSTRATION.

Soit une demi-ſphere ABC (*Fig.* 30.), & ſur ſon grand cercle ATC pris pour baſe, ſoit conſtruit un cylindre AEFC, dont la hauteur ſoit égale à celle de la demi-ſphere, ou au rayon OB, ce cylindre ſera égal au produit du grand cercle ATC par le rayon OB, & il s'agit de prouver que la demi-ſphere en eſt les deux tiers. Pour cela prolongez le diametre EF de la baſe ſuperieure du cylindre en H, & faites EH égal au rayon ou à AE; puis tirez la droite HA, ce qui vous donnera un triangle rectangle iſoſcele HEA. Maintenant ſi l'on retranche du cylindre la demi-ſphere, il reſtera une eſpece de calotte cylindrique AEFCB, & ſi l'on conçoit que par tous les points de la hauteur EA, il paſſe des plans paralleles à la baſe, la ſection de chaque plan avec la calotte ſera une couronne telle que NSIV; or on ſçait que pour trouver un cercle égal à une couronne, il faut prendre une moyenne proportionnelle entre la partie NS du diametre du plus grand des deux cercles, & le reſte SI de ce diametre (*Partie* 2. *n.* 32.), laquelle moyenne ſe trouvera toujours ici en abbaiſſant du point S, une perpendiculaire SP; car AP ſera égal à NS, & PC égal à SI; d'où il ſuit que SP, qui eſt moyenne proportionnelle entre AP & PC, à cauſe qu'elle eſt perpendiculaire ſur AC, & qu'elle coupe le demi-cercle ABC (*Partie* 2. *n.* 281.), ſera auſſi moyenne proportionnelle entre NS, & SI, & comme en prolongeant IN en M, on a MN égal à NA ou à SP, il s'enſuit encore que MN ſera le rayon d'un cercle égal à la couronne correſpondante; ainſi faiſant la même choſe à l'égard des autres couronnes, on trouvera que la ſomme des Elemens du triangle HEA, eſt la ſomme des rayons des cercles égaux aux couronnes qui compo-

ſent la calotte. Ainſi faiſant tourner le triangle HEA autour du côté EA pris pour axe, chaque rayon décrira ſon cercle, & la ſomme de ces cercles ſera un cone qui aura pour baſe un cercle égal à celui du cylindre, & la hauteur EA commune; donc ce cone, & par conſéquent la calotte qui lui eſt égale, ſera le tiers du cylindre. Or la calotte & la demi-ſphere compoſent enſemble le cylindre, dont la demi-ſphere en eſt les deux tiers; donc la ſphere entiere eſt auſſi les deux tiers d'un cylindre de même baſe, & dont la hauteur eſt égale au diametre.

## AUTRE DEMONSTRATION.

Cette ſeconde démonſtration demande que l'on ſçache que la ſurface d'une ſphere eſt quadruple de ſon grand cercle, ainſi que nous le ferons voir lorſque nous parlerons des ſurfaces des ſolides.

Cela poſé, concevons que la ſurface de la ſphere ſoit diviſée en une infinité de parties égales que nous regarderons comme des ſurfaces planes à cauſe de leur extrême petiteſſe, & que de tous les angles de ces ſurfaces ſoient tirés des rayons au centre de la ſphere, ce qui diviſera la ſphere en une infinité de pyramides égales entr'elles, puiſqu'elles auront les baſes & les hauteurs égales. Or chaque pyramide eſt le produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur ou par le tiers du rayon; donc la ſomme des pyramides ou la ſphere, eſt égale au produit de la ſomme des baſes, ou de la ſurface entiere par le tiers du rayon; ainſi la ſphere eſt égale au produit du quadruple de ſon grand cercle par le tiers du rayon ou le ſixiéme du diametre; & mettant le grand cercle au lieu du quadruple, & quatre ſixiéme du diametre au lieu d'un ſixiéme, ce qui ne gâte rien, parce que le multiplicateur ſe trouve augmenté dans la même proportion que nous diminuons le nombre à multiplier, on aura la ſphere égale à ſon grand cercle multiplié par les quatre ſixiémes, ou par les deux tiers du diametre, de même que ci-deſſus.

## REMARQUE.

49. Nous dirons bien-tôt comment il faut meſurer les ſegmens, les ſecteurs & les bandes, ou zones d'une ſphere.

## LEMME.

50. *Le produit $A \times B$ de deux grandeurs $A$, $B$, eſt moyen proportionnel entre leurs quarrez $AA$, $BB$.*

DEMONSTRATION.

Si l'on multiplie les deux grandeurs A, B, chacune par A, les produits AA, AB, seront entr'eux comme A est à B; ainsi on aura AA, AB :: A. B. & si dans cette proportion on multiplie les deux derniers termes par B, les produits AB, BB, seront encore entr'eux comme A est à B, & par conséquent on aura AB. BB :: A. B. donc AA. AB :: AB. BB. donc le produit AB est moyen proportionnel entre les quarrez AA. BB.

PROBLEME VIII.

51. *Mesurer une pyramide tronquée par un plan parallele à la base.* (Fig. 26.)

Il est visible que si de la pyramide totale ABCDO, on retranche la petite pyramide EFGHO, qui en a été séparée par le plan coupant EFGH, le reste EFGHABCD, sera la valeur de la pyramide tronquée. Ainsi il s'agit de connoître la pyramide entiere & la pyramide retranchée; & comme pour connoître l'une & l'autre il suffit de connoître leurs bases que nous supposons données, & leur hauteur, parce que toute pyramide est le tiers du produit de sa base par sa hauteur; la question se réduit à trouver ces hauteurs; & voici comment on y parvient.

Si la pyramide est droite, considerez que les triangles semblables OEH, OAD, donnent AD. EH :: OA. OE. & que les triangles semblables OAR, OEX, donnent OA. OE :: OR. OX. donc AD. EH :: OR. OX. mais comme les deux derniers termes de cette proportion ne sont pas connus, vous aurez en divisant AD — EH. EH :: OR — OX. ou XR. OX. & alors les trois premiers termes de la proportion étant connus, vous connoîtrez facilement le quatriéme, lequel étant ajoûté à XR, vous aurez l'axe entier OR. Multipliant donc la base ABCD per OR, le tiers du produit sera la valeur de la pyramide totale, & de même multipliant la base EFGH par OX, le tiers du produit sera la valeur de la pyramide retranchée EFGHO. Otant donc la petite de la grande, le reste sera la valeur de la pyramide tronquée.

Mais si la pyramide est inclinée (*Fig.* 31.), vous chercherez la face la plus courte, parce que la pyramide incline nécessairement de ce côté-là, & du milieu de ses deux bases CD, FH, vous tirerez la droite XT, que vous prolongerez indéfiniment;

après quoi vous faites CD — FH. FH :: XO — TO. ou XT. TO. & par-là vous aurez le sommet O de la pyramide totale. Maintenant pour connoître la hauteur, du point X, vous tirerez dans le plan de la grande base prolongé, s'il le faut, la droite XR perpendiculaire à CD, & mesurant l'angle, RXO, il vous sera facile de connoître son complément à l'angle droit, ou l'angle XOR, d'où il suit que le triangle rectangle XOR, vous sera entierement connu; ainsi vous aurez non-seulement la hauteur OR de la pyramide totale; mais encore la hauteur OZ de la pyramide retranchée à cause des triangles semblables OXR, OTZ, & le reste s'achevera comme ci-dessus.

Je suppose que la plus courte face COD soit un triangle isoscele; mais si cela n'étoit pas, on diroit d'abord CD — FH. FH :: DO — OH. ou DH. HO. & le point O devenant connu, aussi bien que la longeur DO, & l'angle ODC, on connoîtra facilement la perpendiculaire OX tirée du point O sur DC, à cause du triangle rectangle ODX. Ainsi des points X, T, où cette perpendiculaire couperoit les droites CD, EH, on tireroit les perpendiculaires XR, TZ, dans les plans des bases ABCD, EFGH, & le reste comme ci-dessus.

Que si la pyramide inclinée avoit deux faces égales qui fussent moindres que les autres, alors elle inclineroit du côté de l'arête que ces deux faces formeroient, & l'on trouveroit toujours par les triangles semblables non-seulement les parties de cet arête, mais encore celles de la hauteur de la pyramide, &c.

### *Autre maniere.*

Cherchez un plan moyen proportionnel entre la base ABCD (*Fig.* 26.); de la pyramide, & la base EFGH du tronquement, ajoûtez ensemble les deux bases & le plan moyen proportionnel, & multipliez leur somme par le tiers de la hauteur XR du tronquement, le produit sera la valeur de la pyramide tronquée ABCDEFGH.

### DEMONSTRATION.

Concevez que la pyramide entiere soit coupée par un plan OTV perpendiculaire à la base ABCD, & qui passe le long de l'axe, & appellons A la ligne TV, B la ligne ZS, C l'axe entier OR, & D l'axe OX. Comme nous n'exprimons ici les lignes que par une seule lettre, nous exprimerons leur produit en les joignant

les unes aux aux autres sans y mettre le signe de multiplication ; ainsi la base de la pyramide totale étant le quarré de TV, ou de A, cette base sera AA, & la pyramide totale sera $\frac{1}{3}$AAC, de même la pyramide retranchée sera $\frac{1}{3}$BBD, & par conséquent ôtant l'une de l'autre, nous aurons pour la pyramide tronquée $\frac{1}{3}$AAC $-\frac{1}{3}$BBD.

D'autre part le plan moyen proportionnel entre les bases AA, BB, sera AB par le Lemme précédent. Ainsi il s'agit de prouver que $AA+BB+AB\frac{C-D}{3}$ est égal à $\frac{1}{3}$AAC$-\frac{1}{3}$BBD. ou que $\frac{1}{3}$AAC$+\frac{1}{3}$BBC$+\frac{1}{3}$ABC$-\frac{1}{3}$AAD$-\frac{1}{3}$BBD$-\frac{1}{3}$ABD$=\frac{1}{3}$AAC $-\frac{1}{3}$BBD. & pour cela considerez que les triangles semblables OTV, OZS, donnent A. B :: C. D. d'où l'on tire AD$=$BC. & si dans l'égalité que nous proposons, nous mettons BC au lieu de AD dans le quatriéme & sixiéme terme du premier membre, nous aurons $\frac{1}{3}$AAC $+\frac{1}{3}$BBC $+\frac{1}{3}$ABC $-\frac{1}{3}$ABC $-\frac{1}{3}$BBD $-\frac{1}{3}$BBC$=\frac{1}{3}$AAC $-\frac{1}{3}$BBD. & effaçant dans le premier membre les termes qui se détruisent par des signes contraires, nous aurons $\frac{1}{3}$AAC $-\frac{1}{3}$BBD$=\frac{1}{3}$AAC$-\frac{1}{3}$BBD. où tout se trouve effectivement égal de part & d'autre, ce qui fait voir que le Probleme prescrit ce qu'il faut faire.

## REMARQUE.

52. Quoique cette démonstratration paroisse ne regarder que les pyramides dont les bases sont quarrées, cependant comme toute pyramide peut se changer en une autre qui lui soit égale, & dont la base soit un quarré, ainsi que nous dirons plus bas, il s'ensuit qu'on peut l'appliquer généralement à toutes sortes de pyramides en prenant pour les inclinées le tiers de la hauteur au lieu du tiers de l'axe.

## COROLLAIRE.

53. Les cones n'étant autre chose que des pyramides, dont les bases sont des polygones d'une infinité de côtez, on mesurera les cones tronqués parallelement à leurs bases de même que les pyramides tronquées.

## PROBLEME IX.

54. *Mesurer les secteurs, les segmens & les zones d'une sphere.* (Fig. 30.

Pour mesurer le segment SBV circonscrivez à la demi-sphere ABCT un cylindre AEFT de même hauteur & de même base, lequel soit coupé par le même plan qui coupe le segment, & faites le triangle rectangle isoscele HEA. Nous avons démontré (*n.* 48.), que les cercles faits par les Elemens de ces triangles pris pour rayons sont égaux aux couronnes correspondantes qui composent la calotte cylindrique AEFCB. Ainsi le cone tronqué fait par la circonvolution du trapezoïde HMNE autour de EN, sera égal à la calotte ENSBVIF; cherchant donc ce cone tronqué, & ôtant sa valeur du cylindre ENFI, vous aurez la valeur du segment de sphere SBV.

Pour mesurer le secteur SBVO, cherchez la valeur du segment SBV, & ajoûtez-y celle du cone SOV, la somme sera le secteur.

Enfin pour mesurer la zone ASVCI, mesurez le cone fait par la circonvolution du triangle MNA autour de NA, & retranchez ce cone du cylindre ANIC, le reste sera la valeur de la zone; ce qui est évident, puisque le cone est égal à la partie NSAVIC de la calotte cylindrique, laquelle jointe à la zone, compose le cylindre ANIC.

## REMARQUE.

55. On peut mesurer les segmens, les secteurs & les zones d'une sphere beaucoup plus facilement par le moyen de leurs surfaces; mais comme nous ne parlerons de ces surfaces que lorsque nous aurons fini ce qui regarde les solides, nous n'en dirons rien pour le présent.

## PROBLEME X.

56. *Mesurer une pyramide ABCDEFGH tronquée par un plan EFGH qui n'est pas parallele à sa base* (Fig. 32.).

Il est évident que si l'on retranche de la pyramide entiere ABCDO, la petite pyramide EFGHO, le reste sera la pyramide tronquée; ainsi il ne s'agit que de trouver l'une & l'autre de ces pyramides. Supposant donc que la pyramide soit droite, tronquez-la par un plan EPQF parallele à sa base, & cherchant l'axe entier OZ (*n.* 51.), multipliez la base ABCD par le tiers de cet axe, ce qui vous donnera la valeur de la pyramide totale. Maintenant pour avoir la petite pyramide, cherchez la plus haute face CHGD de la tronquée, & dites: CD — PQ. PQ :: OC — OP.

OP,

OP :: OD — OQ. OQ. & connoissant par là les parties OP, OQ, retranchez-en les parties HP, GQ, & les restes OH, OG, vous feront connoître le triangle OHG, qui est la plus courte face de la pyramide EFGHO; c'est pourquoi du point O vous tirerez une perpendiculaire OS sur HG, & vous en chercherez la valeur par le moyen du triangle rectangle OSH, dans lequel l'hypotenuse OS & l'angle OHS qui peut se mesurer, seront connus. Cette perpendiculaire étant trouvée, du point S vous menerez dans le plan de la base BFGH, la droite SR, perpendiculaire à HG, & mesurant l'angle OSR, vous connoîtrez facilement dans le triangle rectangle OSR la droite OR qui est la hauteur de la petite pyramide. Multipliant donc la base EFGH par le tiers de cette hauteur, vous aurez la petite pyramide, laquelle étant retranchée de la grande, vous donnera la pyramide tronquée.

Que si il y avoit dans la pyramide tronquée deux faces d'égale hauteur, alors la petite pyramide inclineroit sur l'arête faite par ces deux faces, & l'on trouveroit toujours par les triangles semblables la partie de cet arête, & la hauteur de la petite pyramide, &c.

Si la grande pyramide étoit inclinée, on chercheroit sa hauteur au lieu de son axe, & le reste s'acheveroit de la même façon.

### COROLLAIRE I.

57. On peut mesurer de la même maniere un cone ADEB (*Fig.* 33.), tronqué par un plan DE, qui n'est point parallele à sa base. Mais pour cela il faut d'abord chercher le grand axe DE du plan DE, qui est une Ellipse, comme il a été dit ailleurs; ensuite du point D il faut tirer sur la surface du cone une ligne DHD parallele à la base, laquelle sera une circonference de cercle, dont il sera facile de connoître le diamete DH. Par le point E & par le point H milieu de la ligne DHD, vous tirerez la droite EB, & par le point B vous tirerez le diametre BA de la base, & du point A la droite DA; ainsi le plan DABE sera le même que celui du triangle ACB: c'est pourquoi il vous sera facile de connoître l'axe entier en disant: AB — DH. DH :: AC — CD. ou AD. CD & CD. étant connu, vous l'ajoûterez à DA, ce qui vous donnera le côté AC; c'est pourquoi faisant le quarré de ce côté, & retranchant de ce quarré celui du

rayon AO, le reste sera le quarré de l'axe, & par conséquent la racine quarrée vous donnera l'axe. Multipliant donc la base AB par le tiers de l'axe, vous aurez le cone total.

Maintenant la droite DC ou CH étant connuë, retranchez-en EH, & le reste sera la valeur de CE; prolongez DE, & mesurez l'angle FEH, dont le complément à l'angle droit sera l'angle FEC; ainsi connoissant dans le triangle rectangle FEC l'hypotenuse EC, & l'angle aigu FEC, il vous sera facile de trouver la perpendiculaire CF, qui est la hauteur du petit cone. Multipliant donc la base DE par le tiers de CF, vous aurez le petit cone, lequel étant retranché du grand, vous donnera le cone tronqué ADEB.

Il est inutile de redire que si le cone étoit incliné, il faudroit au lieu de l'axe CO, chercher la hauteur; car on voit bien qu'il faut toujours agir de même lorsque les solides ne sont pas droits.

## COROLLAIRE II.

58. Si le plan FED (*Fig.* 34.), qui coupe le cone obliquement à sa base, au lieu de couper les deux côtez, tombe sur la base, & passe par le centre O; on peut encore mesurer le cone tronqué DFEB de la même façon, & voici comment. Du point O tirez dans la base un diametre AB, perpendiculaire au diametre FD, par lequel passe le plan coupant. Du même point O tirez dans le plan coupant la droite OE perpendiculaire à FD, & joignez la droite EB. Maintenant pour connoître le côté entier CB du cone, du point E abbaissez une perpendiculaire EH sur le diametre AB, & la droite OH sera le rayon d'un cercle EP, qui couperoit le cone en E parallelement à la base, de même que EH sera égal à la portion RO de l'axe compriſe entre la base & ce cercle. Ainsi disant AB — PE. PE :: CO — CR. CR. vous connoîtrez l'autre portion CR de l'axe, & par conséquent l'axe entier. Multipliant donc la base ADB par le tiers de l'axe, vous aurez le cone entier, & retranchant de ce cone la moitié ACFD, le reste sera l'autre moitié FCDB.

Prolongez la droite OE, & mesurez l'angle SEB, dont le complément a 90 degrez, sera l'angle aigu SEC, & comme dans le triangle rectangle SEC, la droite CE vous sera facilement connuë à cause des triangles semblables CRE, COB, en disant: CO — CR. CR :: CB — CE. CE. il s'ensuit que vous

connoîtrez aussi la droite CS, qui est la hauteur de la pyramide inclinée DCFE; mesurant donc la base FED, qui sera ou une portion d'Ellipse, ou une parabole, multipliez-la par le tiers de CS, & vous aurez la valeur de la pyramide mixtiligne DEFC; donc ôtant cette pyramide du demi-cône DCFB, le reste sera la valeur de la portion tronquée DEFB.

## PROBLEME XI.

59. *Mesurer un parallelepipede tronqué par un plan qui n'est point parallele à sa base* (Fig. 35.).

Supposons d'abord que le parallelepipede soit rectangle; tirez les diagonales EG, FH de la base, & les diagonales AC, BD, du plan coupant ABCD. Du point O où les diagonales de la base se coupent, tirez la droite OR au point R où se coupent celles du plan coupant, & OR sera parallele aux côtez du parallelepipede, à cause que les droites AC, EG, qui sont entre les paralleles AE, CG, sont coupées proportionnellement, ou en deux parties égales par la droite OR. Multipliez la base EHGF par OR, & le produit sera la valeur du parallelepipede tronqué EFGHABCD. Car si vous concevez que le parallelepipede entier soit coupé par un plan parallele à sa base, & qui passe par le point R, ce plan coupera le plan oblique en deux parties égales, & il sera aussi coupé en deux également, parce que deux parallelogrames qui se coupent mutuellement par le centre, se coupent en deux parties égales. Ainsi le plan XZCB sera égal au plan XZAD, & le plan XZTS égal au plan XZPQ, & comme l'angle que deux de ces plans font d'un côté, est égal à celui que les deux autres font de l'autre côté, à cause qu'ils sont opposés au sommet, il s'ensuit que les parties des faces du parallelepipede que ces plans coupent, sont égales de part & d'autre, & que par conséquent le solide XZCTSB est égal au solide XZDAPQ; ajoûtant donc à chacun de ces solides le solide ADZTSXEHFG, on aura le parallelepipede tronqué EFGHABCD égal au parallelepipede droit EFGHPSTQ.

Que si le parellelepipede est incliné, ce sera la même chose, si ce n'est qu'au lieu de multiplier la base EFGH par la droite OR, qui alors ne sera plus perpendiculaire, il faudra la multiplier par une perpendiculaire tirée du point R sur la base EFGH.

### COROLLAIRE I.

60. Tout prisme droit tronqué obliquement, & dont la base est un polygone regulier, se mesurera en multipliant sa base par la perpendiculaire élevée du centre de cette base, & comprise entre la base & le plan oblique, ce qui est évident lorsque la base est un polygone d'un nombre pair de côtez, parce qu'alors on voit bien que le plan oblique & le plan parallele à la base venant à se couper par le centre, se coupent en deux parties égales, d'où tout le reste s'ensuit comme ci-dessus. mais comme la même chose ne paroit pas quand le polygone est d'un nombre impair de côtez, nous en donnerons une démonstration générale pour tous les polygones dans le Lemme suivant & ses Corollaires, où nous enseignerons aussi une méthode facile de trouver la hauteur moyenne OR. Quant à la hauteur OR, par rapport aux parallelepipedes tronqués; nous allons la donner dans le Corollaire suivant.

### COROLLAIRE II.

61. Les hauteurs EA, OR, GC, sont en proportion Arithmetique; car OR surpasse EA de la grandeur AP, qui est égale à la grandeur CT, dont GC surpasse OR; c'est pourquoi pour trouver la hauteur OR qu'il faut donner à un parallelepipede tronqué par un plan qui n'est pas parallele à sa base, il faut ajoûter ensemble la plus grande hauteur & la moindre du plan incliné, c'est-à-dire EA, GC, & la moitié de la somme sera la valeur de la hauteur OR, par laquelle il faut multiplier la base du solide pour avoir sa solidité.

### COROLLAIRE III.

62. Les cylindres tronqués par des plans obliques à la base, se mesureront de la même façon. Ainsi pour trouver la hauteur qu'il faut donner au cylindre tronqué ABCD (*Fig.* 37.), il faut d'abord chercher le grand axe AD du plan coupant, puis de son extrêmité A il faut tirer sur la surface du cylindre une parallele à la circonference de la base, & cette parallele AEA sera une circonference de cercle dont vous marquerez le point E du milieu; & de D par E vous tirerez la droite DC, ensuite du point C vous tirerez le diametre CB de la base & la droite BA; alors CD sera la plus grande hauteur du plan coupant, & BA la

moindre, & vous acheverez le reſte comme ci-deſſus.

Nous dirons dans la ſuite comment il faut meſurer les cylindres quand le plan oblique coupe la baſe.

## LEMME. (*Fig.* 39.)

*63. Soit un polygone regulier de tel nombre de côtez qu'on voudra ABC, & dans le plan de ce polygone une droite XZ hors de l'aire de la figure, ſi de tous les angles A, B, C, du polygone, on tire des perpendiculaires AD, BE, CF, ſur XZ, & que du centre O on tire auſſi OS perpendiculaire à XZ, la droite OS, priſe autant de fois que le polygone a d'angles, ſera égale à la ſomme des perpendiculaires AD, BE, CF, tirées des mêmes angles.*

### DEMONSTRATION.

Diviſez les côtez du polygone chacun en deux également aux points M, N, V, & tirez les droites MN, NV, VM, ce qui vous donnera un nouveau polygone ſemblable au prémier, comme il eſt facile de le démontrer. De tous les angles de ce nouveau polygone tirez des perpendiculaires MI, VR, NT, ſur XZ, & à cauſe du trapezoïde DABE, vous aurez $MI = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BE$, de même à cauſe du trapezoïde DACF, vous aurez $VR = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}CF$, & enfin à cauſe du trapezoïde EBCF, vous aurez $NT = \frac{1}{2}BE + \frac{1}{2}CF$; d'où il ſuit que $MI + VR + NT = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BE + \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}CF + \frac{1}{2}BE + \frac{1}{2}CF$, ce qui fait $MI + VR + NT = AD + BE + CF$, c'eſt-à-dire les trois perpendiculaires tirées des angles du ſecond polygone, égales enſemble aux trois perpendiculaires enſemble tirées des angles du premier.

Or ſi vous diviſez encore les côtez du ſecond polygone chacun en deux également, pour y inſcrire un troiſiéme polygone ſemblable, & que des angles de ce troiſiéme polygone vous tiriez des perpendiculaires ſur XZ, vous trouverez encore que la ſomme de ces perpendiculaires eſt égale à la ſomme des perpendiculaires tirées des angles du ſecond polygone, & par conſéquent égale à la ſomme des perpendiculaires tirées des angles du premier, & ainſi de même à l'égard des autres polygones plus petits qu'on inſcriroit au troiſiéme, puis au quatriéme, &c. Mais à force d'inſcrire des polygones, on viendra enfin à un polygone dont les angles ſeront infiniment proches du centre,

& alors il eſt viſible que chaque perpendiculaire tirée des angles ſur XZ ſera égale à la perpendiculaire OS tirée du centre; donc OS priſe autant de fois que le polygone a d'angles, ſera égale à la ſomme des perpendiculaires tirées des angles; mais cette ſomme eſt égale à celle des perpendiculaires tirées des angles du premier polygone; donc OS priſe autant de fois qu'il y a d'angles ou de côtez, ſera égale à la ſomme des perpendiculaires tirées des angles du premier polygone.

### COROLLAIRE I.

64. Soit un priſme ABCDEF (*Fig.* 40.), dont la baſe eſt un polygone regulier, & qui eſt tronqué par un plan DEF, non parallele à ſa baſe, lequel étant prolongé, rencontre le plan de la baſe prolongée dans la droite HL. Soient tirées des angles de la baſe, & du centre O, les droites CH, OR, AS, BL, perpendiculaires à HL. Par le Lemme précedent OR, pris autant de fois que la baſe a de côtez ou d'angles, ſera égal à la ſomme des perpendiculaires CH, AS, BL, tirées des angles. Du centre O élevez une perpendiculaire OV ſur la baſe, juſqu'à ce qu'elle coupe le plan oblique en V, & des angles de ce plan, & du point V, tirez les droites EH, VR, DS, FL. Les triangles rectangles ECH, OVR, DAS, FBL, ſeront ſemblables; car leurs baſes CH, OR, AS, BL, ſont paralleles entr'elles étant perpendiculaires à la droite HL, leurs hauteurs CE, OV, AD, BF, ſont auſſi paralleles, parce qu'elles ſont perpendiculaires à la baſe ABC; d'où il ſuit que leurs troiſiémes côtez ſont auſſi paralleles. Or la baſe OR priſe autant de fois que le polygone a d'angles, eſt égale à la ſomme des baſes CH, AS, BL; donc *la hauteur OV priſe autant de fois que le polygone a d'angles, eſt égale à la ſomme des hauteurs CE, AD, BF.*

### COROLLAIRE. II.

65. *La ſurface du priſme tronqué ABCDEF, non compris la baſe, ni le plan incliné, eſt égale au circuit de ſa baſe multiplié par la hauteur moyenne OV.* Car cette ſurface eſt égale à la ſomme des ſurfaces ou des trapezoïdes ADFB, BFEC, CEDA. Or le trapezoïde ADFB eſt égal à $\frac{1}{2}$AD + $\frac{1}{2}$FB, multiplié par AB, le trapezoïde BFEC, eſt égal à $\frac{1}{2}$FB + $\frac{1}{2}$EC, multiplié par BC; & enfin le trapezoïde CEDA eſt égal à $\frac{1}{2}$EC + $\frac{1}{2}$AD multiplié par AC; donc les trois trapezoïdes enſemble ſont égaux à $\frac{1}{2}$AD + $\frac{1}{2}$FB

$+\frac{1}{2}FB+\frac{1}{2}EC+\frac{1}{2}EC+\frac{1}{2}AD$, multiplié par AB ; car les deux autres multiplicateurs BC, AC, ſont égaux chacun à AB : or cela ſe réduit à $AD+FB+EC$, multiplié par AB, & comme 3OV ſont égaux à $AD+FB+EC$, cela ſe réduit encore à 3OV, multiplié par AB, ou à OV, multiplié par 3AB, c'eſt-à-dire la ſurface tronquée eſt égale au circuit 3AB, multiplié par la hauteur moyenne OV.

## COROLLAIRE III.

66. *Le priſme tronqué ABCDEF, eſt égal à ſa baſe multiplié par ſa hauteur moyenne OV.* Si l'on conçoit que ſa ſurface compriſe entre la baſe & le plan oblique, renferme dans elle une infinité d'autres ſurfaces concentriques, & qui ſoient toutes compriſes entre la baſe & le plan oblique, la ſomme de ces ſurfaces ſera la même choſe que le priſme ; or chaque ſurface ſera égale au contour de ſa baſe multiplié par la hauteur moyenne OV ; donc le priſme ſera égal à la ſomme des contours des baſes multipliée par la hauteur OV ; mais la ſomme des contours des baſes eſt la même choſe que la baſe ACB ; donc le priſme tronqué eſt égal à la baſe ACB, multipliée par la hauteur OV, & c'eſt la démonſtration générale pour tous les priſmes tronqués, dont les baſes ſont regulieres, que nous avons promiſe (*n.* 60.).

## COROLLAIRE IV.

67. Il ſuit du Corollaire premier, que pour trouver la hauteur moyenne d'un priſme tronqué obliquement, & dont la baſe eſt reguliere, il faut meſurer toutes les hauteurs des arêtes AD, BF, CE, compriſes entre la baſe & le plan oblique, & diviſer leur ſomme par le nombre des angles ou des côtez du polygone, ce qui donnera au quotient la hauteur moyenne.

## PROBLEME XII.

68. *Meſurer un priſme triangulaire, dont la baſe n'eſt pas reguliere, & qui eſt tronqué par un plan oblique à ſa baſe* (Fig. 38.).

Meſurez la baſe ABC, & multipliez-la par le tiers des trois hauteurs AD, AE, AF, le produit ſera la ſolidité du priſme.

Pour en comprendre la raiſon, coupez le priſme par un plan GEH parallele à ſa baſe, & qui paſſe par l'extrêmité E de la moindre hauteur, il eſt viſible que le priſme ABCGEH, ſera

égal au produit de sa base ABC par sa hauteur BE, ou ce qui revient au même, par le tiers de ses trois hauteurs égales AG, BE, CH; ainsi il ne reste plus qu'à trouver la partie tronquée GEHDF; or cette partie est composée de deux pyramides GEHD, EFHD, dont la premiere GEHD est égale au produit de la base GEH, ou ABC son égale par le tiers de sa hauteur GD; quant à la seconde, si vous tirez FG sur la face GDFH, vous trouverez que cette seconde est égale à une autre pyramide EFHG, qui auroit son sommet en G, à cause que l'une & l'autre auroit la base commune EFH, & la même hauteur, à cause des paralleles AD, BE, CF; or si nous prenons pour la base de la pyramide EFHG son côté GEH, sa hauteur sera FH, & par conséquent cette pyramide sera égale à la base GEH, ou ABC multipliée par le tiers de FH; donc la pyramide EFHD, est aussi égale à la base ABC, multipliée par le tiers de FH. Ajoûtant donc le prisme ABCGEH aux deux pyramides GEHD, EFHD, qui composent le tronquement GEHFD, nous trouverons que la valeur totale sera égale au produit de la base ABC, par le tiers des trois lignes AG, BE, CH, plus le tiers de GD, plus le tiers de HF, ou au produit de la base ABC, par le tiers des trois hauteurs AD, BE, CF, puisque le tiers de AG, plus le tiers de GD, est la même chose que le tiers de AD, & que le tiers de CH, plus le tiers de HF, est aussi la même chose que le tiers de CF.

### COROLLAIRE I.

69. Si le prisme étoit tronqué par les deux bouts, il faudroit le couper par un plan perpendiculaire à ses trois hauteurs, & multiplier ensuite la section commune par le tiers des trois hauteurs.

### COROLLAIRE II.

70. Tout prisme dont la base n'est pas reguliere, & qui est tronqué par un plan oblique, peut se mesurer aisément par le moyen de ceci. Car supposons que la figure 36 représente un de ces prismes, je coupe sa base par des diagonales DB, EB, qui la divisent en trois triangles, je fais passer des plans perpendiculaires à la base par les droites DB, EB, & le prisme se trouve divisé en trois prismes triangulaires tronqués ABDFGH, BDEIFH, EBCMIH, que je mesure chacun à part, & la somme de ces prismes me donne le prisme total.

COROL.

## COROLLAIRE III.

71. On tire encore d'ici une methode facile de mesurer les solides en talud, tels que sont ordinairement les revêtemens d'une fortification. Supposons, par exemple, que la figure 41, représente un demi-bastion, & une partie de la courtine. Je cherche d'abord la longueur & la largeur au sommet, & comme ces deux dimensions ne sont autre chose qu'un composé de trapezoïde ABCD, CDEF, EFHI, qui ont la hauteur commune RT, j'ajoûte ensemble leurs longueurs moyennes SV, VX, XZ, & je multiplie leur somme par la largeur RT, ce qui me donne le produit des deux dimensions. Je fais passer par les droites BD, DF, FI, des plans perpendiculaires à la base de la muraille, ce qui me donne une muraille sans talus, dont la base est composée des trapezoides *a*MN*b*, *b*NO*c*, COL*d* égaux & paralleles aux trapezoïdes superieurs. Ainsi cette muraille sans talus est composée de 3. prismes AB*c*D*ba*MN, DCEFON*bc*, EFIH*dc*OL, & comme le produit des deux dimensions que j'ai trouvé ci-dessus, est égal à la somme des bases de ces prismes, je multiplie ce produit par la hauteur commune A*a*, & le produit est égal à la somme des prismes, ou à la muraille sans talus.

Maintenant je considere que le talud est composé de trois prismes triangulaires tronqués obliquement BM*efg*ND, *f*NDFO*g*, FO*gh*IL; c'est pourquoi je coupe l'un d'entr'eux par un plan *irs*, perpendiculaire à ses trois longueurs, & comme cette coupe est commune à tous les trois, je fais la somme des trois longueurs totales BDFI, MNOL, *efgh*, & je multiplie la coupe *irs*, par le tiers de cette somme, ce qui me donne le talud, lequel ajoûté à la muraille sans talud, me donne la muraille entiere ou le revêtement.

Que s'il se trouve quelque partie arrondie, comme il arrive assez souvent aux orillons, aux cazemates, & à la contrescarpe, la mesure se fera de la même façon. Ainsi (*Fig* 42.), on multipliera la longueur moyenne SV par la largeur RT, & le produit par la hauteur B*Z*, ce qui donnera la muraille sans talud; ensuite on multipliera la coupe TPO par le tiers des trois longueurs XH, MN, SV, & le produit sera le talud, lequel ajoûté au produit précedent, donnera la muraille entiere.

### COROLLAIRE IV.

72. Tout corps irregulier, quelque nombre de faces qu'il ait, pouvant être coupé en d'autres qui seront ou des prismes, ou des pyramides, ou des parallelepipedes, droits, obliques, ou tronqués, je ne m'arrêterai point à entrer dans le détail de leurs mesures, parce qu'on voit bien qu'en mesurant chaque partie à part, la somme de ces parties sera égale au solide total.

### REMARQUE.

73. Il nous reste encore bien des choses à dire touchant la mesure des corps; mais auparavant nous allons parler des differens rapports des solides, de leurs changemens & de leur réduction, après quoi nous reviendrons à notre sujet.

## SECTION III.

*Des rapports composés des solides, de leurs changemens, & de leur réduction.*

### PROBLEME XIII.

74. *Trouver le rapport de deux parallelepipedes ABCDEFHG; abcdefhg* (Fig. 43.).

Comparez la base ABCD, avec la base *abcd*, & la hauteur AG, avec la hauteur *ag*, & la raison composée de ces deux rapports, sera le rapport de ces deux solides.

Soit la base ABCD 4 toises quarrées, la base *abcd* 3, la hauteur AG 5 toises, & la hauteur *ag*, 2, les deux raisons seront 4, 3, 5, 2, & la raison composée de ces deux raisons, sera 20, 6; or 20, 6, marquent le rapport de deux parallelepipedes; car 20 est le produit des deux antecedens, dont l'un est la base, & l'autre la hauteur du premier parallelepipede, & par conséquent 20 est la valeur de ce parallelepipede, de même 6 est le produit des deux conséquens, dont l'un est la base, & l'autre la hauteur du second parallelepipede, & par conséquent 6 est la valeur du second; donc les deux parallelepipedes sont entr'eux comme 20 à 6.

Pour abreger, on se sert des exposans des bases & des hauteurs. Ainsi supposant que la base de l'un soit 96, & celle de

l'autre 24, la hauteur du premier 64, & celle du second 32; au lieu de 96. 24, on met 4. 1, qui sont leurs exposans, & au lieu de 64. 32, on met leurs exposans 2. 1, & alors la raison composée des deux raisons 4. 1, 2. 1, est 8. 1, & cette raison marque que les deux parallelepipedes sont entr'eux comme 8. 1, ou que le premier est huit fois plus grand que le second.

## COROLLAIRE I.

75. *Les parallelepipedes sont donc entr'eux en raison composée de la raison de leurs bases, & de celle de leurs hauteurs*, & l'on doit dire la même chose des autres solides qui sont le produit de leurs bases par leurs hauteurs, ou par quelques parties de leurs hauteurs, comme les cubes, les prismes, les cylindres, les pyramides, & les cones.

## COROLLAIRE II.

76. Les bases des solides étant composées de deux dimensions longueur & largeur, sont entr'elles en raison composée des raisons de ces deux dimensions; c'est pourquoi on peut dire que *les solides sont entr'eux en raison composée de leurs trois dimensions*, c'est-à-dire des deux dimensions des bases, & de celle des hauteurs.

## COROLLAIRE III.

77. Quand la raison composée des raisons des bases & des hauteurs a ses deux termes égaux, alors les deux solides qu'on compare sont égaux, & leurs bases sont réciproques à leurs hauteurs. Ainsi que la base du premier solide soit 9, celle du second 6, la hauteur du premier 2, & celle du second 3, la raison composée des deux raisons 9. 6, 2. 3, sera $9\times2$, $6\times3$, ou 18. 18, dont les deux termes sont égaux. Mais les racines qui composent deux produits égaux, pouvant toujours faire une proportion, on aura 9. 6 :: 3. 2. où l'on voit que la base du premier est à celle du second réciproquement, comme la hauteur du second à la hauteur du premier.

## DEFINITION XIII.

78. Deux ou plusieurs solides compris sous un même nombre de faces, sont dits *semblables*, lorsque leurs trois dimensions sont proportionnelles, & que les angles faits par les côtez de leurs faces, sont égaux chacun à chacun, & alors les côtez des faces

ſont auſſi proportionnels, & les faces ſont ſemblables.

Soient par exemple deux pyramides ABCDE, *abcde*, (*Fig.* 44.) dont les longueurs AD, *ad*, les largeurs BG, *bg*, & les hauteurs OE, *oe*, ſont proportionnelles, & dont les angles faits par les côtez de la baſe, & par ceux des faces triangulaires, ſont égaux chacun à chacun; il eſt viſible à cauſe des triangles ſemblables ABG, *abg*, que l'on a AB. *ab* :: BG. *bg*. & par la ſuppoſition BG. *bg*. :: AD. *ad*. donc AB *ab* :: AD. *ad*. de même dans les triangles ſemblables AOE, *aoe*, on aura AE. *ae* :: OE *oe*. mais par la ſuppoſition OE. *oe* :: AD. *ad*. donc AE. *ae* :: AD. *ad*. & ainſi des autres côtez des faces; d'où il ſuit que ces faces étant compoſées de côtés proportionnels & d'angles égaux chacun à chacun, ſont ſemblables entr'elles.

On peut donc dire plus brievement que les ſolides ſont ſemblables entr'eux, lorſqu'ils ſont compris ſous un égal nombre de ſurfaces ſemblables entr'elles.

## COROLLAIRE IV.

79. *Les ſolides ſemblables ſont en raiſon triplée de la raiſon de l'une de leurs dimenſions, ou de la raiſon de leurs côtez homologues, ou enfin de la raiſon de quelques lignes ſemblablement tirées.* Ils ſont entr'eux en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions; or les raiſons de leurs dimenſions ſont égales: donc ils ſont en raiſon triplée de la raiſon de l'une d'entr'elles; car nous avons dit en parlant des raiſons compoſées, que quand trois raiſons compoſantes ſont égales, la compoſée eſt triplée de l'une d'entr'elles.

Mais dans les ſolides ſemblables les raiſons des côtez homologues, ou des lignes ſemblablement tirées, ſont égales à la raiſon de l'une des dimenſions; donc les ſolides ſemblables ſont auſſi en raiſon triplée de la raiſon de leurs côtez homologues, ou de celle des lignes ſemblablement tirées.

## COROLLAIRE V.

80. *Les ſpheres ſont entr'elles en raiſon triplée de la raiſon de leurs diametres.* Car les ſpheres ſont des ſolides ſemblables, & pour en être convaincu, prenons deux demi-cercles inégaux AGB, *agb*, (*Fig.* 45.), diviſons le diametre du grand en petites parties égales, & le diametre du petit en un même nombre de parties qui ſeront proportionnelles à celles du grand, des points de divi-

sion tirons dans l'un & dans l'autre des perpendiculaires sur les diametres jusqu'à la circonference, ces perpendiculaires seront aussi proportionnelles, c'est-à-dire CF. *cf* :: DG. *dg* & ainsi des autres par la nature du cercle. Tirons les droites AF, FG, GH, HB, *af*, *fg*, *gh*, *hb*, qui seront proportionnelles entr'elles, parce qu'elles sont des cordes d'arcs égaux. Ainsi les trapezoïdes & les triangles compris entre les paralleles & ces cordes, seront semblables, parce que leurs côtez sont proportionnels, & leurs angles égaux chacun à chacun, comme il est facile de le prouver. Concevons à présent que les deux demi-cercles tournent autour de leurs diametres AB, *ab*, ils décriront des spheres, & les triangles & les trapezoïdes décriront les uns des cones, & les autres des cones tronqués, & tous ces solides dans la grande sphere, seront semblables à tous les solides dans la petite; car les perpendiculaires CF, *cf*, &c. décriront des cercles, dont les circonferences seront proportionnelles aux perpendiculaires qui sont leurs rayons; ainsi toutes les dimensions de ces solides étant proportionnelles, & les angles faits par ces dimensions étant égaux, ces solides seront semblables; mais en supposant que les divisions du grand diametre sont infiniment petites, les sommes des solides inscrits dans l'une & l'autre, ne differeront pas de ces spheres; donc les spheres seront semblables de même que les solides inscrits.

## PROBLEME XIV.

81. *Changer une pyramide ABCDE* (Fig. 46.), *en un parallelepipede qui lui soit égal.*

Prenez une base *abcd*, égale à la base ABCD, & à chaque angle élevez sur cette base une perpendiculaire égale au tiers de la hauteur OE de la pyramide, puis faites passer un plan par les quatre extrêmitez de ces perpendiculaires, & vous aurez un parallelepipede *abcdefgh*, égal à la pyramide, puisqu'il sera, comme elle, le produit de la base par le tiers de la hauteur EO.

Si la base de la pyramide étoit un polygone regulier ou irregulier, le solide qu'on lui feroit égal en faisant, comme nous venons de dire, seroit un prisme.

On peut changer de la même façon un cone en cylindre.

Que si on donnoit une base SORQ, sur laquelle on demandât qu'on fît un parallelepipede égal à la pyramide, on chercheroit le rapport de cette base à celle de la pyramide, ainsi qu'il a été enseigné dans la seconde Partie (*n.* 94.), puis on diroit :

Comme cette base est à celle de la pyramide, réciproquement le tiers de la hauteur de la pyramide est à un quatriéme terme qui seroit la hauteur QZ, qu'il faudroit donner au parallelepipede demandé; & alors ce parallelepipede & la pyramide seroient égaux entre'ux, puisqu'ils auroient les bases réciproques aux hauteurs, en concevant que la pyramide eût d'abord été changée en un parallelepipede de même base.

### COROLLAIRE I.

82. Si on demandoit de faire une pyramide égale à un parallelepipede donné ABCDEFGH (*Fig.* 47.), on éleveroit sur le centre O de la base une perpendiculaire OR, égale à trois fois la hauteur du parallelepipede, & de tous les angles de la base on tireroit des droites au point R, ce qui donneroit la pyramide ABCDR, égale au parallelepipede, puisque l'une & l'autre seroient égaux au produit de la base par le tiers de la hauteur OR.

Et si la base de la pyramide étoit donnée, on diroit: Comme la base de la pyramide est à celle du parallelepipede, réciproquement le triple de la hauteur du parallelepipede est à un quatriéme terme qui seroit la hauteur qu'il faudroit donner à la pyramide; car alors les deux solides auroient les bases réciproques aux hauteurs.

*Nota.* Que quand je dis que les deux solides auroient les bases réciproques aux hauteurs, il faut concevoir que le parallelepipede ait d'abord été changé en une pyramide de même base; car on voit alors que la base de la seconde pyramide est à celle de la premiere réciproquement, comme la hauteur de la premiere à la hauteur de la seconde.

### COROLLAIRE II.

82. Tout ce que nous venons de dire peut s'appliquer aux prismes, aux cones, aux cylindres, & presque généralement à tous les corps. Ainsi on peut changer une sphere en un cylindre, qui auroit pour base le grand cercle de la sphere, & pour hauteur les deux tiers du diametre, parce qu'on sçait que la sphere est égale à ce cylindre; de même on changera une sphere en un cone, qui aura pour base le grand cercle, & pour hauteurs les quatre tiers du diametre, parce qu'on sçait qu'une demi-sphere étant les deux tiers d'un cylindre circonscrit de même hauteur, le cone

de même base & de même hauteur n'en est que le tiers; d'où il suit que le cone n'est que la moitié de la demi-sphere, & que par conséquent pour le faire égal à la demi-sphere, il faut lui donner une hauteur double, c'est-à-dire les quatre tiers du rayon, & que pour le faire égal à la sphere entiere, il faut lui donner les quatre tiers du diametre, &c.

Que si les bases étoient données, on feroit les hauteurs réciproques aux bases, comme il a été dit.

### COROLLAIRE III.

83. Et si on vouloit changer un solide en un autre, dont la base fût d'une autre espece, comme par exemple, un parallelepipede en un prisme, dont la base fût un pentagone regulier, on changeroit la base du parallelepipede en un pentagone regulier qui lui seroit égal, ainsi que nous l'enseignerons dans la remarque suivante, & on éleveroit sur les angles du pentagone des perpendiculaires égales à la hauteur du parallelepipede, par le sommet desquelles on feroit passer un plan, ce qui donneroit le prisme demandé, & ainsi des autres.

### REMARQUE.

84. Quoiqu'après tout ce que nous avons dit dans les Parties précedentes de cet Ouvrage, il soit facile de changer une surface plane rectiligne quelconque en polygone regulier; cependant comme les Commençans pourroient s'y trouver embarassés, je vais en enseigner la maniere en peu de mots. Je réduis d'abord la surface plane donnée en un triangle que je suppose être le triangle ABC (*Fig.* 50.), & si l'on demande, par exemple, un pentagone, je divise ce triangle en cinq parties égales par des lignes tirées du sommet sur la base. Je décris ensuite un cercle assez grand pour que l'un des triangles du pentagone inscrit, soit plus grand que la cinquiéme partie de mon triangle, & j'y inscris un pentagone, aux angles duquel je tire des rayons, ce qui divise le pentagone en ses cinq triangles. Je retranche de l'un de ces triangles OEC, un triangle égal à la cinquiéme partie du mien, ou au triangle ACD par une droite HL, parallele à la base EC, ainsi qu'il a été enseigné (*Partie 2. n.* 174.), & du centre O, intervalle OH, je décris un cercle dans lequel j'inscris un pentagone, lequel étant composé de cinq triangles égaux, chacun au triangle OHL, qui est égal au triangle ACD, est par conséquent

égal au triangle ABC, ou à la surface plane donnée.

Si l'on se donne la peine de relire l'endroit que nous venons de citer, on comprendra aisément que quand même le triangle OEC seroit moindre que le triangle ABD, on résoudroit également le Problême, parce que la quatriéme proportionnelle qu'on porte de O en I, tombant alors en-delà de la base EC, la parallele RP qu'on tireroit par I, formeroit toujours un triangle égal au triangle ABD, lequel seroit le triangle d'un pentagone inscrit dans le cercle, dont le rayon seroit OR; d'où il suit que le pentagone inscrit dans ce cercle, seroit égal au triangle ACD. Ainsi je n'ai dit qu'il falloit décrire un cercle un peu grand, que pour faciliter d'abord l'intelligence de ce Probleme.

## PROBLEME XV.

85. *Faire un parallelepipede égal à deux parallelepipedes donnés.* (Fig. 48.).

Je réduits l'un des parallelepipedes ABCDEFGH à avoir la hauteur commune *ae* de l'autre parallelepipede *abcdefgh*, en disant: La hauteur *ae* que je veux donner au parallelepipede ABCDEFGH, est à sa hauteur AE réciproquement, comme sa base ABCD est à un quatriéme terme qui sera la base qu'il faut lui donner, afin que le produit de cette base par la hauteur *ae*, soit encore égal au parallelepipede ABCDEFGH. Or en donnant à cette nouvelle base la hauteur AB, commune avec la base ABCD, ces deux bases seront entr'elles comme l'autre dimension; c'est pourquoi la proportion que nous venons de faire, se réduira à celle-ci: La hauteur *ae* est à la hauteur AE réciproquement comme la dimension AD de la base ABCD, est à un quatriéme terme qui sera l'autre dimension de la nouvelle base. Donc cette dimension étant appellée $z$, nous aurons $z \times AB$, égal à la base cherchée, & $z \times AB$ multiplié par la hauteur *ae*, sera égal au parallelepipede ABCDEFG. Maintenant je réduis la nouvelle base $z \times AB$ à avoir la dimension *ab* commune avec la base *abcd* de l'autre parallelepipede, en disant: La dimension *ab* que je veux donner à la base $z \times AB$, est à sa dimension AB réciproquement, comme sa dimension $z$ est à un quatriéme terme qui sera une dimension, laquelle étant multipliée par *ab*, donnera un produit égal à la base $z \times AB$. Appellant donc cette dimension $s$, nous aurons $s \times ab = z \times AB$, & par conséquent aussi $s \times ab \times ae = z \times AB \times ae$; donc le parallelepipede ABCDEFGH, sera égal au parallelepi-

pede

pede $s \times ab \times ae$, & nous aurons deux dimensions communes $ae$, $ab$; c'est pourquoi ajoutant ensemble les deux parallelepipedes $s \times ab \times ae, abcdefgh$, nous aurons un parallelepipede RSTVXMNO, égal aux deux parallelepipedes donnés.

Que si on donnoit une base sur laquelle il fallût faire un parallelepipede égal aux deux donnés, je ferois d'abord le parallelepipede RSTVMNOX, égal aux deux donnés, puis je dirois : La base donnée est à celle du parallelepipede RSTVMNOX réciproquement, comme la hauteur RM de ce parallelepipede est à un quatriéme terme, qui seroit la hauteur qu'il faudroit donner au parallelepipede fait sur la base donnée.

Et on trouveroit de la même façon un prisme, une pyramide, &c. égaux à deux ou plusieurs prismes, ou pyramides, &c.

## PROBLEME XVI.

86. *Faire un cube égal à un parallelepipede donné ABCDEFGH.* (Fig. 49.).

Je fais une base quarrée *abcd*, égale à la base ABCD du parallelepide; & je fais sur cette base un parallelepipede à qui je donne la hauteur AE, & qui par conséquent est égal au donné. Je prens deux moyennes proportionnelles entre le côté *ab* de la base & la hauteur *ae*, & supposant que ces deux proportionnelles soient *po*, *rs*, je fais un cube sur la premiere *po*, lequel est égal au parallelepipede donné.

Et pour le prouver, je prens sur *ae* une ligne *am* égale à *ab*; & je fais passer par *m* un plan *mntu*, ce qui me donne un cube *abcdmntu*, lequel est au parallelepipede *abedefgh*, comme la hauteur *am* à la hauteur *ae*, à cause de l'égalité des bases. Or le cube *abcdmntu*, est égal au côté *ab*, multiplié deux fois successivement par lui-même, & le parallelepipede est égal au quarré de ce côté multiplié par *ae*; donc nous avons $\overline{ab}^3 . \overline{ab}^2 \times ae :: ab . ae$. Or les qnatre lignes *ab*, *po*, *rs*, *ae*, étant en proportion continuë, nous avons $\overline{ab}^3 . \overline{po}^2 :: ab . ae$. donc puisque ces deux proportions ont trois termes égaux chacun à chacun, le quatriéme $\overline{ab}^2 \times ae$ est égal au quatriéme $\overline{po}^3$, & par conséquent le cube de la ligne *po*, est égal au parallelepipede $\overline{ab}^2 \times ae$, ou au parallelepipede donné.

### COROLLAIRE I.

87. Et si on demandoit de faire un cube égal à deux ou plusieurs parallelepipedes, on feroit d'abord un parallelepipede égal à la somme des donnés, par le Probleme précédent, puis on feroit un cube égal à ce parallelepipede.

### COROLLAIRE II.

88. De même si on vouloit un cube égal à deux ou plusieurs figures de differente espece, comme par exemple, à un parallelepipede, une pyramide & un prisme, on changeroit le prisme & la piramide en parallelepipedes, puis on feroit un parallelepipede égal à la somme des trois, & enfin un cube égal à ce parallelepipede.

### COROLLAIRE III.

89. Enfin pour faire un cube égal à deux ou plusieurs cubes de differentes grandeurs, on feroit de même un parallelepipede égal à la somme des cubes donnés, puis un cube égal à ce parallelepipede.

### PROBLEME XVII.

90. *Faire un cube double, triple, quadruple, &c. d'un cube donné.* (Fig. 51.).

Prenez une ligne DL double du côté AB du cube donné, divisez-la en deux également en M, & prenez deux moyennes proportionnelles DN, DO, entre DM & DL, le cube fait sur la premiere DN des deux moyennes, sera double du cube donné ABCDEFGH; car les quatre lignes DM, DN, DO, DL, étant en proportion continuë, on a $\overline{DM}.$ ou $\overline{AB}.\ \overline{DN}$ :: DM. ou AB. DL. & comme DL est double de AB, $\overline{DN}$ est par conséquent double de $\overline{AB}$, ou du cube donné.

Si on demandoit un cube triple, ou quadruple, &c. on feroit DL triple ou quadruple, &c. de AB, & l'on prendroit de même deux moyennes proportionnelles entre AB, & DL, &c.

Et si on demandoit un cube qui fût la moitié, le tiers ou le quart d'un autre cube, supposant que le côté du cube donné fût

DL ; on prendroit DM égal à la moitié, ou au tiers, ou au quart de DL, puis on chercheroit deux moyennes proportionnelles entre DL & DM, & l'on feroit un cube sur la premiere des deux, qui seroit alors DO, & non pas DN, parce que la proportion commenceroit par DL, & l'on auroit $\overline{DL}^3$. $\overline{DO}^3$ :: DL DM. & comme DM ne seroit que la moitié, le tiers ou le quart de DL, $\overline{DO}^3$ ne seroit aussi que la moitié, le tiers ou le quart de $\overline{DL}^3$.

Que si on demandoit un cube qui fût au cube ABCDEFGH, comme la ligne XZ à la ligne XV, on prolongeroit le côté AB du cube donné, en sorte que BA fût à BT, comme XV à XZ ; puis on prendroit deux moyennes proportionnelles entre BA & BT, & l'on feroit un cube sur la premiere B*a* ; car $\overline{BA}^3$. $\overline{Ba}^3$ :: BA. BT :: XV. XZ. & par conséquent $\overline{Ba}^3$. $\overline{BA}^3$ :: XZ. XV.

Enfin si on vouloit que le cube fût au cube donné ABCDEFGH, comme XV à XZ, on couperoit le côté AB, en sorte que BA. B*c* :: XZ. XV. puis prenant deux moyennes proportionnelles entre BA, B*c*, on feroit un cube sur la premiere B*d*, & l'on auroit $\overline{BA}^3$. $\overline{Bd}^3$ :: BA. *bc* :: XZ. XV. & par conséquent $\overline{Bd}^3$. $\overline{BA}^3$ :: XV. XZ.

## COROLLAIRE.

91. Pour faire un parallelepipede, ou une pyramide, ou un prisme, &c. qui fût, par exemple, double d'un parallelepipede, ou d'une pyramide, ou d'un prisme, &c. & qui lui fût semblable, on doubleroit d'abord l'une des dimensions de la base, puis on prendroit deux moyennes proportionnelles entre cette dimension & son double, & la premiere des deux seroit la premiere dimension du solide cherché ; ensuite on doubleroit l'autre dimension de la base, & l'on chercheroit entre cette dimension & son double deux moyennes proportionnelles, dont la premiere seroit la seconde dimension du solide ; enfin on doubleroit la hauteur & la premiere des deux moyennes proportionnelles entre la hauteur & son double, seroit la hauteur du solide demandé ; après

quoi il n'y auroit plus qu'à construire avec ces trois dimensions un solide semblable au solide donné.

Et l'on feroit la même chose si on demandoit un solide qui ne fût que le tiers, ou le quart, &c. du solide proposé, ou qui fût en raison donnée, observant toujours de prendre deux moyennes proportionnelles entre chaque dimension, & la ligne qui en seroit le tiers, ou le quart, &c, ou qui seroit avec elle dans la raison donnée.

Que si la base étoit un polygone regulier, alors il est visible que la moyenne proportionnelle pour l'un des côtez de la base, serviroit pour tous les autres, & qu'il n'y auroit plus qu'à chercher la moyenne proportionnelle pour la hauteur.

## PROBLEME XVIII.

92. *Deux ou plusieurs solides semblables étant donnés, trouver un solide semblable qui soit égal à leur somme* (Fig. 52.).

Soient deux prismes triangulaires semblables ABCDEF, *abcdef*, je fais un cube égal à leur somme, & je suppose que le côté de cube soit MN; je fais aussi un cube égal à l'un des prismes donnés, par exemple, au premier ABCDEF, & je suppose que son côté soit OP, ensuite je dis: Le côté OP est à la dimension AC de la base du premier prisme, comme le côté MN est à la dimension que je dois donner à la base du prisme demandé, & cette dimension RS étant trouvée, je la mets à part. Je dis de même: Le côté OP est à l'autre dimension XC de la base du premier prisme, comme le côté MN est à l'autre dimension que je dois donner à la base du prisme demandé, & cette dimension ZT étant trouvée, je la mets à part; je cherche de la même façon la hauteur RV, que je dois donner au prisme qu'on demande, & je fais sur les trois dimensions RS, ZT, RV, un prisme RSTHIV, qui est égal & semblable aux deux prismes donnés. Car par la construction nous avons quatre raisons égales, AB. RS :: XC. ZT :: AD. RV :: OP. MN. Donc la raison composée des trois premieres, est triplée de la quatriéme. Or les termes de la raison composée des trois premieres sont AB×XC×AD, & RS×ZT×RV, c'est-à-dire les doubles des prismes ABCDEF, RSTHIV, à cause que les bases de ces prismes étant des triangles, ne valent que la moitié du produit des dimensions; donc ces termes, ou leurs moitiés ABCDEF, RSTHIV, sont entr'eux

comme les cubes $\overline{OP}^3$. $\overline{MN}^3$. mais le prisme ABCDEF est égal au cube $\overline{OP}^3$ par la construction ; donc le prisme RSTHIV, est égal au cube $\overline{MN}^3$, & par conséquent aux deux prismes donnés ABCDEF, *abcdef*, & il est visible qu'il leur est semblable, à cause des trois dimensions proportionnelles.

## SECTION IV.

### *Suite de la Stereometrie.*

### DEFINITION XIV.

93. Les *corps reguliers* sont des solides compris sous plusieurs faces égales, & semblables entr'elles, dont tous les côtez & les angles sont égaux, ce qui fait que ces corps ont un centre également éloigné de tous leurs angles, & peuvent être inscrits dans une sphere.

Les corps reguliers s'appellent aussi *polyedres reguliers*, pour les distinguer des autres corps à plusieurs faces, qu'on nomme *polyedres irreguliers*.

On compte cinq corps reguliers, le *tetraedre*, qui est une pyramide compriſe sous quatre triangles équilateraux, le *cube*, ou l'*exaedre*, qui est compris sous six faces quarrées ; l'*octaedre*, qui a huit faces qui sont autant de triangles équilateraux (*Fig.* 53.) ; le *dodecaedre*, qui est compris sous douze pentagones (*Fig.* 54.), & l'*icosaedre*, qui a 20 triangles équilateraux (*Fig.* 55.).

94. Pour être convaincu qu'il ne peut y avoir que ces cinq corps reguliers, on n'a qu'à examiner quels sont les polygones reguliers qui peuvent former un angle solide, en se ressouvenant que la somme des angles plans qui composent un angle solide, doit toujours valoir moins de 360 degrez, ou de quatre angles droits. Cela posé, nous trouverons d'abord que trois triangles équilateraux peuvent faire un angle solide, parce que l'angle du triangle équilateral étant de 60 degrez, trois fois 60 font 180 degrez, & par conséquent moins de quatre angles droits. L'angle solide du *tetraedre* est composé de ces angles.

De même quatre triangles équilateraux peuvent encore former un angle solide, parce que quatre fois 60 font 240 ; ce qui

eſt encore inferieur à 360, & cet angle eſt l'angle ſolide de l'octaedre.

De même encore cinq fois 60 ne faiſant que 300, on peut former de cinq triangles équilateraux un angle ſolide, qui eſt celui de l'icoſaedre; après quoi il n'eſt plus poſſible d'en faire avec ces triangles, parce que 6 fois 60, font 360, ou quatre angles droits.

L'angle du quarré étant de 90, on peut former un angle ſolide avec trois quarrez; car 3 fois 90 ne font que 270, & cet angle eſt celui de l'exaedre, mais on n'en ſçauroit faire d'autre; car 4 fois 90 font 360.

L'angle du pentagone eſt de 108 degrez, & comme 3 fois 108 ne font que 324, on peut avec trois pentagones faire un angle ſolide qui eſt celui du *dodecaedre*, mais on n'en peut faire d'avantage, parce que 4 fois 108 font 432.

Trois exagones ne peuvent former un angle ſolide, parce que l'angle de l'exagone étant de 120 degrez, 3 fois 120 font 360; & comme les polygones d'un plus grand nombre de côtez ont les angles plus grands, il s'enſuit qu'on ne ſçauroit en former d'angles ſolides, & que par conſéquent il ne peut y avoir d'autres corps reguliers que ceux dont nous venons de parler.

95. Pour faire comprendre plus aiſément ce que nous devons dire au ſujet des corps reguliers, nous allons donner en peu de mots la maniere de les conſtruire avec du carton, afin qu'on ait la commodité de les avoir à la main à meſure qu'on lira les Problemes ſuivans.

Pour conſtruire un *tetraedre*, deſſinez ſur du carton quatre triangles équilateraux; rangez, comme la figure 56 les fait voir, après quoi coupez tout le carton qui les environne, & paſſant legerement la pointe d'un canif ſur le côté des triangles, vous n'aurez qu'à les replier, & ils prendront, pour ainſi dire, leur figure d'eux-même; de ſorte qu'il ne reſtera plus qu'à les coler.

Pour l'octaedre, tracez ſix quarrez égaux, que vous diſpoſerez comme la figure 57 le fait voir, & achevez le reſte comme nous venons de dire.

La figure 58 montre la diſpoſition qu'il faut donner aux huit triangles de l'octaedre; la figure 59 celle de 20 triangles de l'icoſaedre, & la figure 60, celle des douze pentagones du dodecaedre.

96. Les anciens Géometres ſe ſont fort étendus touchant les

corps reguliers ; mais comme la plûpart des choſes qu'ils en ont dites, ſont de pures ſpeculations fort inutiles, à cauſe du peu d'uſage que l'on fait de ces ſolides, je ne m'arrêterai ici que ſur ce qui regarde leur meſure, & le rapport qu'ils ont à la ſphere dans laquelle on les conçoit inſcrits.

## PROBLEME IX.

97. *Meſurer un tetraedre, & trouver le rapport de ſes côtez au diametre de la ſphere circonſcrite* (Fig. 61.).

Le tetraedre étant une pyramide, ſe meſurera en multipliant ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, ce qui eſt évident.

Quand au rapport de ſon côté au diametre de la ſphere, circonſcrivez autour de la baſe DBC un cercle ACBD, & par le point B tirez le diametre BA, qui coupe le côté oppoſé CD en deux également en E ; du centre O élevez ſur le plan du cercle la droite OP indéfinie, & du point B, intervalle BD, décrivez un arc qui coupe OP en P, prolongez OP en Q, & faites $OQ = \frac{1}{2} OP$, la droite PQ ſera le diametre de la ſphere circonſcrite au tetraedre, après quoi vous trouverez facilement le rapport de BP à PQ, comme on verra bien-tôt.

### DEMONSTRATION.

Tirez la droite AD, l'arc CAD étant de 120 degrez, l'arc AD qui en eſt la moitié, ſera de 60, & par conſéquent la corde AD eſt égale au rayon ; or dans le triangle rectangle ABD, le quarré de AB eſt égal au quarré de AD, plus le quarré de DB ; & comme le quarré de AB eſt quadruple du quarré de AD, il s'enſuit que le quarré de DB en eſt triple. Par la même raiſon dans le triangle BOP, $\overline{BP}^2 = \overline{OB}^2$. ou $\overline{AD}^2 + \overline{OP}^2$ ; mais $\overline{BP}^2 = \overline{BD}^2 = 3\overline{AD}^2 = \overline{AD}^2 + 2\overline{AD}^2$. donc $\overline{OP}^2 = 2\overline{AD}^2$. Or par la proprieté du cercle on a :: PO. OB. OQ. donc $\overline{PO}^2$. $\overline{OB}^2$ :: PO. OQ. & comme $\overline{PO}^2 = 2\overline{OB}^2$. ou $2\overline{AD}^2$. il s'enſuit que PO eſt double de OQ ; mais il eſt viſible que le cercle du diametre PQ eſt un grand cercle de la ſphere circonſcrite au tetraedre : car ſi l'on fait tourner le demi-cercle PBQ autour de ſon diametre, ſa circonference paſſera par tous les points du cercle ADCB, & par conſéquent par les deux angles D, C, du tetraedre, & comme elle paſſe déja par les deux autres P, B, il s'enſuit que tous les angles du tetrae-

dre, seront à la surface de la sphere décrite par ce demi-cercle; donc, &c.

### COROLLAIRE I.

98. *Le quarré du côté du tetraedre est égal à six fois le quarré du tiers du diametre de la sphere circonscrite.* Par la construction PQ=3OQ, & PO=2OQ; donc par la proprieté du cercle :: 2OQ. PB. 3OQ; donc $6OQ = \overline{PB}^2$.

### COROLLAIRE II.

99. *Le quarré du diametre de la sphere circonscrite est au quarré du côté du tetraedre, comme 3 à 2.* Le diametre PQ étant égal à 3OQ, son quarré est 9OQ, & le quarré de PB est 6OQ, comme on vient de voir; donc le quarré du diametre de la sphere, est au quarré de PB comme 9 à 6, ou comme 3 à 2.

### COROLLAIRE III.

100. *Le diametre de la sphere circonscrite, & le côté du tetraedre sont incommensurables entr'eux, & commensurables en puissance.* Leurs quarrez étant entr'eux comme 3 à 2, qui ne sont pas des nombres quarrés, leurs racines sont incommensurables. Donc, &c.

### PROBLEME XX.

101. *Mesurer un cube ou* exaedre, *& trouver le rapport de son côté au diametre de la sphere circonscrite* (Fig. 62.).

La mesure du cube est très-facile, puisqu'il n'y a qu'à multiplier l'un de ses côtez deux fois successivement par lui-même, comme il a été dit plus haut. Quant au raport de son côté avec le diametre de la sphere circonscrite, faites un angle droit ABC, dont l'un des côtez AB soit égal au côté du cube donné, & dont l'autre BC soit égal à la diagonale de la base BFCL, & joignez la droite AC qui sera le diametre de la sphere circonscrite.

### DEMONSTRATION.

Tirez dans la face AH parallele à la base, la diagonale AH, qui sera parallele à la diagonale BC, & vous aurez le parallelograme ABCH; donc AC sera la diagonale, & par conséquent le point du milieu O de cette diagonale étant également éloigné des angles A, B, C, H, sera le centre d'un cercle qui passera par les sommets

sommets de ces quatre angles ; or par la nature du cube le point O eſt autant éloigné des quatre autres angles R, I, T, L, que des quatre A, B, C, H, donc ce point O ſera auſſi le centre d'un cercle FIEL, qui paſſera par les ſommets des angles R, I, F, L, & qui ſera égal au premier cercle ABCH ; donc les deux cercles ABCH, FIEL, ſeront l'un & l'autre grands cercles de la ſphere circonſcrite, & par conſéquent AC ſera le diametre de cette ſphere.

### COROLLAIRE I.

102. *Le quarré du diametre de la ſphere circonſcrite, eſt triple du quarré du côté de l'exeadre.* Car $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$, à cauſe du triangle rectangle ABC ; mais $\overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$, parce que le quarré de la diagonale d'un quarré, eſt double du quarré du côté ; donc $\overline{AC}^2 = \overline{BA}^2 + 2\overline{BA}^2 = 3\overline{BA}^2$.

### COROLLAIRE II.

103. *Le diametre de la ſphere circonſcrite & le côté de l'*exeadre *ſont incommenſurables entr'eux, & commenſurables en puiſſances.* Ces quarrez étant entr'eux comme 3 à 1, ne ſont pas comme nombre quarré à nombre quarré, & par conſéquent leurs racines ſont incommenſurables.

### PROBLEME XXI.

104. *Meſurer un octaedre, & trouver le rapport de ſon côté au diametre de la ſphere circonſcrite* (Fig. 63.).

Faites un angle droit ABC, dont chaque jambe ſoit égale au côté de l'*octaedre*, & tirez la droite AC, qui ſera égale au diametre de la ſphere circonſcrite. Faites un quarré dont le côté ſoit égal au côté de l'octaedre, & multipliez ce quarré par le tiers de la moitié AO du diametre AC, le produit ſera la valeur de la moitié de l'*octaedre* ; c'eſt pourquoi doublant ce produit, vous aurez la valeur entiere de l'octaedre.

### DEMONSTRATION.

L'octaedre eſt compoſé de deux pyramides égales ABC, ADC, dont les baſes ſont adoſſées l'une contre l'autre. Ainſi faiſant paſſer un plan qui raſe la baſe commune, l'octaedre & la ſphere cir-

conſcrite ſeront diviſés en deux parties égales, & la ſection de l'octaedre ſera un quarré inſcrit dans la ſection de la ſphere; donc le diametre AC du quarré ſera auſſi le diametre du cercle.

Maintenant ſi au lieu de couper l'octaedre par les quatre angles AECH, je le coupe par les quatre EBHD, ce ſera la même choſe, & le cercle EBHD qui ſera la ſection de la ſphere, ſera égal & perpendiculaire au cercle AECH, à cauſe que les points B, D, ſont également éloignés des quatre A, E, C, H; donc les deux cercles ſeront l'un & l'autre grands cercles de la ſphere circonſcrite, & le diametre AC étant égal au diametre BD, on aura BO égal à AO; donc la pyramide AECHB ſera égale à la baſe AECH, multipliée par le tiers de OB, ou de OA, & l'autre pyramide AECHD égale auſſi à la même baſe multipliée par le même tiers; donc, &c.

### COROLLAIRE I.

105. *Le quarré du côté AB d'un octaedre eſt la moitié du quarré du diametre BD de la ſphere circonſcrite.* A cauſe du triangle rectangle BAD, on a $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$; or $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2$: donc $\overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2$.

### COROLLAIRE. II.

106. *Le côté de l'octaedre & le diametre de la ſphere circonſcrite ſont incommenſurables entr'eux;* car leurs quarrez ſont comme 1 à 2, qui ne ſont pas des nombres quarrez; donc, &c.

### PROBLEME XXII.

107. *Meſurer un* dodecaedre, *& trouver le rapport de ſon côté au diametre de la ſphere circonſcrite* (Fig. 64.).

Tirez ſur l'une des faces du *dodecaedre* une diagonale AF (*Fig.* 64.), conſtruiſez un quarré AFHC (*Fig.* 65.), dont le côté ſoit égal à AF, tirez dans ce quarré la diagonale AH, enfin faites un angle droit *fah*, dont le côté *af* ſoit égal à AF (*Fig* 65.), & le côté *ah* égal à AH, & tirez la droite *hf*, qui ſera égale au diametre de la ſphere circonſcrite.

Ce diametre étant trouvé, tirez du centre O de l'une des faces du *dodecaedre* (*Fig.* 64.), la droite OB à l'un des angles, prenez une ligne *ob* (*Fig.* 68.), égale à OB, & élevez à l'extrêmité *o* la perpendiculaire *og*, prenez la moitié du diametre *hf*, & du point

*b* (*Fig.* 68.), décrivez de cet intervalle un arc qui coupe la perpendiculaire *og* en *g*; enfin multipliez l'une des faces ABCDE du dodecaedre par le tiers de *og*, & le produit pris douze fois, sera la valeur du dodecaedre.

## DEMONSTRATION.

Prenez dans le dodecaedre quatre faces disposées comme les représente la figure 64, tirez dans les deux opposées ABCDE, DEFGH, les diagonales AC, FH, qui seront paralleles entr'elles, comme il est évident, coupez le dodecaedre par un plan qui rase ces deux lignes, ce plan coupera les deux autres faces dans les diagonales AF, CH, qui seront égales entr'elles & aux deux autres, & la section de ce même plan avec la sphere circonscrite, sera un cercle ACFH (*Fig.* 65.), dans lequel seront inscrites les quatre diagonales égales AC, FH, AF, CH; donc ces quatre diagonales formeront un quarré.

Or tout pentagone pouvant être divisé en trois triangles, les douze pentagones du dodecaedre pourront être divisés en 36 triangles, & comme le quarré ACFH en soutient 6, ainsi que la figure 64 le fait voir, il s'ensuit qu'on peut trouver dans le dodecaedre six quarrez égaux, lesquels seront inscrits dans la même sphere, & formeront un cube ou exaedre; mais le diametre de la sphere circonscrite est égal à la base d'un triangle rectangle *ahf*, dont un côté *af* est égal au côté du cube, & l'autre *ah* est égal à la diagonale de sa base; donc *hf* est le diametre de la sphere circonscrite.

Maintenant si de tous les angles du dodecaedre on tire des droites au centre, le dodecaedre sera divisé en douze pyramides égales; & comme ces pyramides auront les faces égales & la base reguliere, il est évident que la perpendiculaire tirée du sommet sur la base, tombera au centre de la base. Donc tirant du centre O la droite OB, cette ligne fera avec l'une des arêtes & avec la perpendiculaire, un triangle rectangle *obg* (*Fig.* 68.), dont le côté *og* sera la perpendiculaire, & le côté ou l'arête *gb* sera égale au rayon ou demi-diametre de la sphere. Ainsi multipliant la base ABCDE par le tiers de la hauteur *og*, on aura la pyramide, & douze fois cette pyramide sera la valeur totale du dodecaedre.

### COROLLAIRE.

108. *Le diametre de la sphere circonscrite, & le côté AB du dodecaedre sont incommensurables entr'eux & en puissance.* Le quarré du diametre est au quarré du côté AC du cube, comme 3 à 1, & par conséquent ces deux quarrez sont commensurables; mais le côté AB étant égal à la médiane de la diagonale AC, divisée en moyenne & extrême raison (*Partie premiere, n.* 349.), est incommensurable à cette diagonale, tant en elle-même qu'en puissance, donc le diametre de la sphere est aussi incommensurable, tant en lui-même qu'en puissance au côté AB.

Nous avons démontré (*Partie premiere, n.* 296.), que la médiane & la petite partie étoient incommensurables entr'elles & à la ligne entiere. Or pour faire voir qu'elles sont aussi incommensurables en puissance, appellons la ligne entiere A la médiane B, & la petite partie C; ainsi nous aurons :: A. C. B. Or dans cette proportion le premier & le troisiéme terme ne sont pas comme nombre à nombre, puisqu'ils sont incommensurables; donc les quarrez du premier & du second, qui sont entr'eux comme le premier au troisiéme, sont aussi incommensurables.

### PROBLEME XXIII.

109. *Mesurer un icosaedre, & trouver le rapport de son côté au diametre de la sphere circonscrite* (Fig. 67.).

Faites un pentagone dont le côté soit égal au côté de l'icosaedre, circonscrivez un cercle ABCDE (*Fig.* 66.), autour de ce pentagone; divisez l'un de ses arcs ED en deux également en I, & tirez la corde EI, qui sera celle du décagone; prenez deux fois cette corde, & joignez-la au rayon, la somme sera le diametre de la sphere circonscrite à l'icosaedre.

Du centre 2 de l'une des bases de l'icosaedre (*Fig.* 67.), tirez à l'un des angles la droite 2A, & prenant une ligne *ob* (*Fig.* 68.), égale à 2A, élevez sur l'extrêmité *o* une perpendiculaire indéfinie *og*, & de l'autre extrêmité prise pour centre, & d'un intervalle *bg* égal au-demi-diametre de la sphere, décrivez un arc qui coupe *og* en *g*; enfin multipliez l'une des faces de l'icosaedre par le tiers de *og*, & le produit pris 20 fois, sera égal à l'icosaedre.

### DEMONSTRATION.

L'angle solide de l'icosaedre est formé par cinq triangles équi-

lateraux (*Fig. 66.*), & par conséquent faisant passer un plan qui rase les bases de ces cinq triangles, on aura une pyramide dont la base sera un pentagone, & la section de ce plan & de la sphere sera un cercle ABCDE, dans lequel le pentagone sera inscrit. Or si l'on tient un icosaedre dans la situation où la figure 53. le représente, on trouvera qu'il est composé de deux pyramides, dont l'une a son sommet en A, & l'autre son sommet en B, en sorte que le diametre de la sphere passe par ces deux sommets, & qu'entre ces deux pyramides qui comprennent ensemble dix triangles, il se trouve une bande CD qui comprend les dix autres triangles. Ainsi les bases des deux pyramides sont paralleles, & ce qu'il y a à observer encore, c'est que les angles de la base inferieure ne se trouvent pas sous les angles de la base superieure, mais sous le milieu de leurs côtez.

Cela posé, concevons que les deux cercles ABCDEP, NLM (*Fig. 67.*), soient les cercles paralleles dans lesquels sont inscrits les pentagones qui forment les deux bases des pyramides. La pyramide superieure sera ABCDEO; du sommet O j'abbaisse sur le centre Q de la base la perpendiculaire OQ, qui sera la hauteur de la pyramide, & je tire le diametre PC. Dans le triangle OQC, l'hypotenuse OC est égale au côté du pentagone inscrit au cercle ABCDEP, & le côté QC est égal au côté de l'exagone inscrit dans le même cercle; donc l'autre côté OQ est égal au côté du décagone, ainsi qu'il a été enseigné en parlant de l'inscription & de la circonscription des polygones; la même chose arrivera à l'égard de la pyramide inferieure que nous n'avons pas marquée dans la figure, pour ne pas la broüiller par un trop grand nombre de lignes. Ainsi nous avons déja deux parties du diametre de la sphere, & il ne reste plus qu'à trouver la partie du milieu QR, ou HL qui lui est égale.

Pour cela je divise l'un des arcs du cercle superieur en deux parties égales en H, & je tire les cordes EH, DH, qui sont chacune égales au côté du décagone, & du point H je tire la perpendiculaire HL sur le cercle inferieur; enfin du point L je tire les droites LE, LD, qui forment avec ED l'un des triangles de la bande ou zone de l'icosaedre. Or dans le triangle rectangle HLD, l'hypotenuse LD est égale au côté ED du pentagone inscrit au cercle superieur, & le côté DH égal au côté du décagone; donc l'autre côté HL est égal au côté de l'exagone, ou au rayon QC. Donc le diametre de la sphere est égal à deux OQ,

ou à deux fois le côté du décagone inscrit au cercle ABCDEF ; plus HL, ou QR, ou CQ, qui est le rayon du même cercle.

Le reste de la démonstration est évident ; car on voit bien qu'en tirant de tous les angles de l'icosaedre des droites au centre, on divisera l'icosaedre en vingt pyramides, & que la hauteur de ces pyramides sera le côté d'un triangle rectangle, dont le rayon de la sphere sera l'hypotenuse, & l'un des côtez sera la droite tirée du centre de la base à l'un de ses angles.

## COROLLAIRE I.

110. *Le quarré du diametre de la sphere est quintuple du quarré du rayon CQ de l'un des deux cercles paralleles.* Tirez la droite MC (*Fig.* 67.), qui sera égale au diametre de la sphere. Dans le triangle MPC, le quarré $\overline{MC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PM}^2$ ; mais $\overline{PC}^2 = 4\overline{QC}^2$ & $\overline{PM}^2 = \overline{QC}^2$ ; donc $\overline{MC}^2 = 4\overline{QC}^2 + \overline{QC}^2 = 5\overline{QC}^2$.

## COROLLAIRE II.

111. *Le diametre de la sphere & le côté de l'icosaedre sont incommensurables entr'eux & en puissance.* Le côté du décagone inscrit dans un cercle est la médiane du rayon QC de ce cercle (*Partie* 1. *n.* 359.) ; donc ce côté & le rayon sont incommensurables entr'eux & en puissance, comme nous avons dit plus haut. Or le quarré du pentagone inscrit dans le même cercle, c'est-à-dire le quarré du côté AB de l'icosaedre est égal au quarré du rayon, plus le quarré du décagone ; donc le quarré du rayon est incommensurable au quarré du côté du pentagone : car s'il étoit commensurable, ce qui resteroit après l'avoir retranché du quarré du pentagone, seroit une partie qu'on pourroit exprimer en nombre, & qui par conséquent seroit commensurable au quarré de l'exagone. Or le quarré du diametre de la sphere est commensurable au quarré du rayon QC, puisque leur rapport est 5. 1. Donc le quarré du diametre de la sphere est incommensurable au quarré du pentagone, ou du côté AB de l'icosaedre ; que si les quarrez sont incommensurables, les racines le sont aussi. Donc, &c.

## DEFINITION XV.

112. Un solide CBDE (*Fig.* 69.), formé par la circonvolution d'une demi-parabole CBA autour de son axe AB, s'appelle *Paraboloïde*, celui qui est formé par la circonvolution d'une demi-

Ellipſe CBA (*Fig.* 70.), autour de ſon grand axe CA, ſe nomme *Ellipſoïde allongé*, pour le diſtinguer de l'*Ellipſoïde applati*, qui eſt fait par la circonvolution d'une demi-Ellipſe CBA (*Fig.* 71.), autour de ſon petit axe ; enfin le ſolide fait par une demi-hyperbole CBA (*Fig.* 72.), autour de ſon axe AB, s'appelle *hyperboloïde*.

Si la demi-parabole & la demi-hyperbole tournent autour d'une ordonnée CA à l'axe (*Fig.* 73. 74.), ils forment encore un paraboloïde & un hyperboloïde qu'il ne faut pas confondre avec les précedens, parce qu'il y a entr'eux une grande difference, comme on verra dans la ſuite.

Tous ces ſolides ſe nomment en général *conoïdes*, & en particulier *conoïde Parabolique*, *conoïde Elliptique*, allongé ou applati, & *conoïde hyperbolique*.

Il y a encore un autre ſolide fait par la circonvolution d'un polygone inſcrit à un demi-cercle, lequel tourne autour du diametre, & ce ſolide ſe nomme *ſpheroïde à faces* (Fig. 75.). On peut même à l'imitation de celui-ci en faire d'autres, qui ſeroient formés par la circonvolution d'un polygone inſcrit dans une demi-parabole, dans une demi-Ellipſe, & dans une demi-hyperbole, lequel tourneroit ou autour de l'axe, ou autour d'une ordonnée à l'axe, & ces ſolides ſe nommeroient *Paraboloïde*, ou *Ellipſoïde*, ou *Hyperboloïde à faces*.

Comme les conoïdes *à faces* ſont compoſés de *cones* & de cones tronqués, & quelquefois d'un cylindre, ce qui arrive lorſque le polygone inſcrit dans un demi-cercle & dans une demi-Ellipſe, eſt d'un nombre impair de côtez, il eſt viſible qu'en meſurant à part chacun de ces petits ſolides, la ſomme totale ſera la valeur du conoïde à face ; ainſi nous n'en parlerons pas davantage.

## *Proprietez des conoïdes.*

113. *La baſe d'un conoïde, ſoit qu'il ſoit autour de l'axe, ou autour d'une ordonnée à l'axe, eſt toujours un cercle.* Ce qui eſt trop évident pour avoir beſoin d'une démonſtration.

114. *Si l'on coupe un paraboloïde KACG* (Fig. 76.), *par des plans paralleles à la baſe, les ſections de ces plans & du paraboloïde ſeront des cercles.* Si l'on coupe le paraboloïde par un plan KAC perpendiculaire à la baſe, & qui raſe l'axe AB, ce plan ſera une parabole, dont la moitié BAC ſera la demi-parabole qui a formé le ſolide

par sa circonvolution, & les sections de ce plan, & des plans paralleles à la base, seront les ordonnées RS, TV, XZ, à cette demi-parabole. Or il est visible que tandis que la demi-parabole tourne autour de son axe, chacune de ces ordonnées décrit un demi-cercle parallele à la base ; donc, &c. & il faut dire la même chose des autres conoïdes.

115. *De même que la demi-Parabole, la demi-Ellipse, &c. ne sont autre chose que la somme des ordonnées à l'axe, de même aussi le Paraboloïde, l'Ellipsoïde, &c. ne sont autre chose que la somme des cercles décrits par ces ordonnées.* Cela est évident, & n'a pas besoin de démonstration.

116. *Si on coupe une demi-Parabole BAC* (Fig. 76.), *par un plan EFGH, qui lui soit perpendiculaire, mais dont la section commune IL soit ordonnée à un diametre & non pas à l'axe, & que ce plan demeurant immobile, on fasse tourner la demi-Parabole autour de son axe, l'arc ISVZL du segment ISVZL, coupé par le plan, coupera ce plan EFGH en allant & en revenant, & y formera une courbe* IabcLdef, *dont la section IL sera l'axe.* Tirant les ordonnées RS, TV, XZ, &c. ces ordonnées en tournant autour de l'axe, formeront des cercles perpendiculaires au plan de la demi-parabole, & qui seront par conséquent perpendiculaires au plan EFHG ; donc leurs communes sections *af*, *be*, *cd*, avec ce plan, seront perpendiculaires au plan de la demi-parabole, & par conséquent perpendiculaires aussi aux ordonnées ou rayons RS, TV, XZ ; or les droites *af*, *be*, *cd*, sont les cordes des segmens de cercles *aSf*, *bVe*, *cZd*, que le plan EFHG coupe dans les trois cercles, & les rayons RS, TV, XZ, sont perpendiculaires à ces cordes, dont ces cordes sont coupées en deux également par les rayons, ou par la droite IL, qui passe par les mêmes points où les rayons les coupent ; & comme la même chose se trouvera toujours dans tous les cercles décrits par les ordonnées, & qui couperont le plan EFHG, il s'ensuit que la droite IL a tous ses points également éloignés de part & d'autre de la courbe I*abc*L*def*, & qu'elle est l'axe de cette courbe. La même chose se doit dire d'une demi-Ellipse, ou d'une hyperbole qui seroient coupées par un plan EFHG de la même façon.

Comme c'est la même chose que le plan EFHG, soit coupé par le mouvement de la demi-parabole qui décrit le paraboloïde, ou que le plan coupe le paraboloïde déja formé, il s'ensuit que la section de tout plan EFHG, qui coupe un conoïde autour de son

son axe, obliquement à cet axe, est une surface I*abc*L*def*, environnée d'une courbe, dont l'axe IL se trouve, en coupant le paraboloïde par un plan perpendiculaire à sa base & au plan coupant EFGH.

Maintenant pour déterminer la nature de la courbe I*abc*L*def*, considerez la figure 77, qui représente un conoïde coupé obliquement à l'axe par le plan DFGHEMLI, dont l'axe est la droite DE; coupez DE en deux également en *b*, & tirez dans le plan KAC, qui représente la parabole, la double ordonnée T*b*R qui passe par le point *b*, du point *b* tirez le diametre *b*Q, auquel la droite DE est ordonnée; enfin du point Q tirez la tangente Q*x*, & du sommet A la tangente Az, qui coupera la tangente Q*x* en *z*.

Les deux droites TR, DE, se coupant dans la parabole, on a T*b*×*b*R. D*b*×*b*E. ou $\overline{D\,b}^{2}$ :: $\overline{Az}^{2}$. $\overline{zQ}^{2}$. ainsi qu'il a été enseigné dans les Sections coniques. Mais le cercle du rayon TR étant perpendiculaire au plan coupant, leur section commune G*b* est perpendiculaire sur TR; donc par la nature du cercle nous avons $\overline{G\,b}^{2}$ = T*b*×*b*R. Donc $\overline{G\,b}^{2}$. $\overline{D\,b}^{2}$ :: $\overline{Az}^{2}$. $\overline{zQ}^{2}$.

Tirons d'autres doubles ordonnées à l'axe PQ, VS, qui coupent DE en *a* & en *c*, & nous trouverons de même $\overline{Fa}^{2}$. D*a* × *a*E :: $\overline{Az}^{2}$. $\overline{zQ}^{2}$. & $\overline{Hc}^{2}$. D*c*×*c*E :: $\overline{Az}^{2}$. $\overline{zQ}^{2}$. donc $\overline{Fa}^{2}$. D*a* × *a*E :: $\overline{Hc}^{2}$. D*c*×*c*E. donc les quarrez des ornonnées F*a*, G*b*, H*c*, a la courbe DFGH, &c. sont entr'eux comme les rectangles des parties qu'elles coupent sur l'axe DE; & par conséquent la courbe est une Ellipse, & comme la tangente Az est moindre que zQ, ainsi qu'il a été démontré en parlant des tangentes des Sections coniques, il s'ensuit que G*b* est la moitié du petit axe, & D*b* la moitié du grand, à cause de $\overline{G\,b}^{2}$. $\overline{D\,b}^{2}$ :: $\overline{Az}^{2}$. $\overline{zQ}^{2}$.

On démontrera la même chose à l'égard des autres conoïdes, en faisant seulement attention que dans l'Ellipsoïde applati, G*b* sera la moitié du grand axe, & D*b* la moitié du petit; ce qui est assez évident de soi-même.

Pour abreger, j'appellerai dorénavant *coupe génératrice* le plan KAC, qui est perpendiculaire sur la base du conoïde, & qui rase l'axe, parce que la moitié BAC de ce plan produit le conoïde

par sa circonvolution autour de l'axe.

117. *Si l'on coupe un segment de conoïde ABE* (Fig. 78.), *par des plans FGD, &c. paralleles au plan AIE, qui a retranché le segment du conoïde, les sections seront des Ellipses FGDF, &c. semblables à l'Ellipse AIEA.* Soit ABE dans le plan de la coupe génératrice, les Ellipses FGD, AIE, seront perpendiculaires à ce plan, & si l'on conçoit que deux cercles paralleles à la base, coupent les deux Ellipses, & que leurs sections soient les droites IK, GH, ces droites seront perpendiculaires à la coupe génératrice, & aux axes AE, FD; ainsi chacune d'elles sera ordonnée à son axe. Or nous venons de voir que $\overline{IK}^2$. $\overline{AK}^2$ :: $\overline{Bz}^2$. $\overline{zC}^2$. donc nous trouverons aussi $\overline{GH}^2$. $\overline{FH}^2$ :: $\overline{Bz}^2$. $\overline{zC}^2$. donc $\overline{IK}^2$. $\overline{AK}^2$ :: $\overline{GH}^2$. $\overline{FH}^2$. & par conséquent IK. AK :: GH. FH. ainsi les Ellipses FGD, AIE, ayant leurs axes proportionnels, sont semblables entr'elles.

118. *Tous les segmens de paraboloïde sont proportionnels entr'eux.* Soit le segment ABC (*Fig.* 79.), coupé par un plan AEC parallele à la base, & le segment *abc* (*Fig.* 80.), coupé par un plan *aec*, oblique à l'axe, je coupe l'axe BD du premier en plusieurs parties égales aux points G, H, & le diametre *bd* du second en un même nombre de parties égales aux points *g*, *h*, ainsi ces parties seront proportionnelles les unes aux autres. Je fais passer par les points de division des plans paralleles aux bases AEC, *aec*, & les sections de ces plans sont des cercles dans le segment ABC, & des Ellipses semblables dans le segment *abc*. Or les Ellipses semblables étant entr'elles comme les quarrez de leurs demi-axes, l'Ellipse *aec* est à l'Ellipse *ohn*, comme $\overline{dc}^2$ à $\overline{hn}^2$, ou comme *db* à *hb* par la nature de la parabole, & de même l'Ellipse *on* est à l'Ellipse *rm*, comme *hb* à *gb*; mais *db* est à *hb*, comme DB à HB, ou comme le cercle AEC au cercle ON; donc l'Ellipse *aec* est à l'Ellipse *on*, comme le cercle AEC au cercle ON: & par la même raison l'Ellipse *on* est à l'Ellipse *rm*, comme le cercle ON au cercle RM. Ainsi toutes les Ellipses du segment *abc*, sont proportionnelles aux cercles du segment ABC, & elles sont entr'elles comme l'Ellipse *aec* au cercle AOC. Je circonscris à l'un & l'autre segment des cylindres AP, OQ, RS, *ap*, *oq*, *rs*, compris entre les plans paralleles aux bases. Le cylindre *ap* est au cylindre AP en raison composée de l'Ellipse

*aec* au cercle AEC, & de la hauteur *dh* à la hauteur DH, ou du diametre *db* à l'axe DB, à cause de *dh. db* :: DH. DB. Je prens pour les hauteurs des cylindres *ap*, *oq*, &c. les parties *dh*, *hg*, &c. du diametre *bd*, au lieu des parties de la perpendiculaire *bx*, qui sont les véritables hauteurs; mais cela n'importe pas, parce que les parties de la ligne *bx* sont proportionnelles à celles du diametre *db*, & qu'il ne s'agit ici que de cela.

De même les cylindres *oq*, OQ, sont en raison composée de l'Ellipse *on* au cercle ON, ou de l'Ellipse *aec* au cercle AEC, & de la hauteur *hg* à la hauteur HG, ou de *db* à DB; donc ces deux cylindres sont en même raison que les cylindres *ap*, AP, & il en est de même des cylindres *rs*, RS. Mais en supposant que l'axe BD ait été divisé en parties infiniment petites, & le diametre *db* en un même nombre de parties proportionnelles, les cylindres circonscrits dans l'un & l'autre, ne different pas de ces segmens; donc puisque chaque cylindre est proportionnel à chaque cylindre, la somme des cylindres d'une part, c'est-à-dire le segment *abd*, sera proportionnel à la somme de l'autre, ou au segment ABD.

119. *Deux segmens d'un Ellipsoïde ou d'un hyperboloïde sont proportionnels, lorsque les parties de leurs diametres compriſes entre leurs sommets & leurs bases, sont proportionnelles à leurs diametres.* Soient le segment d'hyperboloïde ABC (*Fig.* 81.), coupé par un plan parallele à la base du conoïde, & le segment *abc* coupé par un plan oblique à l'axe, je considere les plans ABC, *abc*, comme étant parties de la coupe generatrice, & je suppose que DB est à DX, comme *db* à *bx*; DX, comme on voit, est l'axe du premier segment, & *dx* est le diametre du second. Je coupe DB en parties égales aux points G, H, & *db* en un égal nombre de parties en *g* & *h*, lesquelles seront proportionnelles aux parties du premier segment; je fais passer par les points de division G, H, des plans QM, PN, paralleles à la base, & par les points de division *g*, *h*, des plans *qm*, *pn*, paralleles à la base; enfin je circonscris des cylindres AP, OQ, RS, *ap*, *oq*, *rs*, à l'un & l'autre segment. Les Ellipses *pn*, *ac*, étant semblables, sont entr'elles comme les quarrez *hn*, *dc*, de leurs demi-grands axes. Or par la nature de l'hyperbole, on a $\overline{dc}^2 . \overline{hn}^2$ :: *db*×*dx*. *hb*×*hx*. Or *db*×*dx*. *hb*×*hx* :: DB×DX. HB×HX. car par la construction on a DB. *db* :: DX. *dx*. & HB. *hb* :: HX. *hx*. & la raison qui regne

dans la premiere proportion, eſt la même qui regne dans la ſeconde; donc la raiſon compoſée DB×DX. *db*×*dx*. des deux premieres raiſons, eſt égale à la raiſon compoſée HB×HX. *hb*×*hx*. des deux dernieres. Donc puiſque $\overline{dc}^2 . \overline{hn}^2$ :: *db*×*dx*. *hb*×*hx*. on a auſſi $\overline{dc}^2 . \overline{hn}^2$ :: DB×DX. HB×HX. donc les Ellipſes *ac*, *pn*, ſont entr'elles comme DB×DX. HB×HX. mais les cercles AC, PN, étant entr'eux comme les quarrez de leurs rayons DC, HN, ſont auſſi comme DB×DX. HB×HX. donc les Ellipſes *ac*, *pn*, ſont entr'elles comme les cercles AC, PN, & on prouvera la même choſe des autres Ellipſes & des autres cercles. Ainſi toutes les Ellipſes du ſegment *abc*, ſont entr'elles comme les cercles du ſegment ABC, ou comme l'Ellipſe *ac* au cercle AC.

Or les cylindres circonſcrits au ſegment *abc*, ſont aux cylindres circonſcrits au ſegment ABC en raiſon compoſée de la raiſon de leurs baſes qui eſt toujours la même, c'eſt-à-dire *ac*, AC, & de la raiſon de leurs hauteurs qui eſt encore la même, c'eſt-à-dire *db*, DB; car *dh*. DH :: *db*. DB. & *hg*. HG :: *db*. DB. &c. donc les cylindres du ſegment *abc*, ſont proportionnels aux cylindres du ſegment ABC. Mais ſi on conçoit que les diviſions de BD ſoient infiniment petites, & que celles de *bd* leur ſoient toujours proportionnelles, les cylindres circonſcrits de part & d'autre, ne differeront plus des ſegmens; donc les ſegmens ſont proportionnels.

120. *Si deux ſegmens proportionnels ont les baſes égales, ils ſont entr'eux comme leurs hauteurs.* Suppoſons que l'Ellipſe *ac* (*Fig.* 81.), ſoit égale au cercle AC, le cylindre circonſcrit *ap* ſera au cylindre circonſcrit AP, comme la hauteur *db* à la hauteur DH, ou comme *db* à DB; & comme les baſes des autres cylindres circonſcrits au ſegment *abc*, ſeront auſſi égales aux baſes des autres cylindres circonſcrits au ſegment ABC, parce qu'elles ſont entr'elles comme *ac*, AC, il s'enſuit que tous les cylindres *ap*, *oq*, *rs*, ſeront aux cylindres AP, OQ, RS, comme *db* à DB, & par conſéquent les ſegmens ſeront auſſi entr'eux comme *ad*, DB, ou pour parler plus correctement, comme *bz* à DB; car *bz* eſt la véritable hauteur du ſegment *abc*, & je n'ai mis *bd* juſqu'ici que pour ne pas broüiller les figures.

*Si les hauteurs ſont égales, les ſegmens ſont entr'eux comme les baſes* ac, *AC*; ce qui ſe démontre de la même façon.

Enfin *si les baſes ſont réciproques aux hauteurs, c'eſt-à-dire* ac, *AC* :: *DB. bz. les ſegmens ſeront égaux;* car alors chaque cylindre ſera égal à chaque cylindre, &c.

121. *Si deux ſegmens de paraboloïde ABC, DEBR* (Fig. 82.), *ont leurs diametres BH, PS, égaux, ils ſont égaux entr'eux.* Soit la coupe generatrice DBCT, nous avons démontré, en parlant de la parabole, que quand BH, PS, ſont égaux, les ſegmens ABC, DAB, de la parabole ou de la coupe generatrice, ſont égaux, & que leurs baſes AC, DB, ſont entr'elles réciproquement comme leurs hauteurs PG, BH; coupons la coupe generatrice par un plan parallele à la baſe AC, & qui paſſe par S, qui eſt le point de milieu de DB. Nous avons encore démontré (*Partie 3. n.* 118.), que quand deux droites AC, DB, ſont baſes des ſegmens égaux, la droite RT qui paſſe par le milieu S de l'une des deux DB, & qui eſt parallele à l'autre AC, fait le rectangle RS×ST, égal au quarré AH de la moitié de la parallele AC. Or le cercle RET étant perpendiculaire à la coupe generatrice & à la baſe DEB, la commune ſection SE eſt perpendiculaire à la coupe generatrice, & par conſéquent à RT; donc par la nature du cercle $\overline{SE}^2 = RS \times ST$. donc $\overline{SE}^2 = \overline{AH}^2$. & SE = AH. donc la moitié du petit axe de l'Ellipſe DEBR, eſt égale à la moitié du diametre du cercle AC; donc l'Ellipſe eſt au cercle comme ſon grand axe DB au diametre AC; mais DB. AC :: BH. PG. ainſi que nous avons déja dit; donc les ſegmens de paraboloïde DEBR, ABC, ont leurs baſes & leurs hauteurs réciproques, & par conſéquent ils ſont égaux.

122. *Si deux ſegmens d'Ellipſoïde ou d'hyperboloïde ont les parties BD, bd, de leurs diametres* (Fig. 81.), *proportionnelles à leurs diametres, ils ſont égaux entr'eux*; ce qu'on démontrera de la même façon en conſtruiſant ainſi que nous avons fait pour la parabole (*Fig.* 82.).

123. *Si l'on coupe un paraboloïde* (Fig. 83.), *par un plan EFG; perpendiculaire à la baſe, la ſection EFG ſera une parabole.* Soit ABC la coupe generatrice priſe perpendiculaire au plan EFG; coupons encore le paraboloïde par des plans MN, IL, paralleles à la baſe, & qui coupent le plan EFG, & par un autre plan FH, auſſi parallele à la baſe, & qui paſſe par le ſommet F du plan EFG. Les ſections communes QR, PO des plans paralleles & du plan EFG, ſeront perpendiculaires ſur la coupe

generatrice, à cauſe que EFG, & les plans paralleles ſont perpendiculaires ſur cette coupe. Mais par la nature du cercle $\overline{PO}^2 = IO \times OL$. & $\overline{QR}^2 = MR \times RN$. & la droite IL étant coupée en deux également en V, & en deux inégalement en O, on a $IO \times OL = \overline{IV}^2 - \overline{OV}^2$, & à cauſe de $OV = FT$, on a $IO \times OL = \overline{IV}^2 - \overline{FT}^2$. Or par la nature de la parabole $\overline{IV}^2 . \overline{FT}^2 :: VB . TB$. donc $\overline{IV}^2 - \overline{FT}^2 . \overline{FT}^2 :: VB - TB . TB$. mais $VB - TB = VT = OF$, & $\overline{IV}^2 - \overline{FT}^2 = IO \times OL = \overline{PO}^2$. donc $\overline{PO}^2 . \overline{FT}^2 :: OF . TB$. ou $\overline{PO}^2 . OF :: \overline{FT}^2 . TB$.

On démontrera de même que $\overline{QR}^2 = MR \times RN = \overline{MX}^2 - \overline{RX}^2 = \overline{MX}^2 - \overline{FT}^2$. & comme $\overline{MX}^2 . \overline{FT}^2 :: XB . TB$, donc $\overline{MX}^2 - \overline{FT}^2 . \overline{FT}^2 :: XB - TB . TB :: XT . TB :: RF . TB$. & par conſéquent $\overline{QR}^2 . \overline{FT}^2 :: RF . TB$. ou $\overline{QR}^2 . RF :: \overline{FT}^2 . TB$. mais nous avons trouvé $\overline{PO}^2 . OF :: \overline{FT}^2 . TB$. donc nous avons auſſi $\overline{QR}^2 . RF :: \overline{PO}^2 . OF$. & par conſéquent la ſection EFG eſt une parabole.

On démontrera à peu près de la même façon que ſi l'on coupe une Ellipſoïde par un plan perpendiculaire au cercle de l'un de ſes axes, & une hyperboloïde par un plan perpendiculaire à ſa baſe, la ſection ſera une Ellipſe dans l'un, & une hyperboloïde dans l'autre.

124. *Si l'on coupe un paraboloïde ABCD* (Fig. 84.), *par des plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires à la baſe, les ſections EFG, HIK, LMN, ſeront des paraboles, dont le parametre ſera toujours le même, c'eſt-à-dire celui de la ſection generatrice.* Si l'on conçoit que toutes ces ſections tombent toujours parallelement à elle-même ſur la coupe generatrice, ainſi qu'il eſt repréſenté (*Fig.* 85.), de même que nous avons trouvé (*Fig.* 83.), $\overline{QR}^2 . RF :: \overline{FT}^2 . TB$. & $\overline{ES}^2 . SF :: \overline{FT}^2 . TB :: \overline{AZ}^2 . ZB$. de même auſſi (*Fig.* 85.), nous trouverons $\overline{ND}^2 . DI :: \overline{CD}^2 . DB$. & $\overline{KD}^2 . Dh :: \overline{CD}^2 . DB$.

&c. donc $\overline{ND}^2$. $\overline{CD}^2$:: D*i*. DB. mais appellant *p* le parametre de $\overline{ND}^2$, & *q* le parametre de $\overline{CD}^2$, on aura $\overline{ND}^2 = Di \times p$. & $\overline{CD}^2 = DB \times q$. donc $Di \times p$. $DB \times q$:: D*i*. DB. donc *p* doit être égal à *q*; car si l'un étoit plus grand ou moindre que l'autre, la raison $Di \times p$. $DB \times q$. seroit composée des raisons D*i*. DB. *p*. *q*. & par conséquent la raison $Di \times p$. $DB \times q$. ne seroit pas égale à la raison D*i*. DB. ni à la raison $\overline{ND}^2$. $\overline{CD}^2$.

## PROBLEME XXIV.

125. *Mesurer un paraboloïde* (Fig. 86.).

Multipliez la base ADC par la moitié de la hauteur OB, & le produit sera la valeur du paraboloïde.

### DEMONSTRATION.

Le paraboloïde n'est autre chose qu'une suite infinie de cercles paralleles à la base, & dont les rayons sont les ordonnées HI, RE, ST, &c. de la coupe generatrice; & comme ces cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs rayons, & que par la nature de la parabole ces quarrez sont entr'eux comme les abscisses BI, BE, BT, &c. qui sont entr'elles comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3. 4. &c. à l'infini, il s'ensuit que les cercles infinis qui composent le paraboloïde, sont entr'eux comme ces nombres; mais par l'Arithmetique des infinis, on sçait que la suite infinie 0. 1. 2. 3. 4. &c. est égale au plus grand terme multiplié par la moitié du nombre des termes; donc la somme des cercles du paraboloïde est égale au plus grand ADC, multiplié par la moitié du nombre des termes qui est ici BO, & par conséquent par OE, qui est la moitié de OB.

### COROLLAIRE I.

126. *Le paraboloïde est égal à la moitié d'un cylindre APQC de même base & de même hauteur.* Ce cylindre est égal à la base ADC, multiplié par la hauteur entiere OB, au lieu que le paraboloïde ne vaut que la moitié de ce produit; donc, &c.

### COROLLAIRE II.

127. Un segment *abc* de paraboloïde (*Fig.* 80.), se mesurera

de même en multipliant sa base *aec* par la moitié de la perpendiculaire *bx*, tirée du sommet *b* de son diametre *bd* sur sa base; car ce segment est composé d'une infinité d'Ellipses, qui sont entr'elles comme les quarrez de leurs demi-grands axes *gm*, *hn*, *de*, lesquels quarrez sont entr'eux comme leurs abscisses *bg*, *bh*, *bd*, ou comme la suite infinie des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c. donc, &c.

Ou bien prenez sur l'axe du paraboloïde la partie BD, égale au diametre *bd*, & mesurez le segment droit ABC de la même façon qu'on mesure le paraboloïde, & le produit sera égal au segment *bdc* (*n.* 122.).

### COROLLAIRE III.

128. Pour mesurer un paraboloïde tronqué ARXC (*Fig.* 86.), par un plan parallele à sa base, mesurez le paraboloïde entier, & le segment droit RBX, ôtez de la valeur du paraboloïde la valeur du segment, & le reste sera la valeur du paraboloïde tronqué.

### COROLLAIRE IV.

129. Et si le paraboloïde étoit tronqué par un plan DFGEQ, oblique à l'axe (*Fig.* 77.), mesurez le segment DFGERQ, & le paraboloïde, & retranchant l'un de l'autre, le reste sera le paraboloïde tronqué.

### PROBLEME XXV.

130. *Mesurer un Ellipsoïde allongé, & un Ellipsoïde applati.*

Pour mesurer un Ellipsoïde allongé ABCD (*Fig.* 87.), multipliez le cercle BD fait autour de son petit axe par les deux tiers du grand, & le produit sera la valeur de l'Ellipsoïde.

### DEMONSTRATION.

L'Ellipsoïde est composé d'une infinité de cercles, dont les rayons EF, HD, RX, sont proportionnels aux rayons EG, HI, RS, des cercles qui composent la sphere circonscrite. Donc les cercles sont aussi proportionnels, puisqu'ils sont en raison doublée de leurs rayons; & par conséquent ils sont entr'eux comme le cercle du rayon HD, ou du demi-petit axe au cercle du rayon HI, ou du demi-diametre de la sphere. Or pour avoir la valeur des cercles qui composent la sphere, il faut multiplier le grand cercle

cercle, ou le cercle du rayon HI par les deux tiers du diametre AC, ou du grand axe de l'Ellipſe ; donc pour avoir la valeur de l'Ellipſoïde, il faut multiplier le cercle du rayon HD, ou du demi-petit axe par les deux tiers du grand axe AC.

### COROLLAIRE I.

131. Pour avoir la valeur d'un ſegment RAF, il faut meſurer le ſegment correſpondant ZG de la ſphere, puis dire : Comme le cercle ZG eſt au cercle RF, ainſi le ſegment ZAG eſt au ſegment RAF. Car tous les cercles qui compoſent le ſegment de ſphere, & ceux qui compoſent le ſegment d'Ellipſe, étant proportionnels, ils ſont entr'eux comme le cercle ZG au cercle RF.

### COROLLAIRE II.

132. On meſurera une zone BRFD en meſurant d'abord la zone correſpondante ZGXI de la ſphere circonſcrite, puis cherchant une quatriéme proportionnelle au cercle XI, au cercle BD, & à la zone ZGXI ; ce qui eſt évident, parce que les cercles qui compoſent la zone ſpherique, ſont aux cercles de la zone Elliptique, comme le cercle XI, au cercle BD.

### COROLLAIRE III.

133. Pour avoir la valeur d'un ſecteur ABDC d'Ellipſoïde (*Fig.* 88.), on meſurera le ſecteur correſpondant RBSD de la ſphere circonſcrite, puis on dira : Le cercle RS eſt au cercle AC, comme le ſecteur RBSD à un quatriéme terme qui ſera le ſecteur ABCD ; car les deux ſecteurs ſont compoſés chacun d'un ſegment & d'un cone ; or les ſegmens ſont entr'eux comme le cercle RS au cercle AC, & les cones ayant la hauteur commune, ſont auſſi entr'eux comme les cercles RS, AC, qui leur ſervent de baſe.

### COROLLAIRE IV.

134. Que s'il falloit meſurer un ſegment ABC oblique à l'axe (*Fig.* 89.), on tireroit ſon demi-diametre BO, puis on couperoit le grand axe en H, en ſorte que EH fût à HO, comme BD à DO ; & par le point H on feroit paſſer un plan parallele au cercle du petit axe, ce qui donneroit un ſegment droit, dont la valeur ſeroit égale au ſegment incliné, ainſi qu'il a été prouvé ci-

dessus, & ce seroit la même chose si on vouloit mesurer un secteur oblique.

### COROLLAIRE V.

135. Pour mesurer un Ellipsoïde applati ABCD, on multipliera le cercle fait autour du grand axe par les deux tiers du petit axe; car cet Ellipsoïde est composé d'une infinité de cercles, dont les rayons DE, FB, OH, sont proportionnels aux rayons des cercles qui composent la sphere, dont le diametre est le petit axe, & par conséquent ces rayons étant entr'eux comme le grand axe au petit, les cercles sont entr'eux comme le cercle autour du grand axe est au cercle fait autour du petit axe; mais comme pour avoir la solidité de la sphere inscrite, il faut multiplier son grand cercle ou le cercle autour du petit axe par les deux tiers de cet axe; de même pour avoir la solidité du spheroïde applati, il faut multiplier le cercle fait autour du grand axe par les deux tiers du petit axe.

Les segmens, les secteurs & les zones de l'Ellipse applati, se mesureront par les mêmes principes, en suivant les regles données ci-dessus.

### PROBLEME XXVI.

136. *Mesurer une Ellipsoide allongé, tronqué par deux plans paralleles au cercle du petit diametre, & également éloignés du centre Z de l'Ellipsoïde* (Fig. 91.).

Il est évident qu'en retranchant de l'Ellipsoïde entier les segmens AEB, CFD, le reste sera le spheroïde tronqué; mais comme la plûpart des tonneaux qu'on jauge, sont des Ellipsoïdes tronqués, & qu'on se sert pour cela d'autres regles qu'il est bon de sçavoir, nous avons fait de ceci un Probleme particulier.

Commençons d'abord par une sphere tronquée GHLI, par deux plans paralleles entr'eux, & également éloignés du centre Z; & pour en avoir la solidité, mesurez le cercle GH, qui est l'un des plans coupans, & ajoûtant sa valeur au double du cercle RS qui passe par le centre, multipliez la somme par le tiers de la hauteur OQ, & le produit sera la valeur de la sphere tronquée GHLI.

### DEMONSTRATION.

La sphere tronquée est composée de deux cones égaux GZH,

IZL, qui valent chacun le produit de leur base par le tiers de leur hauteur OZ, ou QZ, ou qui pris ensemble valent le produit de l'une des bases GH par le tiers de la hauteur OQ, & il reste une espece de double cuvette spherique GZILZH, qu'il faut mesurer, pour avoir la solidité totale de la sphere tronquée.

Pour cela nous n'en prendrons d'abord que la moitié, c'est-à-dire la cuvette GRSHZ, compriſe entre l'un de ſes plans, & le cercle qui passe par le centre; & supposant que la figure ADOEC (*Fig.* 92.), est égale à cette cuvette, & le segment DBE égal au segment qui a été retranché de ce côté-là, circonscrivons autour de la demi-sphere ABC un cylindre de même hauteur, & de même base AHIC, auquel nous ajoûterons le triangle rectangle isoscele HRA. Nous avons déja démontré, en parlant de la sphere, que les Elemens de ce triangle venant à tourner autour de AH, décrivoient des cercles égaux chacun à chacun aux couronnes qui composent la calotte cylindrique AHBCI, & que le cone formé par la somme des cercles n'étant que le tiers du cylindre, la calotte n'étoit aussi que le tiers de ce même cylindre. Nous avons aussi vû que la somme des couronnes compriſes entre la coupe TG, & la base étoit égale au cone formé par la circonvolution du triangle TSA autour de TA. Or si ces couronnes étoient égales, en sorte qu'elles occupassent l'espace TAFP, il est évident qu'elles seroient égales au cylindre formé par la circonvolution du rectangle TSVA; & que par conséquent elles seroient triples du cone fait par STA; donc la partie DFA de la cuvette spherique compriſe entre TA, DF, vaut les deux tiers du cylindre creux que formeroient les couronnes si elles étoient égales. Mais si du cylindre ATGC on ôte le cylindre creux ATGCEXFD que formeroient les couronnes égales, le reste sera le cylindre DFXE, qui sera égal au reste DFXE de la cuvette spherique en y comprenant le cone DOE. Retranchons de cette cuvette le cone renversé DEO, qui est le tiers de ce cylindre, & le reste FDOEX de la cuvette n'en sera plus que les deux tiers; ajoutons donc au cylindre DFXE, le cylindre que formeroient les couronnes égales, & au reste FDOEX de la cuvette, la partie DAFECX que nous lui avions retranchée, & nous aurons la cuvette ADOEC égale aux deux tiers du cylindre ATGC, c'est-à-dire égale au cercle RS (*Fig.* 91.), multiplié par les deux tiers de la hauteur ZO; & comme l'autre cuvette RIZLS est égale à celle-ci, il s'ensuit que les deux en-

ſemble ſont égales au cercle RS, multiplié par les deux tiers de la hauteur totale OQ, ou à deux fois le cercle RS, multiplié par le tiers de OQ; ajoûtant donc à ce produit la valeur des deux cones GZH, IZL qui valent enſemble le produit du cercle GH par $\frac{1}{3}$ OQ, la ſphere tronquée ſera égale au produit du cercle GH, plus deux fois le cercle RS, le tout multiplié par $\frac{1}{3}$ OQ.

### COROLLAIRE I.

137. Les Elemens qui compoſent l'Ellipſoïde tronqué ABDC, étant proportionnels à ceux de la ſphere tronquée GHIL, on aura ſa ſolidité en multipliant l'un des plans AC, plus deux fois le cercle XZ pas $\frac{1}{3}$ OQ.

### COROLLAIRE II.

138. Quand les deux plans paralleles ne ſont pas également éloignés du centre (*Fig.* 93.), & qu'ils ſont par conſéqnent inégaux, il faut multiplier le premier MN par le tiers de ſa hauteur SR, le ſecond OP par le tiers de ſa hauteur RQ, & le double de celui du centre par le tiers de la hauteur totale SQ, & la ſomme des produits donnera l'Ellipſoïde tronqué.

### *Application du Probleme précedent au* Jaugeage.

139. Il y a pluſieurs manieres de jauger, parmi leſquelles la plus ſure & la moins embaraſſante, eſt celle dont je vais parler ici.

La meſure dont on ſe ſert pour jauger, eſt un long bâton à faces EFGH (*Fig.* 95.), que l'on marque de cette façon. On fait faire un petit cylindre ABCD, qui contient préciſément une pinte; on prend ſa longueur AB, que l'on porte pluſieurs fois ſur la ſurface EF du bâton; enſuite on prend le diametre AC de ſa baſe, & on le porte ſur l'autre face GH du bâton de G en I: puis on cherche le diametre d'un cercle double de celui de la baſe du cylindre, ce qui ſe fait comme nous avons dit ailleurs, en prenant une moyenne proportionnelle G2 entre le diametre AC & une ligne double, & l'on marque ce diametre de G en 2, on cherche de la même façon le diametre d'un cercle triple de celui de la baſe du cylindre, & on porte ce diametre de G en 3, & ainſi de ſuite. Ces diviſions étant ainſi marquées ſur le bâton, il eſt évident que ſi un cylindre a le diametre de ſa baſe égal au diametre GI ou AC, & ſa longueur double ou triple, &c. de la

longueur AB, il sera double ou triple du cylindre AD, & si un cylindre a la longueur égale à la longueur AB, & que son diametre soit, par exemple égal à G3, qui est le diametre d'une base triple, il sera triple du cylindre ABCD ; & enfin si la longueur d'un cylindre est égale, par exemple, à E4, qui est quadruple de la longueur AB, & que son diametre soit égal à la longueur G2, qui est le diametre d'une base double, ce cylindre sera 2 fois 4 fois plus grand, ou 8 fois plus grand que le cylindre ABCD.

Pour faire donc usage de ce bâton, supposé que le spheroïde tronqué ACDB (*Fig.* 91.), représente un tonneau qu'il faut jauger. Je mesure sa longueur OQ avec la face du bâton où sont marquées les longueurs, & je suppose qu'elle contient douze fois la longueur EI ; je mesure ensuite avec la face des diametres, le diametre AB que je suppose égal au d'ametre d'un cercle 20 fois plus grand que le cercle du petit cylindre, & le diametre XZ du cercle du milieu que je suppose 23 fois plus grand. Je double 23, ce qui fait 46, j'y ajoûte 20, ce qui fait 66, je multiplie 66 par le tiers 4 de la longueur 12, & le produit 264 est le contenu du tonneau ; car en multipliant 66 par 4, je fais la même chose que si je multipliois les parties 23, 23, 20, de 66, chacune par 4 ; ce qui donneroit $92 + 92 + 80 = 264$. Or 92 marque qu'un cylindre dont le diametre seroit 23 fois plus grand que le diametre de pinte, & la hauteur 4 fois plus grande, seroit 92 fois plus grand, l'autre 92 prouve encore la même chose, & 80 fait voir qu'un cylindre dont le diametre seroit 20 fois plus grand, & la hauteur 4 fois plus grande, seroit 80 fois plus grand ; ainsi il ne reste plus qu'à montrer que le tonneau est égal aux trois cylindres 92, 92, 80 ; ce qui est évident, puisque nous avons démontré que pour avoir sa solidité, il faut ajoûter le cercle AB à deux fois le cercle XZ, & le multiplier par le tiers de OQ, ce qui est égal à un cylindre, dont la base est le cercle AB, & la hauteur est le tiers de OQ, plus deux autres, qui ont chacun pour base le cercle XZ, & pour hauteur $\frac{1}{3}$ OQ.

Que si les cercles MN, OP (*Fig.* 93.), se trouvent inégalement éloignés du cercle DF du milieu, je cherche MN, & je la multiplie par le tiers de SR ; je cherche aussi le diametre OP, que je multiplie par le tiers de QR ; enfin je cherche le diametre DF, dont je multiplie le double par le tiers de la hauteur SQ, & la somme des trois produits marque le contenu du tonneau en pintes.

Enfin si le tonneau à jauger est compofé de deux cones tronqués ABCD, CDEF, je mesure le diametre AB, & le diametre CD, & je cherche une moyenne proportionnelle entre les deux, j'ajoûte cette moyenne proportionnelle aux deux diametres AB, CD, & je multiplie la somme par le tiers de la hauteur OR, ce qui me donne le contenu du cone tronqué ABCD (*n.* 53.), & comme l'autre cone tronqué CDEF, est égal à ABCD, le double de la valeur trouvée, me donne le contenu total du tonneau.

Mais si le second cone étoit inégal au premier, je chercherois une moyenne proportionnelle entre le diametre DC, & le diametre FE, & ajoûtant la moyenne proportionnelle aux deux diametres BC, FE, je multiplierois la somme par le tiers de la hauteur RS; après quoi ajoûtant ce produit à la valeur du cone ABCD déja trouvée, j'aurois la valeur totale du tonneau.

## PROBLEME XXVII.

140. *Mesurer un hyperboloïde* (Fig. 96.).

Prenez la moitié de l'axe NB, & le tiers de l'abscisse BH, ajoûtez-les ensemble, & cherchez une quatriéme proportionnelle aux trois lignes NH, $\frac{1}{2}$NB $+\frac{1}{3}$BH, HB, & multipliez la base A*ac* de l'hyperboloïde par cette quatriéme proportionnelle, le produit sera la valeur de l'hyperboloïde.

## DEMONSTRATION.

Soit ABC la coupe generatrice, & concevez que l'abscisse BH soit divisée en une infinité de parties égales aux points D, E, F, G, par lesquels soient tirées les ordonnées DO, EP, &c. qui seront les Elemens de la demi-hyperbole ABH. Par la nature de l'hyperbole les quarrez des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles correspondans ND × DB, NE × EB, &c. d'où il suit que la somme des quarrez des ordonnées est à celle des rectangles comme le quarré $\overline{AC}^2$ au rectangle NH × HB, ou NHMI. Concevez que tous les rectangles soient faits & mis les uns sur les autres par ordre, ils formeront un solide AEDRCB (*Fig.* 97.), composé d'un prisme triangulaire OHDRCB, couché sur un de ses parallelogrames, & d'une pyramide AEHOB, & la hauteur OB de ce solide sera égale à l'abscisse BH de l'hyperbole. Or le prisme OHDRCB est égal à la moitié du parallelepipede

OHDRCBMN de même hauteur & de même base, & la pyramide AEHOB est égale au tiers du parallelepipede AEHOBTXM. Donc le prisme est à la pyramide comme la moitié du parallelepipede OHDRCBMN au tiers du parallelepipede AEHOBTXM. Mais ces deux parallelepipedes ont deux dimensions égales ; à sçavoir la hauteur BO & la largeur OH ; donc ils sont entr'eux comme leurs longueurs RO, OA ; donc le prisme est à la pyramide comme la moitié de RO au tiers de AO ; donc aussi le prisme & la pyramide pris ensemble, sont aux deux parallelepipedes pris ensemble, c'est-à-dire au parallelepipede total, comme la moitié de RO, plus le tiers de OA est à la longueur RA, ou comme la moitié du diametre NB de l'hyperbole (*Fig* 36.), plus le tiers de l'abscisse BH est à la somme NH des deux ; mais le parallelepipede total est égal au plus grand rectangle AEDB (*Fig.* 97.), multiplié par la hauteur commune OB, égale à l'abscisse BH ; donc le prisme & la pyramide pris ensemble, c'est-à-dire la somme des rectangles est au plus grand multiplié par le nombre des termes OB, comme $\frac{1}{2}RO+\frac{1}{3}OA$ est à RA, ou comme $\frac{1}{2}NB+\frac{1}{3}BH$ est à NH (*Fig.* 96.).

Or la somme des quarrez des ordonnées à l'hyperbole (*Fig.* 96.), est au plus grand quarré $\overline{AH}^2$, comme la somme des rectangles est au plus grand rectangle NHMI ; multipliant donc les deux conséquens par le nombre des termes BH, la somme des quarrez sera au plus grand $\overline{AH}^2$, multiplié par BH, comme la somme des rectangles est au plus grand multiplié par BH, & par conséquent comme $\frac{1}{2}NB+\frac{1}{3}BH$ est à NH ; mais le plus grand quarré $\overline{AH}^2$, multiplié par BH, est un parallelepipede qui a pour base le quarré AH, & pour hauteur l'abscisse BH ; si l'on fait donc sur la même base un parallelepipede dont la hauteur soit à la hauteur BH comme $\frac{1}{2}NB+\frac{1}{3}BH$ est à NH, ce parallelepipede sera au parallelepipede $\overline{AH}^2 \times BH$, comme la hauteur à la hauteur, & par conséquent comme $\frac{1}{2}NB+\frac{1}{3}BH$ est à NH, ou comme la somme des rectangles est au plus grand multiplié par BH. Donc le parallelepipede fait sur la base $\overline{AH}^2$, multipliée par la quatriéme proportionnelle aux trois lignes NH, $\frac{1}{2}NH+\frac{1}{3}BH$, BH est égal à la somme des quarrez des ordonnées.

Or l'hyperboloïde n'étant autre chose que la somme des cer-

cles, dont les ordonnées sont les rayons, & ces cercles étant entr'eux comme les quarrez de ces rayons, il s'ensuit qu'en multipliant le plus grand cercle A*ac* par la quatriéme proportionnelle, le produit sera la valeur de l'hyperboloïde.

### COROLLAIRE I.

141. Un hyperboloïde ABC est donc égal à un cylindre AEDC (*Fig.* 98.), de même base, & dont la hauteur AE est quatriéme proportionnelle aux trois lignes NH, $\frac{1}{2}$NB + $\frac{1}{3}$BH, BH.

### REMARQUE.

142. La maniere ordinaire de mesurer l'hyperboloïde, est beaucoup plus difficile que celle que nous venons de voir; cependant comme elle est fort ingenieuse, on ne sera pas fâché de la trouver ici.

Soit donc l'hyperboloïde ABC (*Fig.* 99.), dont on cherche la solidité, prenez la coupe generatrice ABC, tirez les deux asymptotes NE, NF, qui se termineront sur la base AC prolongée. Du sommet B tirez RI parallele à la base; RI sera le second diametre de l'hyperbole, comme il a été enseigné dans la troisiéme partie. Décrivez un cercle dont RI soit le diametre; & faites sur ce cercle pris pour base un cylindre RIOP, de même hauteur que l'hyperbole, concevez que la partie RE de l'asymptote NE tourne autour de l'axe, & décrive le cone tronqué REIF, mesurez ce cone, & ôtez-en la valeur du cylindre RIOP, le reste sera la valeur de l'hyperboloïde.

Pour en comprendre la raison concevez qu'on coupe le cone tronqué par un plan parallele à la base la section MXS sera un cercle de même que la section TV que ce plan fera sur l'hyperbole, & MS sera le diametre du premier, & TV le diametre du second; de sorte que MT sera l'épaisseur de la couronne formée par les deux cercles. Or par la nature de l'hyperbole entre les asymptotes, on a $MT \times TS = \overline{RB}^2$, & tirant TX tangente du cercle TV, on aura par la nature du cercle $MT \times TS = \overline{TX}^2$; donc $\overline{TX}^2 = \overline{RB}^2$. donc le cercle qui auroit pour rayon la droite TX, est égal au cercle qui a pour rayon RB, c'est-a-dire à la base; donc la couronne MTVS qui est égale au cercle du rayon TX, ainsi qu'il a été dit ailleurs, est aussi égale au cercle du cylindre.

Or

Or si par tous les points de la hauteur BH on fait passer des plans paralleles à la base de l'hyperbole, on trouvera autant de couronnes qui seront chacune égale au cercle RI. Donc la somme des couronnes sera égale à la somme des cercles qui composent le cylindre, & par conséquent au cylindre; mais la somme des couronnes est égale à l'excès du cone tronqué sur l'hyperboïde: donc le cylindre est égal à cet excès. Ôtant donc du cone tronqué la valeur du cylindre, le reste sera l'hyperboïde.

## COROLLAIRE II.

143. On mesurera un segment *abc* d'hyperboïde (*Fig.* 81.); en multipliant sa base *aec* par une quatriéme proportionnelle aux trois lignes $xd$, $\frac{1}{2}xb + \frac{1}{3}bd$, $bz$, ce qui se démontre de même que ci-dessus: & ceci nous fait voir un autre avantage de ma maniere de mesurer l'hyperboïde sur celle que l'on enseigne ordinairement; car avec celle-là seule il n'est pas possible de mesurer un segment. On peut aussi mesurer le même segment en prenant sur l'axe prolongé la partie BD, en sorte que BD soit à XB, comme $bd$ à $xb$; ce qui vous donnera un segment droit ABC, qui se mesure comme l'hyperboïde, & dont la valeur sera égale au segment *abc*, ainsi qu'il a été démontré (*n.* 122.).

## REMARQUE.

144. Ce seroit ici le lieu de parler du paraboloïde & de l'hyperboloïde formés par la circonvolution d'une parabole & d'une hyperbole autour d'une ordonnée à l'axe; mais comme la mesure de ces corps suppose la connoissance des centres de gravité de leurs coupes generatrices. Je me réserve à traiter cette matiere dans un autre Ouvrage, où je ferai voir qu'en employant l'Arithmetique des infinis, & les centres de gravité, il n'est presque point de surfaces ni de solides dont on ne vienne aisément à bout de connoître les dimensions.

## PROBLEME XXVIII.

145. *Trouver la somme des quarrez des Elemens d'un cercle, d'une parabole, d'une Ellipse & d'une hyperbole.*

La sphere, le paraboloïde, l'Ellipsoïde & l'hyperboloïde n'étant autre chose que la somme des cercles dont les diametres sont les Elemens de leur coupe generatrice, & les cercles étant entr'eux comme les quarrez de leurs diametres, il est visible que

connoiſſant la ſomme des cercles, on peut connoître aiſément la ſomme des quarrez de leurs diametres.

Ainſi puiſque pour avoir la ſolidité de la demi-ſphere XZV (*Fig.* 100.), il faut multiplier ſon grand cercle par les deux tiers de la hauteur ZY, de même pour avoir la ſolidité du corps AEDCB formé par les quarrez des doubles ordonnées au rayon ZY de la coupe generatrice, il faut multiplier le grand quarré AEDC par les deux tiers de la hauteur OB.

Pour meſurer le ſolide AECDB (*Fig.* 101.), formé par les quarrez des Elemens d'une demi-Ellipſe XZY, il faut multiplier le grand quarré AEDC par les deux tiers de la hauteur OB, parce que pour avoir la ſomme des cercles qui compoſent l'Ellipſoïde, il faut multiplier le plus grand cercle, c'eſt-à-dire le cercle XV, fait ſur le petit axe par les deux tiers de ZY.

De même pour meſurer le ſolide AECDB (*Fig.* 102.), formé par les quarrez des Elemens d'une parabole XZV, il faut multiplier le plus grand quarré AEDC par la moitié de la hauteur OB, parce que pour avoir la ſomme des cercles qui forment le paraboloïde, il faut multiplier ſon grand cercle XV par la moitié de ZY.

Enfin pour avoir la ſolidité du corps AECDB (*Fig.* 103.), formé par les quarrez des Elemens d'une hyperbole XZV, il faut multiplier le grand quarré AEDC par une quatriéme proportionnelle aux trois lignes TY, $\frac{1}{2}$TZ + $\frac{1}{2}$ZY, ZY, parce qu'on a la ſomme des cercles qui forment l'hyperboloïde en multipliant le plus grand cercle XV par cette quatriéme proportionnelle, comme on a vû dans le Probleme précedent.

Tout ceci eſt aſſez évident par lui-même; mais nous allons en tirer des conſéquences dans les remarques ſuivantes, qui feront voir la raiſon qui m'a porté à en faire un probleme à part.

## REMARQUE. I.

146. *L'aréte AB* (Fig. 100.), *formée par les quarrez des Elemens d'un demi-cercle ou d'un cercle, eſt une courbe Elliptique.* Coupez le ſolide par un plan perpendiculaire à la baſe AEDC, & qui paſſe par le centre O, & par la diagonale AD de cette baſe, l'aréte ABD ſera dans ce plan. Coupez encore le ſolide par un autre plan auſſi perpendiculaire à la baſe, & qui paſſe par le centre O, enſorte que ſa ſection ſoit la droite HI, parallele au côté AE, la ſection BO de ce plan avec l'autre plan, ſera la hauteur BO du

ſolide ; & la ſection HBI de ce ſecond plan avec le ſolide, ſera la coupe generatrice ; car HO, OB, OI, ſont égales. Maintenant ne conſiderons que la portion du ſolide, qui eſt compriſe entre le plan HBO, qui eſt la moitié du demi-cercle HBI, & le plan ABO, qui eſt la moitié du plan ABD ; & concevons que ce ſolide ſoit coupé par une infinité de plans paralleles à la baſe, les ſections ſeront des triangles tels que SPR ſemblables au triangle AOH de la baſe. Donc RP. HO :: SP. AO. donc auſſi $\overline{RP}^2$. $\overline{HO}^2$ :: $\overline{SP}^2$. $\overline{AO}^2$. mais RP, HO, étant ordonnées au quart de cercle HBO, on a par la nature du cercle $\overline{RP}^2$. $\overline{HO}^2$ :: BP×PM. BO×OM. donc $\overline{SP}^2$. $\overline{AO}^2$ :: BP×PM. BO×OM. Or SP, AO, ſont ordonnées à la figure ABO ; donc cette figure eſt un quart d'Ellipſe, puiſque les quarrez des ordonnées ſont entr'elles comme les rectangles correſpondans, & que les deux demi-axes AO, OB, ſont inégaux. Ainſi AO eſt le demi-grand axe, & OB le demi-petit axe.

## REMARQUE II.

147. *L'arête AB* (Fig. 101.) *formée par les quarrez des Elemens d'une demi-Ellipſe, eſt une courbe Elliptique, lorſque AO eſt plus grand ou plus petit que OB, & cette arête eſt une courbe circulaire, quand AO eſt égal à OB ;* car alors les deux axes AD, BM, ſont égaux.

## REMARQUE III.

148. *L'arête AB* (Fig. 102.) *formée par les quarrez des Elemens d'une parabole, eſt toujours une courbe parabolique.* Puiſqu'on a $\overline{RP}^2$. $\overline{HO}^2$ :: $\overline{SP}^2$. $\overline{AO}^2$. & que RP. HO étant ordonnées à la demi-parabole HBO, on a $\overline{RP}^2$. $\overline{HO}^2$ :: PB. OB. & par conſéquent $\overline{SP}^2$. $\overline{AO}^2$ :: PB. OB. ce qui prouve que ABO eſt auſſi une demi-parabole.

On prouvera de la même façon que *l'arête AB* (Fig. 103.), *faite par les quarrez des Elemens d'une hyperbole, eſt une courbe hyperbolique.*

## REMARQUE IV.

149. Ceci nous fournit un moyen facile pour mesurer les solides à aréte courbe, dont les bases ne sont pas des quarrez.

Soit par exemple le solide ABCDEF (*Fig.* 104.), dont la base ABCDE est un pentagone regulier, & dont chaque aréte AF, BF, &c. est un quart de circonference de cercle; je coupe ce solide par des plans perpendiculaires à la base qui se joignent tous au centre Q, & qui passent par les rayons AQ, BQ, &c. ce qui divise le solide en cinq solides égaux AFQB, BFQC, &c. je conçois que l'un de ces solides AFQE soit coupé parallelement à la base par une infinité de plans, les sections feront des triangles tels que SOR semblables au triangle AQE de la base. Donc ces triangles sont entr'eux comme les quarrez $\overline{SO}^2$, $\overline{AQ}^2$, de leurs côtez homologues, ou comme les cercles décrits par ces côtez pris pour rayon; mais AFQ étant un quart de cercle dont SO, AQ, sont les ordonnées, la somme des cercles se trouve, en multipliant le plus grand, c'est-à-dire le cercle du rayon AQ par les deux tiers de QF; donc la somme des triangles, où le solide AFQE se trouvera aussi en multipliant le plus grand triangle AQE par les deux tiers de QF; je multiplie donc le solide AFQE par 5, à cause que le solide total est composé de cinq solides égaux, & le produit est le solide total.

Soit encore un solide ABCDF (*Fig.* 105.), dont la base est un rectangle, & dont par conséquent tous les côtez ne sont pas égaux; je tire les diagonales AC, DB, & je coupe le solide par des plans perpendiculaires à la base, & qui passent par les diagonales, ce qui divise le solide en quatre solides, dont les opposés sont égaux, c'est-à-dire AODF = BOCF, & AOBF = DOCF. Je conçois que l'un des deux premiers AODF, soit coupé par une infinité de plans paralleles à la base, les sections feront des triangles semblables au triangle AOD de la base; ainsi ces triangles seront entr'eux comme les quarrez $\overline{MN}^2$. $\overline{AO}^2$. de leurs côtez homologues; supposant donc que les arétes AF, BF, &c. sont des demi-paraboles, la somme des quarrez $\overline{MN}^2$, $\overline{AO}^2$, se trouvera en multipliant le plus grand $\overline{AO}^2$ par la moitié de OF. Donc la somme des triangles se trouvera aussi en multipliant le plus

grand AOD par $\frac{1}{2}$OF, & le solide AODF, étant ainsi trouvé, je le multiplie par 2, & j'ai les deux solides égaux AODF, BOFC.

Maintenant pour trouver les deux autres, je conçois que l'un d'entr'eux AOBF soit coupé par une infinité de plans paralleles à la base, dont les sections seront des triangles semblables au triangle AOB; & comme ces triangles seront encore entr'eux comme $\overline{MN}^2$. $\overline{AO}^2$. je multiplie le plus grand par $\frac{1}{2}$OF, & doublant le produit, j'ai les deux solides égaux AOBF, DOCF, ajoûtant donc ceux-ci aux deux autres, la somme me donne le solide total.

Ceci nous sera d'une grande utilité pour la mesure des voutes anciennes, dont nous parlerons dans la suite.

## DEFINITION XVI.

150. Lorsqu'un cylindre ACDB (*Fig.* 106.), est coupé par un plan EDF, oblique à l'axe, & qui coupe la base, la portion FBDE s'appelle *onglet cylindrique.*

La portion FEDC (*Fig.* 107.), d'un cone ABC, qui est coupé par un plan EDF oblique à l'axe, & qui coupe la base, s'appelle *onglet coupé sur un cone.*

On pourroit aussi couper des onglets dans les corps composés de surfaces rectilignes; mais comme ces onglets sont faciles à mesurer nous ne parlerons ici que des cylindriques & des coniques que nous rangerons sous deux classes, à sçavoir les onglets dont le plan oblique EDF coupe la base au centre, & ceux dont le plan oblique coupe la base hors du centre.

## *Proprietez des onglets dont le plan oblique coupe la base par le centre.*

151. *Si l'on coupe un onglet APC* (Fig. 108.) *par une infinité de plans paralleles entr'eux & perpendiculaires à la base, & dont les sections DE, FG, OB, HI, &c. sur la base, soient perpendiculaires au diametre AC, qui est la section de la base & du plan incliné, les sections DSE, FQG, &c. seront des triangles semblables.* Le côté DE sera parallele au côté FG, l'un & l'autre étant perpendiculaires sur AC, les côtez SE, QG, étant dans la surface de l'onglet, que nous supposerons perpendiculaire à la base, seront aussi perpendiculaires à la base, & par conséquent paralleles; enfin SD, QF,

seront paralleles auſſi, parce qu'ils ſont les ſections des plans paralleles DES, FGQ, &c. & du plan incliné APC (*n.* 21.), donc DE. ES :: FG. GQ. & de même des autres triangles.

152. *Le plus grand de tous les triangles faits par les plans coupans, eſt le triangle OBP, qui paſſe par le centre O.* Dans le demi-cercle ABC le rayon OB étant plus grand qu'aucune des autres lignes DE, FG, &c. le triangle OBP à la baſe OB plus grande que chacune des baſes des autres triangles; donc ſon côté BP ſera auſſi plus grand que chaque côté ES, GQ, &c. des autres, à cauſe que les triangles ſont ſemblables, & par conſéquent OBP, ſera plus grand que DSE, que FQG, &c.

153. *Après le triangle OBP, tous les autres ſont égaux deux à deux; c'eſt-à-dire le triangle DSE eſt égal au triangle LTM, qui eſt autant éloigné que lui du centre O, & le triangle FGQ eſt égal au triangle HRI pour la même raiſon, &c.* Les baſes DE, LM, étant des demi-cordes de cercles, ſont égales entr'elles, à cauſe qu'elles ſont à égale diſtance du centre, & comme à cauſe de la ſimilitude des triangles on a DE. LM :: ES. MT. il s'enſuit que ES = MT, de même que DE = LM, & que SD = LT, & par conſéquent les deux triangles ſont égaux, & ainſi des autres.

154. Puiſque SE = MT, & que ces deux lignes ſont paralleles entr'elles, & perpendiculaires à la baſe ABC, ſi l'on tire les droites EM, ST, le parallelograme ESTM ſera perpendiculaire à la baſe, & les droites ST, EM ſeront paralleles; mais EM eſt parallele à AC; donc ST ſera auſſi parallele à AC; donc *ſi du point N où ST coupe l'hypotenuſe OP du grand triangle, on abbaiſſe la perpendiculaire NZ qui ſera égale à SE, on aura le triangle ONZ égal au triangle DSE, ou au triangle LTM.* On prouvera de même que le triangle OVX eſt égal au triangle FQG, ou au triangle HRI ſon égal; de ſorte qu'on peut couper le grand triangle OPB par autant de lignes VB, NZ, paralleles au côté PB, qu'il y a de triangles entre l'extrêmité A du diametre de la baſe & le centre, & que ces lignes formeront autant de triangles ſemblables & égaux chacun à chacun aux triangles compris entre A & O.

155. *Le grand triangle coupe non ſeulement la baſe ABC en deux parties égales, mais encore le plan incliné APC, la ſurface APCB, & l'onglet même*; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

156. Cela poſé, ſoit un demi-cercle ADG (*Fig.* 109.) dont le diametre ſoit diviſé en une infinité de parties égales, d'où ſoient tirés les Elemens OB, PC, QD, &c. il eſt évident que ſi on

fait tourner ce demi-cercle autour de son diametre, ses Elemens décriront autant de cercles dont les circonferences seront entr'elles comme les Elemens ou rayons OB, PC, QD, &c. & que la somme de ces demi-cercles sera une sphere ADGL. Prenons un autre demi-cercle *adg* égal au demi-cercle ADG, & divisé par un même nombre d'élemens, & concevons qu'à l'extrêmité de ces Elemens s'élevent des perpendiculaires égales aux circonferences décrites par les Elemens *ob*, *pc*, *qd*, &c. & qu'on tire les droites *no*, *mp*, *lq*, &c. nous aurons autant de triangles rectangles qui seront égaux, chacun à chacun, aux cercles qui composent la sphere; car on sçait qu'un cercle est égal à un triangle, dont l'un des côtez est le rayon, & l'autre est une ligne droite égale à la circonference; & par conséquent ces triangles formeront un solide qui sera égal à la sphere ADGL: or ce solide sera visiblement un onglet cylindrique, puisqu'il en a toutes les proprietez; donc *tout onglet cylindrique dont la plus grande hauteur* dl *est égale au cercle du rayon* qd, *ou de la base de son plus grand triangle, est égal à la sphere décrite par la circonvolution du demi-cercle qui lui sert de base autour du diametre* ag.

Ceci doit toujours s'entendre de l'onglet cylindrique, dont la base est un demi-cercle, comme nous avons déja dit.

Dans la figure 109, je n'ai point donné à l'onglet *alg*, la hauteur qu'il devroit avoir naturellement non plus qu'aux autres onglets, dont je parlerai dans le reste de cet Ouvrage, parce que les figures seroient devenuës extrêmement grandes, & qu'il auroit fallu augmenter de beaucoup le nombre des planches, ce qui auroit rendu cet Ouvrage plus cher. Mais il faut toujours concevoir que ces onglets ont la hauteur que je leur donne dans le discours.

157. Maintenant soient deux onglets cylindriques ABCM, A*b*CM (*Fig.* 110.), de même base, mais de hauteurs inégales, en sorte que la hauteur MB du premier soit égale à la circonference décrite par la base FM de son plus grand triangle, & la hauteur M*b* du second soit plus grande ou moindre, comme nous le supposons ici, tous les triangles du premier seront semblables entr'eux, de même que ceux du second, & les triangles du premier & ceux du second étant sur même base, ils seront entr'eux comme leur hauteur; ainsi le triangle EQL sera au triangle E*q*L, comme QL à *q*L, & le triangle FBM sera au triangle F*b*M, comme BM à *b*M, & ainsi des autres. Or dans le premier onglet nous

avons QL. BM :: LE. MF. & dans le second *q*L. *b*M :: LE. MF. donc QL. BM :: *q*L. *b*M. & comme cela arrivera partout de même, il s'enſuit que toutes les hauteurs des triangles du premier onglet ſont proportionnelles aux hauteurs des triangles du ſecond. Donc ces hauteurs ſont entr'elles comme la plus grande BM à la plus grande *b*M; donc auſſi tous les triangles du premier onglet, c'eſt-à-dire le premier onglet, ſont à tous les triangles du ſecond, ou au ſecond onglet, comme BM à *b*M; mais le premier eſt égal à la ſphere faite par la circonvolution de la baſe AMC autour de AC: donc le ſecond eſt à cette ſphere comme ſa hauteur *b*M eſt à la circonference du rayon FM égale à BM, c'eſt-à-dire à la circonference du grand cercle de la ſphere. Ainſi *tout onglet cylindrique dont la hauteur n'eſt pas égale à la circonference du grand cercle, eſt à la ſphere de ſa baſe, comme ſa hauteur eſt à la circonference du grand cercle de cette ſphere.*

## PROBLEME XXIX.

158. *Meſurer un onglet cylindrique de la premiere eſpece* (Fig. 110.).

Du milieu F de la ligne AF, tirez ſur le plan de la baſe la droite FM perpendiculaire à AC, & ſur le plan incliné la droite FB, auſſi perpendiculaire à AC, & tirez la droite BM; cherchez la circonference que décriroit la droite FM, & ſi cette circonference ſe trouve égale à la hauteur BM, multipliez le cercle du rayon FM par les deux tiers de AC, ce qui vous donnera la ſphere de la baſe, & par conſéquent l'onglet cylindrique, car ces deux ſolides ſont égaux.

Mais ſi BM eſt plus grand, ou moindre que la circonference du rayon FM, cherchez la ſolidité de la ſphere de la baſe, comme nous venons de faire, puis dites: Comme la circonference du grand cercle eſt à la ſphere, ainſi la hauteur BM eſt à l'onglet que vous trouverez par une regle de proportion.

Pour abreger beaucoup ceci, voici comme vous ferez: Meſurez le grand triangle FBM, & multipliez ſa valeur par les deux tiers de AC, ce qui vous donnera la valeur de l'onglet, ſoit que BM ſoit plus grand, ou moindre, ou égal à la circonference; car s'il y a égalité, le plus grand triangle étant égal au plus grand cercle, il eſt viſible que le produit de l'un ou de l'autre par les deux tiers de AC, donnera toujours la ſolidité de l'onglet & ſi BM eſt plus grand ou moindre, il eſt encore ſur que tous

les

les triangles de l'onglet étant proportionnels aux triangles d'un onglet qui seroit égal à la sphere, à cause que les uns sont aux autres comme les hauteurs aux hauteurs, comme on a vû cidessus, il est, dis-je, sur que puisque pour avoir la solidité de l'un il faut multiplier son plus grand triangle par les deux tiers de AC, on aura aussi la solidité de l'autre en multipliant son grand triangle par les deux tiers de AC.

## COROLLAIRE I.

159. *Tout onglet de la premiere espece est à un cylindre de même hauteur, comme les deux tiers du diametre de la base à la circonference du grand cercle.* Supposons que la hauteur FC de l'onglet ABC (*Fig.* 113.), soit égale au diametre EF, l'onglet est à la sphere de la base comme la hauteur FC, ou le diametre à la circonference du grand cercle, & la sphere est au cylindre EFCI, comme les deux tiers du diametre au diametre; nous avons donc d'une part trois grandeurs, à sçavoir l'onglet, la sphere & le cylindre, & de l'autre trois autres grandeurs, le diametre, la circonference, & les deux tiers du diametre dont le rapport est tel que les deux premieres d'une part, sont en même raison que les deux premieres de l'autre; mais que la seconde & la troisiéme de la premiere part sont entr'elles réciproquement comme la troisiéme de l'autre part à la premiere; donc *en raison troublée*, ainsi que nous l'avons enseigné en parlant des raisons composées, l'onglet est au cylindre comme les deux tiers du diametre à la circonference.

Que si la hauteur FD de l'onglet ABD est plus grande que le diametre, l'onglet ABD est à l'onglet ACB comme la hauteur FD à la hauteur FC; mais les cylindres EFDH, EFCI, sont aussi comme FD, FC. Donc l'onglet ADB est à son cylindre comme l'onglet ACB est au sien, & par conséquent comme les deux tiers du diametre à la circonference.

Voilà donc une nouvelle maniere de mesurer un onglet en disant: *La circonference du grand cercle est aux deux tiers du diametre comme le cylindre à l'onglet.*

## COROLLAIRE II.

160. Si dans la base ADC (*Fig.* 111.) d'un onglet ABC, égal à la sphere *adc*, on tire les droites AD, DC, cette base en tournant sur son diametre *ac*, produira un Rhomboïde inscrit dans la sphere, & dont la sphere sera double; car ce Rhomboïde est

composé de deux cones qui ont chacun pour base le grand cercle, & pour hauteur le rayon, ce qui fait qu'ils sont égaux l'un & l'autre à la moitié de la demi-sphere dans laquelle ils sont inscrits. Or si des points L, N, D, &c. on éleve des perpendiculaires sur la base de l'onglet égales chacune à la circonference du cercle correspondant dans la sphere, & qu'on joigne leurs extrêmitez M, O, B, &c. par les droites AB, BC, on aura une pyramide qui sera égale au Rhomboïde, & dont par conséquent l'onglet sera double; ce qui est évident, puisque tous les triangles qui composent la pyramide, sont égaux chacun à chacun à tous les cercles qui composent le Rhomboïde.

Que si l'onglet n'étoit pas égal à la sphere, la pyramide de même hauteur seroit au Rhomboïde comme l'onglet à la sphere, c'est-à-dire comme BD à la circonference du cercle; & voilà encore une nouvelle maniere de mesurer l'onglet, en faisant une pyramide sur la base ADC, de même hauteur que l'onglet, puis doublant sa valeur pour avoir celle de l'onglet.

## COROLLAIRE III.

161. *Si l'on coupe un onglet ABC* (Fig. 112.), *par des plans perpendiculaires à la base, & dont les sections HG, QP, sur la base, soient paralleles au diametre AC, & que l'onglet soit égal à la sphere de la base, la partie AHEFGC sera égale à la circonvolution de sa base AHGC autour de AC, c'est à-dire au cylindre* zhgu, *plus les deux segmens* zah, gcu; car tous les triangles IHE, OLR, ZGF de cette partie comprise entre les droites IH, ZG, seront égaux entr'eux de même que les cercles décrits par les droites *ih*, *ol*, *rg*, compris entre *ih*, & *rg*, & comme le triangle IHE est égal au cercle *hz*, tous les triangles seront égaux à tous les cercles; de même tous les triangles compris entre A & la droite IH, sont égaux à tous les cercles du segment *zah*, aussi bien que tous les triangles compris entre C & la droite ZG sont égaux à tous les cercles du segment *ucg*. Donc la portion d'onglet AEFTGCH est égale au cylindre *zhgu*, plus aux deux segmens spheriques *zah*, *gcu*. Par la même raison la portion AQNMPC est égale au cylindre *xqpy*, plus les deux segmens *xaq*, *ycp*; de même encore la portion HEBFGD est égale à la couronne spherique faite par le segment *hg* autour du diametre *ac*; car puisque l'onglet est égal à la sphere, & que sa portion AHERFGC est égale au cylindre *zhgu*, plus les deux segmens *zaq*, *gcu*, le reste doit être égal au reste.

Que si la hauteur DB n'étoit pas égale à la circonference du grand cercle toutes les portions d'onglet dont nous venons de parler, seroient aux portions correspondantes de la sphere, comme DB à la circonference du grand cercle ; ce qu'on doit toujours observer dans la mesure d'un onglet ou de ses parties, c'est pourquoi je ne le redirai plus.

### COROLLAIRE IV.

162. On peut trouver encore la partie HGFBER de cette façon. Soit le cercle ADCP (*Fig.* 114.) égal au grand cercle de la sphere qui est égale à l'onglet, & que le segment HDG soit égal à la base HDG de la portion HGFBER (*Fig.* 112.) décrivez sur la corde HG (*Fig.* 114.), un cercle, multipliez ce cercle par les deux tiers de son diametre HG, pour avoir sa sphere qui sera égale à la portion HGFBER.

Pour en comprendre la raison, concevez que le diametre HG soit coupé par une infinité de perpendiculaires, telles que PS. Par la nature du cercle on a $PQ \times QX = HQ \times QG = ZQ \times QS$. ou $\overline{ZQ}^2$. Mais tirant dans le cercle PNX, la droite QN perpendiculaire à $\overline{PX}^2$, on a $\overline{QN}^2 = PQ \times QX$ ; donc $\overline{QN}^2 = \overline{ZQ}^2$, ou le cercle décrit par le rayon QN égal au cercle décrit par le rayon ZQ. Or le cercle décrit par le rayon QN est égal à la couronne PXRQ ; donc cette couronne est égale au cercle décrit par ZQ : or comme cela arrivera à toutes les couronnes qui composent la couronne spherique, décrite par le segment HDG, qui tourne autour du diametre AC, il s'ensuit que toutes ces couronnes étant égales à tous les cercles qui composent la sphere HSGZ, la couronne spherique décrite par le segment HDG, est égale à la sphere HZGS ; mais la couronne spherique est égale à la portion HGFBER (*Fig.* 112.) ; donc la sphere HSGZ est aussi égale à cette portion.

Que si la sphere de la base de l'onglet n'étoit pas égale à l'onglet, alors la portion HGFBER seroit à la sphere HSGZ, comme sa hauteur BD à la circonference du grand cercle de la sphere de l'onglet ou de la sphere *adcp* ; ce que je repete, de peur qu'on n'y fasse pas attention dans ce cas-ci.

### COROLLAIRE V.

163. Tout ce que nous venons de dire de l'onglet cylindrique ordinaire, doit s'entendre aussi de l'onglet de cylindre Elliptique,

soit que le plan incliné passe par le grand axe de la base (*Fig.* 115.), soit qu'il passe par le petit axe (*Fig.* 116.), & aussi des onglets de cylindre parabolique ou hyperbolique (*Fig.* 117.), dont le plan incliné passe par l'axe. Quant à l'onglet de cylindre parabolique, dont le plan incliné par une ordonnée à l'axe (*Fig.* 118.), comme sa connoissance dépend de celle du paraboloïde fait par la circonvolution de la parabole autour de l'ordonnée, dont je me réserve à parler dans un autre Ouvrage, je me contenterai de dire ici pour la satisfaction de ceux qui pourroient en avoir besoin dans la pratique, que ce paraboloïde est au cylindre circonscrit, c'est-à-dire au cylindre qui auroit pour base le cercle du rayon OB, & pour hauteur la ligne droite AC, comme 8 est à 15; d'où il suit que l'onglet égal à ce paraboloïde, est au cylindre en même raison, & que celui qui est inégal au paraboloïde, est à ce paraboloïde comme la hauteur BE à la circonference du cercle, dont l'axe BO est le rayon.

Enfin quant à l'onglet de cylindre hyperbolique, dont le plan incliné passe par une ordonnée à l'axe de la base, il seroit inutile d'en parler, puisqu'on n'a point encore trouvé de maniere géometrique de mesurer l'hyperboloïde fait par la circonvolution de l'hyperbole autour d'une ordonnée à l'axe.

## PROBLEME XXX.

164. *Mesurer un onglet cylindrique de la seconde espece.*

Si l'on coupe un onglet ABC de la premiere espece (*Fig.* 112.), par des plans paralleles à la base, les portions EBF3, NBM2, seront des onglets de la seconde espece, dans lesquels tous les triangles paralleles au grand triangle RB3, ou XB2 sont semblables entr'eux, de même que tous les triangles de l'onglet ABC de la premiere espece, & comme à cause des triangles semblables OBD. RB3, on a OD. DB :: R3. 3B. il s'ensuit que si DB est égal à la circonference du rayon OB, 3B, est aussi égal à la circonference du rayon R3; ainsi tous les triangles de l'onglet EBF3, étant entreux comme les cercles de leurs bases, ou des paralleles à R3, ils seront chacun égaux aux cercles correspondans; & par conséquent l'onglet EBF3, sera égal au solide formé par la circonvolution de la base E3F autour de EF: mais comme cette base n'est pas un demi-cercle, il est extrêmement difficile de trouver le solide; c'est pourquoi il faut chercher l'onglet d'une autre façon, ainsi que vous allez voir.

Soit l'onglet ABCF (*Fig.* 119.), de la seconde espece, continuez l'arc AC de sa base en D & E, jusqu'à ce que DFE soit un demi-cercle, & que le diametre DE soit parallele à AC. Du centre O tirez dans la base la droite OF perpendiculaire au diametre, & sur la surface la droite FB perpendiculaire à la base. Tirez aussi par le point O une droite indéfinie PQ perpendiculaire à la base; puis du point B par le point R qui est le milieu de AC, tirez BM qui coupe la droite PQ en M; du point M tirez GH parallele & égale à DE, & décrivez le demi-cercle GIH qui sera égal au demi-cercle DFE, qui est visiblement la moitié de la base du cylindre, dont l'onglet ABC est partie; ainsi concevant que sur le demi-cercle GIH soit fait un onglet de la premiere espece, & dont la hauteur soit IB, l'onglet ABC sera partie de l'onglet GBH. Maintenant retranchez de l'onglet GBH la partie GHSCAZ, que vous mesurerez, comme nous avons dit ci-dessus, & la partie ZAFCSI, qui est facile à mesurer en multipliant le segment de cercle ZIS par la hauteur IF, & le reste sera l'onglet ABC.

Ou bien faites une sphere dont la corde AC soit l'axe, & comme la portion ZABCSIF est égale à cette sphere, lorsque sa hauteur IB est égale à la circonference du rayon MI; retranchez de cette sphere la valeur de la portion ZAFCSI, & le reste sera l'onglet ABC.

Que si IB n'est pas égal à la circonference du rayon MI, le reste sera à l'onglet ABC, comme la circonference du rayon MI à la hauteur IB.

Un onglet de cylindre Elliptique de la seconde espece, se mesurera à peu près de la même façon, en continuant l'arc de la base jusqu'à ce qu'il soit une demi-Ellipse, &c. Mais il faut observer qu'au lieu de faire un cercle sur la corde de la base, il faudroit faire une Ellipse, parce que l'onglet est une Ellipse, & pour trouver l'autre axe de l'Ellipse, il faudroit prendre la moyenne proportionnelle QN (*Fig.* 114.), qui sert de rayon au cercle égal à la couronne qui passe par le centre V de la grande Ellipse, & cette moyenne proportionnelle seroit le demi-axe cherché. Mais après tout pour éviter l'embaras, on se servira de la premiere methode ci-dessus.

Il faut s'attacher à bien comprendre ce que nous venons de dire touchant les onglets de la seconde espece; car nous en aurons besoin pour la mesure des voutes anciennes.

## COROLLAIRE I.

165. Pour mesurer une portion NERFM64 (*Fig.* 112.), d'un onglet NBM de la seconde espece, on cherchera l'onglet ABC de la premiere espece, dont l'onglet NBM fait partie, puis on mesurera la partie AERFCGLH, & l'on en retranchera premierement la partie ANXMCPQ, puis la partie QN46MPGH, qui est facile à mesurer, puisqu'il n'y a qu'à multiplier la bande QHGP de la base par la hauteur H4, & le reste sera la portion cherchée NERFM64; on trouvera de la même façon la portion 4EBF62, &c.

## COROLLAIRE. II.

166. Pour mesurer un onglet ABC de la seconde espece (*Fig.* 120.), mais dont la base ANC est plus grande qu'un demi-cercle. Achevez le cercle MANC, dont la base ANC est segment, & du point Z du milieu de la corde AC, tirez dans le plan du cercle la droite MN perpendiculaire à AC, & qui sera le diametre du cercle MANC. Du centre I élevez sur le plan du cercle la perpendiculaire HP, qui sera l'axe du cylindre; faites le cylindre MNB4 de l'onglet, & prolongez ses côtez indéfiniment vers X & vers V; concevez que le plan incliné ABCZ, soit prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre le côté opposé du cylindre en X, la section XABC sera une Ellipse, ce qui se prouve de même que nous l'avons prouvé pour un cone coupé obliquement en parlant des Sections Coniques. Du point Z tirez dans le plan oblique la droite XB perpendiculaire à AC, laquelle étant prolongée en X, sera le grand axe XB de l'Ellipse, & le petit axe se trouvera en tirant du point R ou XB, coupe l'axe du cylindre, une droite DE parallele à AC. Enfin faites passer par DE un plan SDTE parallele à la base, & un autre plan DOFE perpendiculaire à la même base. Tout cela posé, la portion DBE de l'onglet ABC, sera un onglet de la premiere espece; car son plan incliné DBC passe par le centre du cercle SDTE; ainsi il sera facile de le mesurer. La portion DTEFNOI sera encore facile à connoître, puisqu'il n'y a qu'à multiplier le demi-cercle ONF qui lui sert de base par sa hauteur NT; ainsi il ne reste plus qu'à connoître la portion DOACFE, pour avoir la valeur de tout l'onglet. Or pour cela considerez que le solide DSXE est un onglet renversé égal à l'onglet DBTE de la premiere espece; car la base DSE est égale à la base DTE, &

la hauteur SX égale à la hauteur TB, à cause des triangles semblables SRX, BRT, qui ont le côté SR égal au côté RT, ainsi l'onglet DSXE se mesurera de la même façon que l'onglet DBTE. Faites passer par la droite AC un plan AQ6C perpendiculaire sur le cercle MN, lequel sera aussi perpendiculaire sur le cercle ST, & par conséquent sur la base de l'onglet DSXE; comme AC est parallele à OF, & que les plans AQC6, ODEF, sont tous deux perpendiculaires sur les cercles MN, ST, la droite Q6 sera parallele à DE, ainsi la portion QADEC6 de l'onglet SDEX, se mesurera aisément. Maintenant mesurez le solide QTICNA, retranchez-en le solide DTEFNO, & le solide QDACE6, & le reste sera le solide DOACFE, lequel étant ajoûté à l'onglet DBTE, & au solide DTEFNO, donnera l'onglet ABNC, dont vous cherchiez la valeur.

## REMARQUE.

167. Il n'est point de portion de cylindre dont on ne puisse trouver la valeur par les principes que nous venons d'établir touchant les onglets. En voici quelques exemples qui feront aisément comprendre de quelle façon on pourra mesurer une portion de quelque nature qu'elle soit.

Dans la figure 121, où les plans coupans sont perpendiculaires sur la base, les solides AGHEFB, GHOMLIEF, &c. se mesureront en multipliant leurs bases AGH, GHOM, &c. par la hauteur GF du cylindre.

Si quelqu'un de ces plans XQRT vient à couper un onglet N*m*P, en sorte que la section XT sur la base, soit parallele à NP, on retranchera du solide XQRTDC la portion XTD*m*Z de l'onglet, & le reste sera le solide Z8*m*CQR, & ainsi des autres.

Dans la figure 124, les plans FECD, CABD, sont inclinés sur la base; ainsi il faut les prolonger jusqu'à ce qu'ils forment les onglets CHQD, DPIEC, ensuite retrancher de l'onglet CHQD, l'onglet AHB, pour avoir le solide ABCDQR. De même si de l'onglet DPIEC, on retranche l'onglet FIES, le reste sera le solide ESFDPC, & par conséquent il sera aisé d'avoir le solide EABFDC, & ainsi des autres.

Dans la figure 122, les plans coupans sont encore perpendiculaires à la base; c'est pourquoi on aura les solides APBDES, ABCFED, &c. en multipliant leurs bases ESD, EDF, &c. par

la hauteur du cylindre ; mais si ces plans viennent à couper un onglet MXH, comme leurs sections ED, FD sur la base, ne seront pas toutes paralleles à la corde HM de l'arc HSM, qui sert de base à l'onglet, nous allons voir comment il faut mesurer les portions de l'onglet que ce plan coupe & les restes APBIXN, &c.

La figure 123. représente un onglet de la premiere espece, coupé par un plan DITE perpendiculaire à la base, mais dont la section IT n'est pas parallele à la corde AC de cette même base. Supposons d'abord l'onglet égal à la sphere produite par la circonvolution du demi-cercle, & tirons dans le plan coupant des droites perpendiculaires à IT, tous les triangles HDI, R6O, P4Q, &c. compris entre HI, NT seront semblables, & comme ID est égal à la circonference du cercle du rayon HI, O6, sera égal à la circonference du rayon RO, 4Q, égal à la circonference du cercle du rayon PQ, &c. donc la somme des triangles compris entre HI, NT, sera égale au cone tronqué, produit par les cercles des rayons HI, RO, &c. Or tous les triangles compris entre A & HI, & ceux qui sont compris entre C & NT, sont égaux aux segmens spheriques, produits par la circonvolution des parties AIH, NTC, de la base; donc le solide ADECTI est égal à la portion de la sphere composée du cone tronqué & des deux segmens, laquelle portion est représentée en petit par la figure *aitcnh*. Si donc on retranche de l'onglet le solide ADECTI, le reste sera la valeur du solide restant IDBET. Que si l'onglet n'étoit pas égal à la sphere, les portions de cet onglet seroient aux portions correspondantes de la sphere, comme la hauteur de l'onglet à la circonference du grand cercle de la sphere.

Pour avoir les portions d'un onglet de la seconde espece GBF (*Fig.* 125.), coupé par un plan EOF perpendiculaire à sa base, mais dont la coupe OF sur la base, n'est pas parallele à la corde GF, on cherchera l'onglet ABC de la premiere espece, dont l'onglet GBF fait partie, on mesurera la portion AREFSC, de laquelle on retranchera la portion APGFSC, & la portion PGOFSR, & le reste sera la portion GEFO de l'onglet GBF, ainsi l'autre portion OEBFH peut se connoître aisément.

Que si l'onglet ABCD de la seconde espece (*Fig.* 125.), avoit une base plus grande que le demi-cercle, on le couperoit par un plan EIF, parallele à la base, & qui en retranchât l'onglet EBIF

de

de la premiere espece, & après avoir prolongé le plan incliné jusqu'au côté opposé du cylindre, on auroit un autre onglet EKYF égal à l'onglet EFIB. Ainsi faisant passer par les droites AD, EF, qui sont paralleles des plans perpendiculaires aux bases, on trouveroit aisément la partie AEGHFD, laquelle étant ajoûtée au solide GETXPOFH, donneroit le solide AGXPHDFOTE, après quoi mesurant dans l'onglet EBIF de la premiere espece le solide EFOTRS, on ajoûteroit ce solide au produit, & la somme seroit la valeur de la portion AXRSPD de l'onglet ABCD, ainsi l'autre portion XRBCP se trouveroit aisément.

Donc (*Fig.* 122.), si du solide ESDBPA on retranche la portion SEDINX de l'onglet, on aura le solide restant NXIBPA, & si du solide EDFCBA, on retranche la portion EDFOIN de l'onglet, on aura le solide OINABC, & ainsi des autres.

Dans la figure 128. qui représente deux onglets qui se coupent, on trouvera la partie FDRSCA, en tirant les perpendiculaires RH, SI, sur les bases; car alors on trouvera aisément la portion FDRSIH de l'onglet DEF, & la portion CARSIH de l'onglet ABC; c'est pourquoi ôtant la seconde de la premiere, on aura la partie FDRSCA. Quant au reste du cylindre, il est visible qu'on en aura la valeur, en ôtant du cylindre totale l'onglet DEF, & l'onglet RBS.

Je ne finirois point si je voulois faire une énumeration exacte de toutes les portions de cylindre dont on peut trouver la valeur. D'ailleurs comme il y en a beaucoup que la moindre attention fait découvrir, je m'attacherai simplement à résoudre un cas dans le Probleme suivant, qui me paroît le plus difficile, & dont je ne sçache pas que personne ait encore parlé.

## PROBLEME XXXI.

168. *Mesurer un onglet incliné, c'est-à-dire, sur la base duquel la hauteur du cylindre n'est pas perpendiculaire.*

Soit un onglet de la premiere espece ABC (*Fig.* 127.), coupez son plan incliné prolongé vers O, par un plan NVO oblique à la base, & qui passe par le rayon DV, ce plan formera avec la surface un onglet NBO de la premiere espece, que j'appelle *onglet incliné*, parce que la droite BV, qui fait partie de la hauteur du cylindre n'est pas perpendiculaire sur sa base. Les communes sections du plan NZO, & des triangles qui composent l'onglet ABC, feront les droites PQ, RS, DV, TZ, &c. qui seront pa-

ralleles entr'elles, parce que les triangles ſont paralleles, & par conſéquent l'onglet NBO ſera auſſi compoſé de triangles ſemblables rectangles PFQ, RHS, DBV, TKZ, &c.

Si l'on avoit deux onglets de la premiere eſpece ABC, ADC (*Fig.* 129.), adoſſés l'un contre l'autre, & qu'on coupât le plan incliné du premier par un plan EDF, qui paſſât par la droite HD, qui partage en deux également le plan incliné ADC du ſecond, les ſections communes du plan EDF, & des triangles qui forment les deux onglets, ſeroient paralleles à HD, & par conſéquent l'onglet incliné EBDF ſeroit compoſé de triangles ſemblables au triangle BCD, qui ne ſeroient pas rectangles. Cet onglet-ci & le précedent ſe meſurent de la même façon, ainſi qu'on va voir.

Les triangles qui compoſent l'onglet incliné NBO (*Fig.* 127.), ſont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez homologues PF, RH, DB, TK, &c. Or le plan ABC eſt portion d'une Ellipſe, dont DB eſt la moitié du grand axe, & DA la moitié du petit; donc NO eſt un diametre. Je fais une Ellipſe *abc*3 (*Fig.* 130.), que je ſuppoſe égale à l'Ellipſe du plan incliné ABC, & dans laquelle *no* repréſente le diametre NO, & les droites *ef*, *gh*, *ib*, *tk*, &c. repréſentent les droites PF, RH, &c. Je tire par l'extrêmité *n* du diametre une tangente *n*6, & par les ſommets des droites *ef*, *gh*, &c. je tire des paralleles à la tangente *fu*, *he*, *bg*, &c. qui ſont ordonnées au diametre *no*: or ces paralleles forment avec les droites *ef*, *gh*, des triangles ſemblables *ufe*, *ehg*, &c. qui ſont entr'eux comme les quarrez, ou comme les cercles des ordonnées *uf*, *eh*, &c. ou comme les cercles des droites *ef*, *gh*, &c. donc les triangles qui compoſent l'onglet incliné, ſont entr'eux comme les cercles des ordonnées.

Or ſi l'on conçoit que l'Ellipſe *abc*3, tourne autour du petit axe *ac*, elle formera un Ellipſoïde applati, & ſi l'on coupe cet Ellipſoïde par des plans qui paſſent par les ordonnées *eh*, *gb*, &c. & qui ſoient perpendiculaires à la coupe generatrice, les ſections ſeront des Ellipſes ſemblables, dont la ſomme ſera égale à l'Ellipſoïde. Or pour avoir l'Ellipſoïde, il faut multiplier le cercle de ſon grand demi-axe *db*, par les deux tiers du petit axe *ca*, qui exprime le nombre des cercles paralleles au cercle de *db*, dont l'Ellipſoïde eſt compoſé; donc pour avoir la ſomme des Ellipſes il faut multiplier la plus grande, ou celle qui auroit *dk* pour demi-diametre par les deux tiers de la perpendiculaire *ng*, tirée entre les tan-

gentes *n6*, *07*, parce que cette perpendiculaire exprime le nombre de leur multitude, & ce seroit la même chose, si au lieu des Ellipses on mettoit les cercles des ordonnées *ef*, *gh*; donc pour avoir la valeur de l'onglet incliné, il faut multiplier son plus grand triangle par les deux tiers de la hauteur *ng*. Ce triangle se trouve en tirant du centre de l'Ellipse l'ordonnée *dk* au diametre *no*, & la droite *kt* parallele aux droites *ef*, *gh*, &c. car ces droites *ef*, *gh*, &c. étant entr'elles comme les ordonnées, *kt* sera la plus grande, de même que *dk* est la plus grande ordonnée, & par conséquent le triangle KTZ (*Fig.* 127), sera le plus grand des triangles semblables qui composent l'onglet.

## COROLLAIRE I.

169. Si un onglet incliné de la premiere espece ABC (*Fig.* 131.), est coupé par un plan GDEI, parallele à l'axe du cylindre, & dont la section DE sur la base de l'onglet, soit parallele à la corde AC, on mesurera la portion AGICED en cette sorte : Premierement, tous les triangles compris entre FD, & HE, seront égaux entr'eux, & formeront un prisme triangulaire incliné, dont la valeur se trouve en multipliant le triangle FDG pris pour base par la perpendiculaire FX tirée entre ce triangle, & le triangle opposé HEI; secondement, tous les triangles compris entre le triangle FDG & l'extrêmité A, sont entr'eux comme les quarrez ou les cercles des ordonnées à la portion AGF de l'Ellipse que forme le plan incliné ABC; ainsi supposant que cette portion AGF soit égale à la portion *nbg* de l'Ellipse *abcd* (*Fig* 130.), tous les triangles seront entr'eux comme les quarrez, ou les cercles, ou les Ellipses des ordonnées *gb*, *ch*, de cette portion. Je conçois que *abc* ayant tourné sur son petit axe, ait produit un Ellipsoïde allongé, lequel ait été coupé par des plans perpendiculaires à la coupe generatrice, & qui passent par les ordonnées *gb*, *eh*, ce qui nous donnera des Ellipses. Je coupe le petit axe proportionnellement aux parties *ng*, *go*, du diametre *no*; & je coupe l'Ellipsoïde par un plan perpendiculaire à la coupe generatrice, & qui passe par l'ordonnée *7f*, au point de division 7 du petit axe; ainsi le segment d'Ellipsoïde *6af*, est égal au segment 8*nb*, puisque les diametres sont coupés proportionnellement; je dis donc : comme le plus grand cercle *6f*, est au segment *6af*, ainsi le plus grand triangle FGD (*Fig.* 131.), est à la somme des triangles compris entre FGD & l'extrêmité A. Je fais la même

chose pour avoir la somme des triangles compris entre le triangle HGI & le point C, & je connois par conséquent la valeur de la portion AGICED, laquelle étant retranchée de l'onglet, me fait connoître l'autre portion DGBIE, & si de cette seconde portion je retranche la partie DGRIES, qui se trouve en multipliant sa base DSE par la perpendiculaire DQ, tirée entre les deux bases, le reste sera la valeur de l'onglet incliné de la seconde espece GBIR.

On pourroit aussi couper l'onglet incliné par des plans, dont la section DE sur la base ne seroit pas parallele à AC, & mesurer ensuite les portions de l'onglet, ce que les Commençans trouveront aisément sans que je m'y arrête davantage.

## COROLLAIRE II.

170. Pour appliquer ceci au cylindre, soit un cylindre RMNP (*Fig.* 132.), coupé obliquement par deux plans CT, DS, qui forment deux onglets inclinés ADBT, ACBS. Nous avons démontré plus haut que si un cylindre est coupé par un plan incliné DS qui coupe les deux côtez, on trouvera la portion DRPS du cylindre, en coupant le cylindre par un plan XZ parallele à sa base, & qui passe par le centre O de la section DS; car alors le cylindre XZRP est égal à la portion DRPS. Donc si de cette portion on ôte l'onglet ADBT, le reste sera la portion cylindrique TBASPR; & comme le cylindre XZNM est aussi égal à la portion CNMT, si on ôte de cette portion l'onglet incliné ACBS, le reste sera la valeur de la portion DBACNM.

Que si on vient à couper quelqu'une de ces portions par des plans paralleles ou non EFAB, GBLK, on pourra encore mesurer les portions coupées par ces plans, ou celles qui seront coupées entre ces plans. Pour mesurer, par exemple, la portion EFHGKBAL, représentée par la figure 133, je coupe cette portion par un plan 42L3, parallele au plan EFHG, & la portion EFHG342L se connoît sans peine. Il ne reste donc plus que la portion 42L3KBA, qu'on pourra encore mesurer aisément, en prolongeant les plans 42L3, & BALK, jusqu'à ce que ces plans coupent le cylindre, & se coupent entr'eux; car ils formeront un onglet, dont la portion 42L3KBAL sera une partie qu'on trouvera par les regles ci-dessus; ou bien on trouvera cette partie par approximation en cette sorte. Je coupe le solide 42L3KBA par des plans diagonaux, qui me donnent une pyra-

mide *abk*3L, & un prisme triangulaire tronqué 42*ab*BA, dont je puis trouver facilement la valeur; quant aux deux autres portions 4*a*3KB, 2A*ba*L, je pourrois mesurer la premiere comme un prisme triangulaire tronqué, & l'autre comme une pyramide; mais comme il y auroit quelque erreur à cause qu'il se trouve dans l'une & dans l'autre une face courbe, je coupe la premiere représentée par la figure 134; en deux parties, dont l'une, c'est-à-dire celle où se trouve la face courbe, soit extrêmement petite, & je mesure la premiere *am*3K*ob*, comme un prisme tronqué, & la seconde 3*m*4B*o*K aussi, comme un prisme tronqué, ce qui ne peut pas donner une erreur sensible à cause de la petitesse de cette partie. Je fais la même chose à l'égard de la portion 2A*ba*L (*Fig.* 133.), que je partage en deux pyramides, dont celle qui a la face courbe est extrêmement petite, & rassemblant toutes les portions, je trouve la valeur de la portion EFGHKLAB (*Fig.* 132.), & ainsi des autres.

## PROBLEME XXXII.

171. *Mesurer un onglet coupé sur un cone.*

Nous avons déja démontré ailleurs que pour trouver la valeur d'un onglet ACDB (*Fig.* 135.), dont le plan incliné ACB passe par le centre O de la base, il faut tirer les droites AF, BF, puis mesurer le demi-cone BAFD, & en retrancher la pyramide mixtiligne inclinée BCAF; or ce même principe sert non seulement pour mesurer tout autre onglet de quelque espece qu'il soit, mais encore pour trouver une portion quelconque du cone, comme on verra par quelques exemples que je vais en donner.

Pour mesurer l'onglet de la seconde espece ACDB (*Fig.* 136.), on tirera les droites AF, BF, puis du centre O on tirera dans la base une droite MN, parallele à la corde AB, & l'on tirera les droites MF, NF, on mesurera le demi-cone MFDN, & l'on en retranchera la pyramide MABNF, & la pyramide inclinée ACBF; le reste sera la valeur de l'onglet.

Pour mesurer l'onglet ABFD (*Fig.* 137.), de la seconde espece, & dont la base est plus grande que le demi-cercle, on retranchera du cone la pyramide ACDE, & la pyramide inclinée ABDE, & le reste sera l'onglet ABFD.

Pour mesurer l'espace ABDGIH (*Fig* 137.), compris entre deux onglets ABFD, & HIFG, on retranchera le petit onglet

du grand, & le reſte ſera l'eſpace demandé.

Pour meſurer les fragmens faits par deux onglets FMCG, DHCE, qui ſe coupent (*Fig.* 138.), on meſurera la pyramide AFGB, la pyramide FGOIB, & la pyramide IOHB, & la ſomme des trois donnera le ſolide AGOHBIF. De même on retranchera de la pyramide IOMB la pyramide IOHB, & le reſte ſera le fragment OMHI. On retranchera de même de l'onglet DHCE le fragment OMHI, & le reſte ſera le fragment IMOEDC, enfin retranchant de l'onglet FMCG le fragment IMOEDC, on aura le fragment EOIDFG.

Pour meſurer les fragmens faits par un onglet F*h*CN (*Fig.* 139.), & par deux plans obliques RS, ED, on retranchera de la pyramide QPDB la pyramide QPRB, & le reſte ſera l'onglet incliné QPRD; on trouvera de la même façon l'onglet PQES, & l'onglet OHNS. Retranchant du cone incliné DPEQB, l'onglet QPRD, on aura le ſolide QPRBE. De même retranchant de l'onglet QPES l'onglet NHOS, on aura le ſolide PEQNHO. Le ſolide DECA étant connu, puiſqu'il eſt le reſte du cone, après qu'on en a retranché le cone incliné DEB, ſi on retranche de ce ſolide l'onglet F*h*CN, & le ſolide PEQNHO, on aura le ſolide PDQHOFA*h*, &c.

Je laiſſe aux Commençans le plaiſir de trouver les fragmens de la figure 140, de même que grand nombre d'autres qu'on pourroit faire.

## DEFINITION XVII.

172. Si l'on tire dans un cercle ABCD (*Fig.* 141.), deux diametres AC, BD, perpendiculaires entr'eux, & qu'à l'extrémité D de l'un des deux ayant mené une tangente PQ, qui ſera parallele à l'autre diametre AC, on faſſe tourner le cercle autour de PQ, on aura un ſolide AGFRCB, qu'on appelle *anneau circulaire fermé*, parce que ce ſolide a un creux ADG, ou CDR, qui n'eſt pas à jour. Mais ſi on prolonge le diametre BD en S à diſcretion (*Fig.* 142.), & qu'ayant mené du point S une parallele PQ à l'autre diametre, on faſſe tourner le cercle autour de PQ, alors on aura un ſolide appellé *anneau ouvert*, à cauſe qu'il renferme un creux à jour ACHG. La ligne BD (*Fig.* 141.), ou BS (*Fig* 142.), s'appelle *ligne de circonvolution.*

La figure 143 repréſente un anneau fermé vû de haut en bas; mais il faut concevoir que le cercle ABCD eſt élevé perpendi-

culairement sur le plan du papier; en sorte que son diametre AC, & la tangente au point D, soient aussi perpendiculaires sur ce plan, & que le cercle venant à tourner, le point B du diametre AB produise la circonference BRS, qu'on appelle *la grande circonference*, & le centre O la circonference OPQ, qu'on appelle *circonference moyenne*.

La figure 144 représente un anneau ouvert vû de la même façon, & dans cet anneau la circonference DNT, produite par la circonvolution du point D, qui est le plus proche du centre S de circonvolution, s'appelle *petite circonference de l'anneau*; dans l'un & dans l'autre anneau le cercle ABCD se nomme *le cercle generateur*.

Si au lieu d'un cercle on se sert d'une Ellipse qui tourne autour d'une ligne parallele à l'un ou l'autre de ses deux axes, ou d'une parabole, ou d'une hyperbole, qui tournent autour d'une droite parallele à leurs axes, ou à une ordonnée à leurs axes, on aura aussi des anneaux appellés elliptiques, paraboliques, ou hyperboliques, ouverts & fermés, selon que la parallele autour de laquelle ces figures tourneront, les touchera ou ne les touchera pas.

## PROBLEME XXXIII.

173. *Mesurer un anneau circulaire fermé.*

Multipliez le cercle generateur par sa circonference, & le produit sera la solidité de l'anneau.

### DEMONSTRATION.

Soit ABCD (*Fig.* 145.), le cercle generateur, concevez que de tous les points de la demi-circonference DAB, soient menées dans le plan du cercle des perpendiculaires DF, LM, IN, &c. sur la droite EF, autour de laquelle le cercle doit tourner. Ces perpendiculaires couperont l'autre demi-cercle BCD en un même nombre de points; concevez encore que sur tous les points de la demi-circonference DAB, il s'éleve sur le plan du cercle des perpendiculaires LX, IZ, &c. égales chacune aux circonferences que décriront les lignes correspondantes DF, LM, IN, &c. & que sur tous les points de la demi-circonference BCD, il s'éleve aussi des perpendiculaires égales aux circonferences que décriront les parties SM, VN, &c. des lignes précedentes; enfin que du sommet de ces perpendiculaires soient menées les

droites TF, XM, ZN, &c. ce qui vous donnera des triangles rectangles FDT, MLX, &c. qui seront 1°. perpendiculaires au plan du cercle generateur, parce que leurs hauteurs sont perpendiculaires à ce plan ; 2°. paralleles entr'eux, à cause que leurs bases sont paralleles & leurs hauteurs aussi ; 3°. semblables entr'eux, parce que leurs hauteurs sont à leurs bases comme des circonferences de cercles à leurs rayons ; ( les hauteurs DT, LX, &c. ont été faites dans la figure moindres qu'il ne faut pour ménager l'espace de la planche, mais il faut les concevoir égales aux circonferences des lignes correspondantes, ainsi que nous l'avons dit ).

Maintenant tandis que le cercle tournera autour de EF, les droites DF, LM, &c. décriront des cercles égaux aux triangles correspondans, & les parties de ces lignes compriſes dans le cercle, c'est-à-dire les parties LS, IV, décriront des couronnes qui seront égales aux trapezoïdes compris dans les triangles, c'est-à-dire aux trapezoïdes LXRS, IZPV, &c. car, par exemple, la couronne LS sera égale au cercle de LM, moins le cercle de SM ; or le trapezoïde LXRS est égal au triangle LXM, moins le triangle SRM, & ces deux triangles sont égaux aux cercles de la couronne ; donc la couronne & le trapezoïde sont égaux, & ainsi des autres : mais toutes les couronnes jointes au cercle que décrira la droite AC, sont égales à l'anneau ; donc tous les trapezoïdes joints au triangle AQC, sont aussi égaux à l'anneau. Or les trapezoïdes & le triangle ABC forment un cylindre tronqué par un plan qui passe le long de la diagonale QC ; car les côtez perpendiculaires sur le plan du cercle, forment la surface cylindrique, & les côtez qui sont partie des hypotenuses des triangles, forment le plan incliné, à cause que toutes les hypotenuses des triangles étant également inclinées sur le plan du cercle, composent ensemble un même plan. Donc l'anneau fermé est égal à un cylindre tronqué par un plan diagonal, lequel cylindre a pour base le cercle generateur, & pour hauteur la droite AQ, qui est double de la circonference de ce cercle, à cause que la droite AC est double du rayon.

Or supposant que ce cylindre soit représenté par la figure 146, & qu'on vienne à le couper par un plan EF, parallele à sa base & qui passe par le milieu de sa hauteur, il est évident que le cylindre AEFB sera égal au cylindre tronqué ABC, & par conséquent à l'anneau ; or ce cylindre est le produit de la base ou du cercle

generateur

generateur par sa hauteur AE égale à la circonference de ce cercle, dont l'anneau est aussi égal à ce produit.

### COROLLAIRE I.

174. Si le cercle APBO (*Fig.* 146.), représente le cercle generateur, qui tourne autour de la droite NM, à laquelle le diametre PO est parallele, & que le cylindre ACB tronqué diagonalement, représente la solidité de l'anneau, tirant les perpendiculaires PG, OH, qui coupent le plan oblique aux points G, H, & menant la droite GH, la partie exterieure de l'anneau, c'est-à-dire celle qui est formée par le demi-cercle PAO, sera égale à la portion cylindrique APOHGEC, & la partie interieure formée par le demi-cercle PBO, sera égale à l'autre portion PBOHG; ce qui est évident par la démonstration précedente.

Dans la figure 143, la portion exterieure de l'anneau est celle qui est compriſe entre la grande circonference BRS, & la moyenne OPQ, & l'interieure est celle qui est compriſe entre la moyenne circonference OPQ, & le centre D de révolution.

### COROLLAIRE II.

175. *La partie exterieure d'un anneau circulaire fermé, surpasse l'interieure de la valeur de deux spheres du cercle generateur.* Coupez le cylindre tronqué ABC (*Fig.* 146.), que nous suppoſons égal à l'anneau par un plan EF parallele à sa baſe, & qui passe par le milieu de sa hauteur. Le cylindre AEFB est égal à l'anneau, coupez le cylindre en deux parties égales par un plan PGHO perpendiculaire à sa baſe, & qui passe par le diametre PO; & enfin coupez le cylindre AEFB par un plan GHA, qui forme l'onglet GHEA égal à l'onglet GHFB, lequel est aussi égal à l'onglet GHEC; la portion GHEAPO du cylindre AEFB, étant égale à la portion GFHOBP, & l'onglet GHEA égal à l'onglet GHFB, le reste GHOPA, sera égal au reste GHOPB; mais GHOPB est égal à la portion interieure de l'anneau; donc si de la portion GHOPAEC égale à la portion exterieure de l'anneau, on retranche la portion GHOPA, le reste GHAC sera l'excès de la portion exterieure sur l'interieure. Mais cet excès est compoſé de deux onglets égaux de la premiere eſpece GHEC, GHEA, & chacun de ces onglets a pour hauteur la circonference du cercle generateur, puiſque la hauteur AC est double de cette circonference. Donc chaque onglet vaut la sphere du cercle gene-

rateur ; donc la portion exterieure de l'anneau surpasse l'interieure de deux spheres du cercle generateur.

### COROLLAIRE III.

176. Si l'on coupe le cercle generateur AB (*Fig.* 147.), par des cordes CH, LM, ER, qui forment des segmens & des bandes, les portions de l'anneau formées par ces parties du cercle, se trouveront en élevant sur la base du cilindre tronqué ABT égal à l'anneau des plans perpendiculaires qui passent par les cordes CH, LM, EF ; ainsi la portion produite par le segment CAH, sera égale à la portion cylindrique CHQPTA, celle qui est produite par la bande CHML, sera égale à la portion CHLMNOQP, & ainsi des autres, & ces portions se mesureront par les principes que nous avons donné ci-dessus en parlant des onglets.

### PROBLEME XXXIV.

177. *Mesurer un anneau circulaire ouvert.*

Retranchez la petite circonference de la grande, prenez la moitié du reste, & ajoûtant cette moitié à la petite circonference, multipliez la somme par le cercle generareur, & le produit sera la valeur de l'anneau circulaire.

### DEMONSTRATION.

Soit AB (*Fig.* 148.), le cercle generateur ; BM la distance du centre de révolution M au cercle, & AC la grande circonference, les triangles CAM, FBM, étant semblables, on a AC. AM :: FB. BM. donc AC étant la circonference du rayon AB, la droite FB sera la circonference du rayon BM, ou la petite circonference ; or par la démonstration du Probleme précedent, BF sera la moindre de toutes les perpendiculaires élevées sur le plan du cercle generateur de tous les points de sa circonference, & par conséquent CIFL sera le plan incliné, soutenu par ces perpendiculaires, & le cylindre tronqué ABFC sera égal à l'anneau ouvert. Or si l'on coupe ce cylindre par deux plans EF, GH, paralleles à la base, dont l'un passe par l'extrêmité F de la droite BF égale à la petite circonference, & l'autre par le milieu du plan incliné CF, le cylindre AGHB sera égal au cylindre tronqué, parce que l'onglet LIGC étant égal à l'onglet LIHF, qui a même base & même hauteur ; si l'on ôte du cylindre tronqué

l'onglet LIGC, & qu'on lui donne l'onglet LIHF, le cylindre AGHB aura la même valeur. Mais le cylindre AGHB eſt compoſé de deux cylindres AEFB, EGHF, dont le premier a pour baſe le cercle generateur, & pour hauteur la droite BF égale à la petite circonference, & le ſecond a auſſi pour baſe le cercle generateur, & pour hauteur la droite EG, ou la moitie de EC, qui eſt la difference de la grande circonference AC à la petite AF; donc le cylindre ABHG a pour baſe le cercle generateur, & pour hauteur une droite GA égale à la petite circonference, plus la moitié de la difference de la grande à la petite; donc l'anneau égal au cylindre ABHG, eſt le produit du cercle generateur par la droite GA.

## COROLLAIRE I.

178. *La partie exterieure d'un anneau ouvert excede l'interieure de la valeur de deux ſpheres de ſa baſe.* Si l'on éleve ſur le diametre PQ un plan perpendiculaire au cercle generateur, lequel coupera le cylindre AGHB en deux parties égales, la partie exterieure de l'anneau, ſera égale à la moitié APQLIG de ce cylindre, plus l'onglet ILGC; & au contraire la partie interieure ſera égale à l'autre moitié PQBHLI, moins l'onglet ILHF égal à l'onglet ILGC; donc la partie exterieure ſurpaſſera l'interieure de la valeur de deux fois l'onglet ILGC. Mais cet onglet eſt de la premiere eſpece, & ſa hauteur GC étant égale à la moitié de la difference de la grande circonference à la petite, eſt par conſéquent égale à la circonference de la moitié de la difference du grand rayon AM au petit BM, c'eſt-à-dire à la circonference du rayon OB du cercle generateur; donc l'onglet eſt égal à la ſphere de ce cercle, & par conſéquent la partie exterieure de l'anneau ſurpaſſe l'interieure de deux fois cette ſphere.

## COROLLAIRE II.

179. On trouvera aiſément les parties d'un anneau ouvert faites par les ſegmens & les bandes qu'on pourroit former dans le cercle generateur.

## REMARQUE I.

180. Tout ce que nous avons dit de l'anneau fermé & de l'ouvert, doit s'entendre auſſi de l'anneau Elliptique, ſoit que l'Ellipſe tourne autour du grand ou du petit axe, & des anneaux

paraboliques & hyperboliques, dont la parabole ou l'hyperbole generatrice tourne autour de son axe (*Fig.* 149. 150. 154. 155.); mais au lieu de dire que la portion exterieure de l'anneau Elliptique ouvert ou fermé surpasse l'interieure de deux spheres, il faut dire qu'elle la surpasse de deux spheroïdes allongés ou applatis de l'Ellipse generatrice (*Fig.* 154. 155.), & de même on doit dire que la portion exterieure d'un anneau parabolique ou hyperbolique, tel que nous l'avons décrit, surpasse l'interieure de deux paraboloïdes ou deux hyperboloïdes qui seront décrits par la demi-parabole ou la demi-hyperbole ACB autour de leur axe AB. (*Fig.* 149. 150.).

## REMARQUE II.

181. Si l'on fait tourner une parabole ABD (*Fig.* 156.), autour d'une tangente CE à son sommet B, l'anneau produit par sa circonvolution sera égal à un cylindre parabolique tronqué, dont la base ACB (*Fig.* 157.), est égale à la parabole generatrice, & la hauteur AD égale à la circonference de son axe pris pour rayon; ce qui est évident. Or on mesure ce cylindre en ôtant du cylindre entier ACBEDF l'onglet CFED, & comme cet onglet est égal au paraboloïde produit par la même parabole ABD (*Fig.* 156.), qui tourneroit autour de son ordonnée AD, à cause qu'il a même base, & que sa hauteur FC est égale à la circonference décrite par son diametre BH pris pour rayon, il s'ensuit que le cylindre entier est égal au paraboloïde autour de AD, & à l'anneau autour de CE.

Il n'en est pas de même de l'anneau formé par une hyperbole qui tournera autour d'une tangente à son sommet; car l'hyperboloïde autour de l'ordonnée DA, n'étant point connu, il n'est pas possible non plus de trouver l'anneau, cependant voici quelque chose de surprenant: Si au lieu de faire tourner l'hyperbole autour de son sommet, on la fait tourner autour de son petit axe, CF (*Fig.* 159.), dès-lors la valeur de l'anneau ouvert devient connuë de cette façon. Décrivez l'hyperbole opposée NLM, & autour de la base CA un demi-cercle CDA, puis tirez une droite HIL parallele au grand axe. Nous avons démontré (*Partie* 3. *n.* 159.), que le rectangle LI×IR est au rectangle AI×IC, comme le premier axe BQ est à son parametre. Or par la proprieté du cercle le rectangle AI×IC est égal au quarré $\overline{HI}^2$; donc le rectangle LI×IR

eſt au quarré $\overline{HI}^2$, comme l'axe BQ à ſon parametre ; mais RL étant diviſée en deux également en T, & la ligne IR lui étant ajoûtée, le rectangle LI×IR eſt égal au quarré $\overline{IT}^2 - \overline{RT}^2$ ; donc $\overline{IT}^2 - \overline{RT}^2$ eſt à $\overline{HI}^2$, comme BQ au parametre, & au lieu des quarrez des deux premiers termes mettant les cercles, on aura le cercle IT, moins le cercle de RT, c'eſt-à-dire la couronne produite par IR autour du petit axe, eſt au cercle de HI, comme l'axe BQ au parametre ; or comme cela arrivera partout de même, il s'enſuit que toutes les couronnes qui compoſent l'anneau, ſont à tous les cercles des ordonnées au demi-cercle CDA, comme l'axe au parametre ; ainſi ſuppoſant l'axe & le parametre égaux, l'anneau ſera égal à la ſphere du demi-cercle, & dans le cas d'inégalité l'anneau ſera à la ſphere, comme l'axe au parametre.

## PROBLEME XXXV.

182. *Meſurer le vuide d'un anneau, ſoit fermé, ſoit ouvert.*

Le creux d'un anneau a toujours pour baſe le cercle de la petite circonference dans l'anneau fermé, & de la moyenne dans l'anneau ouvert (*Fig.* 143 144.), & la partie interieure de l'anneau jointe à ſon creux, forme un cylindre qui a pour baſe la circonference dont nous venons de parler, & pour hauteur le diametre parallele à la ligne autour de laquelle la figure generatrice tourne (*Fig.* 141. 142.). Ainſi ſi l'anneau eſt fermé, ôtez du cylindre CDAB (*Fig.* 151), la portion interieure de l'anneau, le reſte ſera le creux CEBAED ; c'eſt la même choſe pour les anneaux ouverts, circulaires, Elliptiques & même paraboliques & hyperboliques, lorſque la parabole ou l'hyperbole generatrice tournent autour d'une parallele à leur axe (*Fig.* 153. 154. 155.) ; mais quand la parabole ou l'hyperbole tournent autour d'une tangente à leur ſommet, ou d'une parallele à cette tangente (*Fig.* 152. 156. 159.), alors il faut ôter du cylindre fait par la circonvolution de l'ordonnée DA (*Fig.* 152. 156.), ou AC (*Fig.* 159), l'anneau entier, & le reſte ſera le creux de l'anneau. Tout cela n'a pas beſoin de démonſtration.

### COROLLAIRE I.

183. On tire de-là un moyen facile de meſurer les pyramides

à arêtes courbes & concaves, soit qu'elles soient entieres, ou qu'elles soient tronquées par un plan parallele à la base. Soit, par exemple, la pyramide ABCDEFG (*Fig.* 161.), dont la base est un exagone regulier, & dont les arêtes sont des quarts de circonference d'Ellipses; je circonscris un cercle à sa base, & je conçois sur ce cercle un cone de même hauteur que la pyramide, & dont les côtez soient concaves & égaux au quart d'Ellipse; il est visible que ce cone ne sera autre chose que le creux inferieur d'un anneau Elliptique fermé: & comme la portion HGF de l'Ellipse generatrice est la moitié de sa portion interieure, je prens la moitié de la portion interieure de son anneau, & je retranche du cylindre fait sur le cercle FABCDE, & sur la hauteur FH la moitié que je viens de trouver, & le reste est le cone, ou le creux inferieur de l'anneau. Or si je conçois que le cone soit coupé par une infinité de plans paralleles à sa base, & la pyramide exagonale par un égal nombre de plans, les sections du cone feront des cercles dans lesquels les sections de la pyramide qui feront des exagones, pourront être inscrits; ainsi les exagones qui forment la pyramide feront entr'eux comme les cercles. Donc je dis: le cercle de la base est à l'exagone de la base, comme le cone est à la pyramide que je trouve par une regle de proportion.

## COROLLAIRE II.

184. Que si l'aréte GF étoit moindre que la circonference d'un quart d'Ellipse, ou d'un quart de cercle, ou d'une demi-parabole, ou d'une demi-hyperbole, je couperois la pyramide par un plan qui passât par l'aréte. Du point F je menerois dans ce plan une droite FH parallele à l'axe de la pyramide, lequel est une portion de la ligne autour duquel la figure generatrice tourne, & du sommet G je tirerois HG perpendiculaire à cet axe; après quoi j'examinerois quelle portion de l'anneau la partie HGF décrit, & je retrancherois cette portion du cylindre décrit par le rectangle FHGO, & le reste seroit la valeur du cone ou creux fait par cette portion; c'est pourquoi je trouverois ensuite facilement la valeur de la pyramide.

## COROLLAIRE III.

185. Que si la base de la pyramide n'étoit pas reguliere, mais qu'elle pût être inscrite dans un cercle, comme le parallelo-

grame ABCD (*Fig.* 162.), & que ſes arétes fuſſent toutes égales entr'elles, on meſureroit la pyramide de même que celles qui ont des baſes regulieres, puiſque toutes les ſections de la pyramide pourroient être inſcrites dans les ſections du cone fait ſur le cercle ABCD circonſcrit à la baſe.

## COROLLAIRE IV.

186. Enfin ſi la pyramide étoit tronquée par un plan EHGF (*Fig.* 163.), parallele à la baſe, je couperois la pyramide par un plan qui paſſat par l'aréte EA, & la diagonale EG, je prolongerois la diagonale indéfiniment en R, & du point A je tirerois la perpendiculaire AR ſur OR, & ſuppoſant que ARE fût un quart de cercle, je regarderois ce quart du cercle comme la moitié de la portion interieure d'un cercle qui tourneroit autour de l'axe de la pyramide, lequel par conſéquent donneroit un anneau ouvert. Je chercherois la portion de cette anneau produite par la circonvolution du quart du cercle, & je retrancherois cette portion du cylindre que produiroit le rectangle OQAR par ſa circonvolution, le reſte feroit le cone tronqué, ou creux inferieur de l'anneau. Or il eſt viſible que la baſe de la pyramide ſeroit inſcrite dans ce cone; c'eſt pourquoi je dirois: Comme le cercle ou baſe du cone eſt à la baſe de la pyramide, ainſi le cone eſt à la pyramide que je trouverois par une regle de proportion.

## *De la meſure des Voutes.*

## DEFINITION XVIII.

187. Perſonne n'ignore ce que c'eſt qu'une voute; mais tout le monde ne ſçait peut-être pas que les murailles ſur laquelle la voute porte, s'appellent *pieds droits*, & que celles ſur laquelle la voute ne porte pas, & qui ne ſervent qu'à enfermer l'Edifice, s'appellent *pignons*. Ainſi les murailles CDBA, HGFE (*Fig.* 164.), ſont les *pieds droits* de la voute DGRPBF, & les murailles CDRGH, ABPFE, en ſont les *pignons*.

On diſtingue trois ſortes de voutes; la voute *à plein centre*, ainſi appellée, parce que ſa coupe BPF perpendiculaire entre les deux pignons, eſt un demi-cercle (*Fig.* 164.); la voute *ſurbaiſſée*, dont la coupe BAC (*Fig.* 165.), eſt une demi-Ellipſe, dont le grand axe BC eſt parallele au plan de l'Edifice; & enfin

la voute *à tiers point*, dont la coupe BAC (*Fig.* 166.), eſt compoſée de deux portions de cercles BA, AC, chacune deſquelles vaut moins qu'un quart de cercle. On pourroit en faire une quatriéme, dont la coupe ſeroit une demi-Ellipſe, qui auroit ſon petit axe parallele au plan de l'Edifice, & qui pour cela s'appelleroit *voute exhauſſée*; on pourroit encore en faire dont la coupe ſeroit une parabole, une Ellipſe, &c.

Ces voutes ſont ou *ſimples & unies*, comme celles qu'on fait aujourd'hui (*Fig.* 164. 165. 166.), ou compoſées d'arcs, dont les uns BMD, HNF, &c. (*Fig.* 167.), ſont paralleles entr'eux, & les autres HRD, BRF, ſe croiſent au ſommet de la voute, ainſi qu'on peut voir dans les anciennes Egliſes, ce qui fait que les parties de ces voutes n'ont pas toutes la même courbure.

Pour empêcher que la pluye ne donne ſur les voutes, on les couvre dans les Magazins des Places de Guerre, d'un toit maſſif, dont la coupe eſt un triangle ABC (*Fig.* 170.), ce qui les rend plus ſolides & à l'épreuve de la bombe; mais dans les autres Edifices, on les couvre ſimplement d'un toit de charpente, dont nous ne parlerons point, parce que ces toits s'eſtiment par le prix qu'on a fait avec le charpentier pour le bois, & avec les Couvreurs pour les thuiles ou les ardoiſes.

## PROBLEME XXXVI.

188. *Meſurer une voute ſimple ou unie.*

Les pieds droits & les pignons n'étant autre choſe que des parallelepipedes qu'on peut meſurer facilement, nous n'en parlerons point. Ainſi ſuppoſant que la coupe BPF (*Fig.* 164.) de la voute priſe en dedans du Bâtiment, ſoit un demi-cercle, on multipliera le demi-cercle par la longueur PR de la voute, & le produit ſera le vuide renfermé par la voute; ce qui eſt évident, puiſque ce vuide eſt un demi-cylindre, dont le demi-cercle BPF eſt la baſe, & PR eſt la hauteur. Dans la figure 164, je n'ai marqué que la coupe interieure; mais dans la figure 165, 166, j'ai repréſenté diſtinctement la coupe interieure & exterieure.

Si la voute étoit ſurbaiſſée (*Fig.* 165.), on multiplieroit la coupe interieure IOR, qui eſt une demi-Ellipſe par la longueur IS, ce qui donneroit le vuide que la voute renferme.

Enfin pour trouver le vuide d'une voute à tiers point (*Fig.* 166.), on tirera ſur ſa coupe BAC les droites AB, AC, qui formeront le triangle ABC, à la valeur duquel on ajoûtera la valeur

valeur des segmens de cercles BA, CA, & on multipliera la somme par la longueur BS.

Le vuide étant trouvé, si le toit de la voute est massif (*Fig.* 170.), on multipliera la coupe exterieure ABC par la longueur BI, & le produit sera la valeur du toit de la voute, & du vuide de la voute pris ensemble; c'est pourquoi ôtant de ce produit le vuide de la voute, le reste sera la solidité de la voute & du toit.

Mais si le toit est une charpente, on fera attention que l'épaisseur de la voute étant la même partout, cette épaisseur jointe au vuide, forme un solide semblable au solide du vuide renfermé par la voute, & que ces deux solides ont la longueur commune. C'est pourquoi on prendra la coupe exterieure de la voute, c'est-à-dire la coupe IGH (*Fig.* 166.), & on la multipliera par la longueur BS; après quoi retranchant du produit le solide du vuide, le reste sera la solidité de la voute.

## REMARQUE.

189. Si les fenêtres des Edifices des voutes se prenoient toujours dans la solidité des pieds droits (*Fig.* 165.), ou des pignons (*Fig.* 164.), la difficulté ne seroit pas bien grande; mais quand les jours sont percés dans la voute même, comme on fait dans la plûpart des Eglises, alors il se forme des vuides dans la voute, dont la mesure souffre des difficultés qui me paroissent insurmontables, & dont je parlerai après que j'aurai expliqué ce qui regarde les voutes composées de differens arcs.

## PROBLEME XXXVII.

190. *Mesurer une voute composée de differens arcs* (Fig. 167.).

En jettant les yeux sur la figure 167, on s'appercevra aisément que si on peut mesurer la partie de voute comprise entre les quatre premiers pilliers AB, GH, EF, CD, on aura facilement la mesure de la voute entiere, qui n'est autre chose que cette partie réiterée plusieurs fois.

Pour trouver donc cette partie, je fais passer un plan par les extrêmitez B, H, F, D, des quatre pilliers, lequel plan est un quarré long, ou rectangle ABCD (*Fig.* 168.), à cause que la distance AB n'est jamais si grande que la distance AD; & faisant abstraction de l'embrazure des fenêtres, je trouve que le reste de cette partie de voute est composé d'une calotte BODCOA,

(*Fig.* 168.), faite par les deux arcs BOD, COA, qui se croisent, & de deux especes d'onglets AOD, VOC, qui sont égaux entr'eux.

De même faisant abstraction des deux onglets AOD, VOC, sans faire abstraction de l'embrazure des fenêtres, je trouve que le reste de cette partie de voute (*Fig.* 169.), est composé de la même calotte ABCDO, & de deux especes d'onglets ABHO, CDIO, égaux entr'eux.

Or supposant que les arcs paralleles de la voute soient des demi-cercles, je dis 1°. que la figure 168 est un demi-cilindre circulaire qui a pour base le demi-cercle AED, & pour hauteur la droite FE perpendiculaire entre les deux demi-cercles paralleles, & que ce demi-cylindre est coupé diagonalement par deux demi-Ellipses COA, DOB; 2°. que la Figure 169. est un demi-cylindre Elliptique, qui a pour base une demi-Ellipse CID, & pour hauteur la droite HI perpendiculaire entre la demi-Ellipse CID, & l'opposée BHA, & que ce demi-cylindre est aussi coupé diagonalement par les deux demi-Ellipses COA, DOB; 3°. que par conséquent les deux cylindres se coupent dans la partie de la voute que nous cherchons à mesurer, & que pour avoir la valeur de cette partie, il ne s'agit que de connoître la calote ABCDO & les quatre onglets, ce qui n'est pas difficile à trouver, comme je le ferai voir, après que j'aurai démontré ce que je viens de dire.

Je tire dans la base ABCD (*Fig.* 168.), les diagonales AC, BD, & du sommet O de la calote la perpendiculaire OP sur cette base, laquelle tombe sur le point P où les diagonales se coupent, parce que les deux arcs égaux BOD, AOC, se coupent mutuellement par le milieu; d'où il suit que le point O est également éloigné des quatre points A, B, C, D, de même que le point P en est aussi également éloigné, & par conséquent OP est la perpendiculaire que j'ai tirée. OP est donc le demi-axe de la courbe BOD, de même que de la courbe AOC; & comme ce demi-axe est ordinairement égal à la hauteur RE des cercles paralleles, laquelle est égale au rayon AR, moindre que la demi-diagonale BP; les figures BOD, AOC, ne peuvent pas être des demi-cercles, mais elles sont ou des demi-Ellipses, ou des demi-paraboles, &c. supposons que ce soient des demi-Ellipses, & si notre supposition est vraye, nous trouverons infailliblement les demi-cercles AED, BFC, tels qu'ils sont, en cette sorte.

Soit la calote ABCDE (*Fig.* 173.), formée par deux demi-Ellipſes égales AEC, BED, dont les grands axes ſont les diagonales BD, AC, de la baſe de la voute, & dont le demi-axe commun OE eſt égal à la hauteur de la voute; j'éleve ſur les deux côtés AD, BC, de la baſe des plans perpendiculaires & indéfinis A*ad*D, B*bc*C; puis du ſommet E de la calote je tire une droite FEG parallele aux petits côtez AB, DC, de la baſe juſqu'à ce qu'elle coupe les plans indéfinis aux points F, G, d'où j'abbaiſſe ſur la baſe les perpendiculaires FI, GH, qui ſeront paralleles & égales chacune à la hauteur EO de la voute; je conçois que la calote ſoit coupée par une infinité de plans XSVT, paralleles à la baſe, dont les ſections XS ſur la face DES ſeront des lignes droites paralleles entr'elles & au côté DC de la baſe. Des points X, S, j'abbaiſſe ſur la baſe les perpendiculaires X*a*, S*r*, qui ſeront égales & paralleles, je prolonge XS de part & d'autre, juſqu'à ce qu'elles rencontrent les plans indéfinis aux points P, Q, d'où j'abbaiſſe ſur la baſe les perpendiculaires PR, QZ, qui ſeront égales & paralleles aux perpendiculaires X*a*, S*r*; enfin je tire la droite RZ, qui ſera parallele à AB, à cauſe que PQ a été tirée parallele à AB; les triangles ADB, IDO, RD*a* ſont donc ſemblables, & par conſéquent les lignes AD, DB ſont coupées proportionnellement aux points I, R, O, *a*. Donc AR×RD. AI×ID :: B*a*×*a*D. BO×OD. mais la figure BED étant une Ellipſe par la ſuppoſition, on a $\overline{Xa}^2$. $\overline{EO}^2$ :: B*a*×*a*D. BO×OD :: AR×RD. AI×ID. & $\overline{Xa}^2 = \overline{PR}^2$. & $\overline{EO}^2 = \overline{FI}^2$. donc $\overline{PR}^2$. $\overline{FI}^2$ :: AR×RD. AI×ID. mais comme nous avons ſuppoſé EO = AI, ou ID; donc $\overline{FI}^2 =$ AI×ID. & par conſéquent $\overline{PR}^2 =$ AR×RD; & comme cela arrivera à tous les points où les paralleles ſur la face DEC couperont le plan indéfini A*ad*D, il s'enſuit que IED eſt un quart de cercle, & on prouvera de la même façon que AIF en eſt auſſi un quart; d'où il ſuit que AFD eſt préciſément le demi-cercle de la voute, & que BGC eſt le demi-cercle oppoſé, & que la voute, en faiſant abſtraction des embrazures des fenêtres, eſt un demi-cylindre AFDCGB coupé diagonalement par deux demi-Ellipſes.

Maintenant pour faire voir que la voute conſiderée ſeulement d'une fenêtre à l'autre, eſt un demi-cylindre Elliptique coupé

diagonalement par les deux mêmes demi-Ellipſes. J'éleve ſur les petits côtez AB, DC, de la baſe (*Fig.* 172.), des plans indéfinis AFGB, DHIC, perpendiculaires ſur la baſe; du ſommet E de la calote je tire la droite LM parallele aux côtez AD, BC, de la baſe, juſqu'à ce qu'elle coupe les plans indéfinis aux points L, M, d'où j'abbaiſſe ſur la baſe les perpendiculaire LF, MQ, qui ſeront égales & paralleles à la hauteur EO de la voute: Je conçois que la calote ſoit coupée par une infinité de plans RSTV paralleles à la baſe, & je prolonge les côtez RV qui ſont ſur la face AED de la calote, juſqu'à ce qu'elles coupent les plans indefinis aux points X, Z; j'abbaiſſe ſur la baſe les perpendiculaires R*d*, V*h*, X*a*, Z*b*, & je tire les droites PQ, *ab*, qui ſeront paralleles au côté BC de la baſe. Ainſi les triangles BAC, PAO, *a*A*d*, ſont ſemblables; donc B*a*×*a*A. BP×PA :: C*d*×*d*A. CO×OA: or la figure AEC étant une Ellipſe, on a $\overline{R}^2 d$. $\overline{EO}^2$ :: C*d*×*d*A. CO×OA :: B*a*×*a*A. BP×PA. & comme $\overline{X}^2 a = \overline{R}^2 d$, & $\overline{LP}^2 = \overline{EO}^2$. on a $\overline{X}^2 a$. $\overline{LP}^2$ :: B*a*×*a*A. BP×PA. Or PL = EO = $\frac{1}{2}$AD, & $\frac{1}{2}$AD eſt plus grand que $\frac{1}{2}$AB, ou que AP; donc APL eſt un quart d'Ellipſe, dont le demi-grand axe eſt LP, & le demi-petit axe eſt AP; & on prouvera de même que PLB eſt auſſi un quart d'Ellipſe: d'où il ſuit que ALB eſt une demi-Ellipſe égale à la demi-Ellipſe oppoſée DMC, & que la voute conſiderée ſeulement d'une fenêtre à l'autre, eſt un demi-cylindre Elliptique coupé diagonalement par deux demi-Ellipſes; donc les deux demi-cylindres ſe coupent mutuellement, & la calote eſt leur partie commune.

Pour en venir préſentement à la pratique, je commence par la calote ABCDE (*Fig.* 171.), je la conçois coupée par une infinité de plans paralleles STVX à la baſe, & je trouve que ces plans ſont des parallelogrames ſemblables; car tirant leurs diagonales, le triangle TRS eſt ſemblable au triangle BOS, le triangle SRX eſt auſſi ſemblable au triangle AOD, & les autres triangles RXV, VRT, ſont égaux chacun à chacun aux triangles TRS, SRX; or le triangle TRS, eſt au triangle BOA, comme $\overline{SR}^2$ eſt à $\overline{AO}^2$, & le triangle SRX eſt au triangle AOD, encore comme $\overline{SR}^2$ eſt à $\overline{AO}^2$; donc les quatre triangles de chaque parallelograme, c'eſt-à-dire chaque parallelograme eſt aux

quatre triangles de la base ou à la base, comme $\overline{SR}^2$ est à $\overline{AO}^2$. Mais SR, AO, sont les ordonnées à l'Ellipse AEC; donc tous les parallelogrames sont entr'eux comme les quarrez, ou comme les cercles des ordonnées à l'Ellipse. Mais pour avoir la somme des cercles des ordonnées il faut multiplier le plus grand par les deux tiers de la hauteur EO; donc multipliant le plus grand parallelograme ABCD par les deux tiers de EO, le produit est la calote.

La calote étant trouvée, je fais le demi-cylindre AFDCGB (*Fig.* 173.), compris entre les deux demi-cercles paralleles de la voute, j'en retranche la calote, & le reste est la valeur de deux especes d'onglets AED, BEC.

Je fais de même : le demi-cylindre Elliptique (*Fig.* 172.), compris entre les fenêtres, j'en retranche la calote, & le reste est la valeur des onglets AEB, DEC.

J'ajoûte la valeur des quatre onglets, & celle de la calote, & la somme est le vuide que renferme la voute.

Cela fait je considere que l'épaisseur de la voute qui est la même partout, forme avec ce vuide une figure ressemblante à celle du vuide, composée de deux demi-cylindres, dont l'un qui est circulaire, a la hauteur égale à celle du cylindre circulaire du vuide, & l'autre qui est Elliptique, a la hauteur égale à celle du cylindre Elliptique du vuide; ainsi les deux cylindres du plein & du vuide pris ensemble, sont aux deux cylindres du vuide comme les bases sont aux bases. Je prolonge la hauteur OE (*Fig.* 173.), en z, jusqu'à ce que Ez soit égal à l'épaisseur de la voute, & la droite Oz est le rayon du demi-cercle du demi-cylindre circulaire du plein & du vuide; or les demi-cercles étant semblables, sont entr'eux comme les quarrez de leurs rayons: donc la base du demi-cylindre circulaire du plein & du vuide est à la base du demi-cylindre circulaire du vuide, comme le quarré $\overline{Oz}^2$, au quarré $\overline{OE}^2$, & par conséquent à cause de la hauteur commune FF, les cylindres sont entr'eux comme $\overline{Oz}^2$. $\overline{OE}^2$. De même dans la figure 172, la base du demi-cylindre Elliptique du plein & du vuide, est à la base du demi-cylindre Elliptique du vuide, comme le quarré du demi-grand axe Oz de la base est au quarré du demi-grand axe OE, ou QM, & comme ces deux cylindres ont

ont la hauteur commune LM, ils sont entr'eux comme $\overline{Oz}^2$. $\overline{OE}^2$. Donc toute la figure du plein & du vuide est à la figure du vuide comme $\overline{Oz}^2$. est à $\overline{OE}^2$. je dis donc comme $\overline{OE}^2$ est à $\overline{Oz}^2$. Ainsi le vuide de la voute est au plein & au vuide joints ensemble, & la regle de proportion me donne le plein & le vuide; retranchant donc le vuide, le reste est la solidité de la voute.

Cette solidité étant trouvée, je le prens autant de fois qu'il y a de pareilles parties dans l'Edifice, & j'ai la voute totale.

*Remarque touchant la calote des voutes composées.*

191. Toute la difficulté qui se rencontre dans la mesure des voutes composées, ne consiste qu'à trouver la calote ABCDE (*Fig.* 171.), & cette calote se trouvera toujours aisément en suivant les regles que nous venons de donner, lorsque les arcs paralleles de la voute seront des demi-cercles, ou des demi-Ellipses, ou des paraboles, ou des hyperboles, supposé qu'il se trouve des voutes composées de ces sortes d'arcs; mais quand les voutes sont à tiers point, c'est-à-dire quand leurs arcs paralleles sont composés de deux arcs de cercle moindre chacun qu'un quart de cercle, ou de deux arcs d'Ellipse moindres chacun qu'un quart d'Ellipse, alors la calote n'est pas si aisée à trouver; & voici comment il faut résoudre la difficulté.

Soient les arétes AE, DE, &c. de la calote ABCDE (*Fig.* 171.), moindres chacune qu'un quart de circonference d'Ellipse, coupant cette calote par une infinité de plans paralleles, qui seront des parallelogrames semblables, tous ces parallelogrames seront entr'eux comme les quarrez, ou les cercles des ordonnées SR, AO, à la hauteur OE; mais cette hauteur OE n'étant pas le petit axe de l'Ellipse, les cercles des ordonnées SR, AO, ne produiront pas une demi-Ellipse, mais simplement une figure égale à un demi-onglet de la seconde espece, qui auroit pour base le plan AOE, & pour hauteur la circonference du cercle décrit par AO.

Pour trouver donc la valeur de cette figure, je fais le demi-Ellipse dont l'aréte AE est une portion, & supposant que cette demi-Ellipse soit ACE (*Fig.* 174.) je la coupe par la droite RS

parallele au petit axe AE, en sorte que l'arc RC soit égal à l'aréte AE de la calote (*Fig.* 171.), & que par conséquent la portion RCM (*Eig.* 174.) soit égal au plan AEO de la calote, je conçois un cylindre fait sur la demi-Ellipse ACE, & dont la hauteur CD soit égale à la circonference que décriroit le demi-grand axe BC, & je tronque ce cylindre par le plan incliné ADE, ce qui me donne un onglet ADE égal au spheroïde applati, décrit par la circonvolution de la base ACE autour du petit axe AE. Je coupe cet onglet par un plan perpendiculaire RFGS à sa base, & qui passe par RS, & ensuite par un autre plan FXG parallele à la base, & qui passe par FG; ce qui me donne l'onglet de la seconde espece FDXG, dont la base FXG, est égale à la portion RCS de la grande base, & dont la hauteur XD est égale à la circonference que décriroit VX, ou MC; car les triangles semblables BCD, VXD, donnent BC. CD :: VX. XD. & comme BC est le rayon d'une circonference égale à CD, VX, est par conséquent le rayon d'une circonference égale à XD. Donc le demi-onglet VFXD est égal au solide produit par la circonvolution des ordonnées SR, AO, autour de OE (*Fig.* 173.).

Pour avoir donc ce demi-onglet VFXD (*Fig.* 174.), je retranche de l'onglet ADE la portion ARFGSE, laquelle est égale au cylindre décrit par le rectangle PRSQ autour de PQ, plus le segment produit par ARP autour de AP, & le segment produit par QSE autour de QE, & le reste est la portion RFDGS, laquelle est égale au spheroïde applati, moins le cylindre & les deux segmens que nous venons d'en retrancher; enfin je retranche de la portion RFDGS le cylindre RCSGXF, qui a pour base la portion RSC de l'Ellipse, & pour hauteur la difference des droites CD, XD, & le reste est l'onglet FGXD, dont la moitié est la valeur de la somme des cercles décrits par les ordonnées SR, AO (*Fig.* 171.). Or tous les parallelogrames qui composent la calote, étant entr'eux comme ces cercles, je dis: Le cercle de $\overline{AO}^2$ est au demi-onglet FDXV, comme le grand parallelograme ABCD est à la calote que je trouve par une regle de proportion.

Cette calotte étant trouvée, les demi-cylindres de la voute se trouveront facilement, & le reste s'achevera comme ci-dessus.

*Remarque touchant les voutes composées, dont la base est un demi-polygone regulier.*

192. Dans la plûpart des anciennes Eglises le fonds de l'Edifice, c'est-à-dire l'endroit où l'on place le grand Autel, a pour plan un demi-decagone représenté par la figure 175, & l'on en mesurera la voute de cette façon.

Supposant que l'arc ABC (*Fig.* 175.), soit un demi-cercle égal à celui dans lequel est inscrit le demi décagone, les arêtes DE, EB, &c. de la voute, seront des demi-cercles; ainsi s'il n'y avoit ni fenêtres, ni embrazures, le vuide de la voute représenté par la figure 177, se trouveroit aisément en multipliant sa base ABCDEF par les deux tiers de sa hauteur GO; parce que si l'on conçoit que ce solide soit coupé par une infinité de plans paralleles à la base, ces plans seront semblables, & pourront être inscrits dans autant de cercles qui seront entr'eux comme ces plans; mais ces cercles formeroient un quart de sphere, dont la solidité se trouve en multipliant le demi-cercle de sa base par les deux tiers de la hauteur; donc on aura aussi le solide en multipliant le demi-décagone par les deux tiers de la hauteur.

Mais il faut ajoûter au vuide de la voute représenté par la figure 177, le vuide des embrazures des fenêtres, & comme ces vuides sont tous égaux entr'eux, il suffira d'en trouver un.

Pour cela achevez le cercle de la base, & supposons que ce soit le cercle AHCM (*Fig.* 176.); inscrivez-y un décagone ABRHI, &c. prenez deux côtez opposés AB, CD, que vous joindrez par les droites AD, BC, & vous tirerez les diagonales AC, BD, qui seront chacune égale au diametre du cercle. Du centre O élevez sur le plan du cercle la perpendiculaire OE égale au rayon; & décrivez les demi-cercles AEC, BED, qui formeront une calote, dont la valeur se trouvera en multipliant sa base ABCD par les deux tiers de sa hauteur, pour les raisons que nous avons déja dites plusieurs fois. Elevez sur les petits côtez AB, DC, de la base des plans perpendiculaires, & concevant que la calote soit coupée par une infinité de plans paralleles à sa base, si vous prolongez les côtez de ces plans qui sont sur les deux faces opposées AED, BEC, de la calote, jusqu'à ce qu'ils coupent les plans indéfinis, ils formeront sur ces plans des Ellipses égales AXB, DCZ, & vous aurez un cylindre Elliptique AXBCDZ

AXBCDZ, duquel ôtant la calote, le reſte ſera les deux onglets AXBE, DZCE, dont la moitié ſera le vuide d'une embrazure; multipliant donc ce vuide par 5, & l'ajoûtant au vuide repréſenté par la figure 177, vous aurez le vuide de la partie ABCED (*Fig.* 175.), de la voute.

Or ce vuide joint à l'épaiſſeur de la voute, forme un ſolide ſemblable à celui du vuide total; & comme ces deux ſolides n'ont aucune dimenſion commune, ils ſont entr'eux comme les cubes de l'une de leurs dimenſions. Ainſi prolongeant la hauteur OE du vuide (*Fig.* 176.), juſqu'à ce que EY ſoit égale à l'épaiſſeur de la voute, vous direz: le cube de OE eſt au cube de OY; comme le ſolide du vuide eſt à celui du plein & du vuide, & ce ſolide étant trouvé, vous en retrancherez le ſolide du vuide, & le reſte ſera la ſolidité de la voute.

Si les arêtes du vuide repréſenté par la figure 177, étoient moindres qu'un demi-quart de circonference, ou qu'un demi-quart d'Ellipſe, alors il faudroit faire un demi-onglet de la ſeconde eſpece égal à la ſomme des cercles des ordonnées à la hauteur GO (*Fig.* 177.), dans le plan AGO qui ſeroit moindre qu'un quart de cercle, puis on diroit: Comme le plus grand triangle de ce demi-onglet, ou comme le cercle décrit par le rayon AO, eſt au demi-onglet, ainſi la baſe ABCDEF eſt à la calote ABCDEFG.

*Remarque touchant les voutes où la hauteur de la calote eſt plus grande que celle des cercles paralleles.*

193. J'ai vû quelques Egliſes où la hauteur de la calote ſurpaſſe celle des arcs paralleles, & voici comment on peut concevoir la diſpoſition des parties de la voute, & de quelle maniere on doit les meſurer.

Soit le rectangle ADBC, (*Fig.* 178.), la baſe de la partie de la voute compriſe entre deux arcs paralleles, concevez que cette baſe ſoit élevée perpendiculairement ſur le plan du terrein, en ſorte que la voute s'appuye ſur l'un de ſes arcs paralleles DMC, comme ſur une baſe; ſoient les deux arcs DMC, AZB, des circonferences de demi-cercles; coupons le rectangle ABCD en deux parties égales par un plan qui lui ſoit perpendiculaire, & qui paſſe par la droite EH, la droite QO ſera égale au rayon AX, ou DM, des demi-cercles, & par conſéquent à leur hauteur. Pro-

longeons QO en E, en sorte que OE soit égal à la hauteur de la calote, & du centre O décrivons un demi-cercle ERH perpendiculaire au rectangle, & par conséquent parallele aux deux demi-cercles AZB, DMC; de tous les points de la circonference AZB, & de tous ceux de la demi-circonference DMC, tirons des droites aux points de la circonference ERH, ce qui nous donnera un solide AEDCHBZRM, composé de deux demi-cones tronqués ERHBZA, DMCHRE, égaux entr'eux, lequel solide j'appellerai *cylindre renflé*. Pour abreger le discours coupons ce cylindre par des plans perpendiculaires au rectangle ABCD, & qui passent par ses diagonales AC, DB, la courbe DR sera moindre que l'arc d'un quart d'Ellipse; car si l'on prolongeoit le côté CH du cone tronqué CHED, l'axe du plan coupant qui est une Ellipse, seroit DS; & comme DO est moindre que OS, la perpendiculaire OR est donc moindre que le demi-petit axe, & par conséquent l'arc DR moindre que le quart de la circonference d'une Ellipse; & il en est de même des arcs RC, RB, RA, qui sont égaux chacun à DR.

Otons du cylindre renflé les parties AORDE, BORCH, ce qui se trouve en cette sorte. Prolongez le côté EA jusqu'à ce qu'il rencontre l'axe du cone en T, mesurez les pyramides EORT, AORT, & ôtant la seconde de la premiere, vous aurez l'onglet AORE; or l'onglet EORD est égal à l'onglet AORE: doublant donc l'onglet AORE, vous aurez la valeur de la partie AORD du cylindre renflé; & comme la partie BORC est égale à la partie AORD, doublez AORD, & ôtant du cylindre renflé le double de AORD, le reste sera les deux portions ABRO, DCRO.

Maintenant considerons la voute dans sa situation ordinaire (*Fig.* 179.), les arcs DR, CR, BR, AR, forment la calote de la voute, & l'arc DMC avec les deux arcs DR, CR, forment une espece d'onglet, de même que l'arc AZR, avec les arcs AR, BC, forment une espece d'onglet égal au précedent. Pour trouver donc l'un & l'autre de ces onglets cherchons la partie DRCO de la calote, ce que nous trouverons facilement; car cette partie étant composée d'une infinité de triangles paralleles & semblables à sa base DCO, tous ces triangles seront entr'eux comme les quarrez ou comme les cercles des ordonnées à la hauteur RO dans le plan ARO; & comme ce plan est moindre qu'un quart d'Ellipse, il faut faire un demi-onglet de la seconde

espece, égal à la somme des cercles que produiroient les ordonnées à RO, puis dire : Comme le plus grand triangle de ce demi-onglet, ou comme le cercle du rayon DO est au demi-onglet, ainsi le triangle DOC est à la partie DCOR de la calote. Cette partie étant trouvée, nous la retrancherons de la partie ADCROM du cylindre renflé, diminuée de la partie AORDE (*Fig.* 178.), & le reste sera l'espece d'onglet DRCM (*Fig.* 179.), ce qui nous fera connoître l'autre onglet ARBZ.

Passons maintenant aux embrazures des fenêtres, lesquelles forment avec la calote un demi-cylindre DABCLI (*Fig.* 180.), ainsi que nous avons déja dit plusieurs fois ; multiplions la base CLB par la hauteur LI, ce qui nous donnera tout d'un coup la calote & les onglets des embrazures. Ainsi ajoûtant au produit les deux especes d'onglets DRCM, ARBZ (*Fig.* 179.), nous aurons le vuide entier de la voute comprise entre les deux arcs paralleles.

Ce vuide trouvé, il sera facile de trouver la solidité de la voute en suivant ce que nous avons dit ci-dessus.

## *Remarque touchant les embrazures des fenêtres des voutes simples.*

194. ABDC (*Fig.* 181.) est la partie d'une voute simple qui est percée par une fenêtre AEFGD. AE, DG sont les pieds droits de la fenêtre, & l'arc EFG en est le ceintre, lequel est ordinairement un demi-cercle. De tous les points des pieds droits AE, DG, & du demi-cercle EFG ; concevez qu'il s'éleve des perpendiculaires sur le plan AEFGD, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la voute où elles formeront la section AHSID, & vous aurez le vuide de la voute AHSIDGFQ, qu'il s'agit de mesurer.

Pour cela je multiplie d'abord la partie HEA par AD, & j'ai la portion HEADGI, je multiplie ensuite le demi-cercle EFG par HE, & j'ai la portion HRIGFE, après quoi il ne me reste plus que la portion HSIR, que je mesure comme un onglet de la premiere espece, ce qui me donne trop, parce que la partie HSIO de la voute, n'est pas un plan incliné sur la base HI, comme cela devroit être, si la portion HSIR étoit un onglet, mais une surface courbe qui laisse un espace entr'elle & le plan incliné de l'onglet.

Mais ne pourroit-on pas mesurer géometriquement la partie

HSIR ? c'eſt ce qui ne me paroît pas poſſible, & en voici la raiſon. Concevez que cette portion ſoit coupée par une infinité de plans paralleles au plan HIGE. Ces plans ſeront des rectangles dont les baſes ſeront les ordonnées au demi-cercle HRI paralleles à HI, & les hauteurs ſeront les diſtances de ces baſes à la voute, paralleles à la diſtance RS. Donc ces rectangles ſeront entr'eux en raiſon compoſée des ordonnées du demi-cercle, & des diſtances du demi-cercle à la voute, ou des diſtances de tous les points du rayon OR à la partie du cercle SO; mais ces deux raiſons ſont inconnuës, puiſque l'une ou l'autre étant connuë, on auroit la quadrature du cercle. Donc la raiſon des rectangles entr'eux eſt inconnuë, & par conſéquent leur ſomme ne peut ſe trouver.

Il faut donc néceſſairement meſurer la partie HSIR, comme un onglet; mais comme dans les grands Edifices où il ſe trouve beaucoup de fenêtres, le vuide qui ſe trouve entre le plan incliné de l'onglet, & la ſurface courbe ASIO, pourroit devenir conſiderable, étant multiplié par le nombre des fenêtres, on obviera à cet inconvenient en tirant les droites SH, SI (*Fig.* 182.), & les droites SX, HX, IX, au point X, qui eſt le milieu de SO, ce qui donnera une pyramide SHIX, qu'on retranchera de la valeur de l'onglet. Que ſi les vuides reſtans étoient encore conſiderables, on feroit d'autres petites pyramides en tirant des points S, H, X, des droites à quelque point de l'arc SX, & des points S, I, X, des droites au même point de l'arc SX; & enfin des points H, X, I, des droites à quelque point de l'axe XO; & ces trois petites pyramides étant encore ôtées de l'onglet; on auroit, à peu de choſe près, la valeur de la partie HSIR (*Fig.* 181.), laquelle étant ajoûtée aux deux autres parties HRIGFE, AEHIGD, on auroit le vuide total de l'embrazure.

Quant à la ſolidité on voit bien que l'épaiſſeur de cet embrazure jointe à ſon vuide, formeroit un ſolide reſſemblant au ſolide du vuide, dont la dimenſion SF ſeroit commune; ainſi prolongeant EG en P & en Q, juſqu'à ce que GP fût égal à l'épaiſſeur de la voute, de même que EQ, on diroit: comme $\overline{EG}^2$ eſt à $\overline{QP}^2$, ainſi le ſolide du vuide eſt au ſolide du vuide & du plein, & retranchant de ce ſolide celui du vuide, on auroit l'épaiſſeur cherchée.

## LEMME.

195. *Si l'on fait tourner un parallelograme ABCD* (Fig. 183.), *autour de ſa baſe CD, il produira un ſolide creux ACEFDB égal au cylindre aefb, produit par la circonvolution d'un rectangle* abcd *de même baſe & de même hauteur que le parallelograme autour de ſa baſe* cd.

### DEMONSTRATION.

Concevons que le parallelograme ABCD, & le rectangle *abcd*, ſoient diviſés en leurs Elemens RS, TV, *rs*, *tu*, &c. paralleles à leurs baſes, il y aura autant d'Elemens dans l'un que dans l'autre, leſquels ſeront égaux chacun à chacun, & à égale diſtance de leur baſe. Ainſi l'Element AB décrira une ſurface AEFB de cylindre égale à la ſurface *aefb*, que décrira l'Element *ab*. Par la même raiſon l'Element RS décrira une ſurface égale à la ſurface que décrira l'Element *rs*, & de même des autres. Or le ſolide ACEFDB n'eſt autre choſe que la ſomme des ſurfaces décrites par les Elemens AB, RS, &c. du parallelograme, & le cylindre *aefb* n'eſt autre choſe auſſi que la ſomme des ſurfaces décrites par les Elemens *ab*, *rs*, &c. du rectangle; donc puiſque chaque ſurface eſt égale à chaque ſurface, la ſomme ſera égale à la ſomme, & le ſolide ACEFDB ſera égal au cylindre *aefb*.

### COROLLAIRE I.

196. On prouvera de la même façon que ſi l'on fait tourner un triangle ABC (*Fig.* 184.), autour d'une ligne EC, tirée par ſon ſommet parallelement à ſa baſe AB, & que les côtez AC, BC, ſoient inclinés ſur EC, le ſolide creux ACHICB produit par ſa circonvolution, ſera égal au cylindre creux *achib*, produit par la circonvolution d'un triangle *abc*, de même baſe & de même hauteur, qui auroit un côté *bc* perpendiculaire ſur la ligne *ec*, parallele à ſa baſe *ab*.

### COROLLAIRE II.

197. *Le cylindre creux* achib (Fig. 184.), *produit par la circonvolution du triangle* abc, *eſt égal aux deux tiers du cylindre plein* ahib. Le creux *ach* eſt un cône de même baſe & de même hauteur que

le cylindre, & par conſéquent il en vaut le tiers; ôtant donc du cylindre plein le cone *ach*, le reſte ſera égal aux deux tiers du cylindre plein.

## PROBLEME XXXVIII.

198. *Meſurer le ſolide produit par la circonvolution d'une cycloide autour de ſa baſe.*

Soit la demi-cycloïde ABC (*Fig.* 185.), dont la baſe eſt AC. Nous avons déja dit en parlant de la meſure de la cycloïde, que ſi on circonſcrivoit autour du demi-cercle generateur CDB, une infinité de triangles BFC, IGC, &c. & autour de la cycloïde autant de trapezes correſpondans BHI, M*xri*, &c. chaque trapeze ſeroit triple du triangle correſpondant. De plus, que chaque trapeze ſeroit compoſé d'un triangle égal au triangle correſpondant, & d'un parallelograme double de ce triangle; par exemple, le trapeze M*xri* eſt compoſé du triangle M21, égal au triangle correſpondant IMC, & d'un parallelograme 2*xri*, double du triangle M21, & ainſi des autres.

Cela poſé, ſi l'on fait tourner le triangle FBC autour de la baſe AC, il produira un cylindre creux qui vaudra les deux tiers du cylindre qui a pour baſe le cercle du rayon BC, & pour hauteur FB, & faiſant tourner HFIC, il produira un ſolide égal au même cylindre; car en ſuppoſant que les triangles & les trapezes ſoient en nombre infini, la baſe FB du triangle eſt égale à la baſe HF du parallelograme; donc, &c. Ajoûtant donc la valeur du ſolide produit par le parallelograme à celle du ſolide produit par le triangle, nous aurons $1 + \frac{2}{3}$ pour la valeur du ſolide produit par le trapeze BHIC; donc le ſolide produit par le trapeze BHIC, ſera au ſolide produit par le triangle correſpondant BFC, comme $1 + \frac{2}{3}$ eſt à $\frac{2}{3}$, ou comme $\frac{5}{3}$ à $\frac{2}{3}$, ou comme 5 à 2. On trouvera de même que le ſolide produit par le trapeze M*xri* autour de la baſe AC, eſt au ſolide produit par le triangle correſpondant IGC, comme 5 à 2; car le triangle M21 étant égal au triangle IGC, le ſolide produit par l'un eſt égal au ſolide produit par l'autre, & le ſolide produit par le parallelograme 2*xri*, eſt égal au cylindre plein produit par un rectangle de même hauteur & de même baſe, dont le ſolide produit par le triangle *m*21, eſt les deux tiers; donc le ſolide du trapeze eſt au ſolide du triangle M21, ou à celui du triangle IMC, comme $1 + \frac{2}{3}$ à $\frac{2}{3}$, ou comme 5 à 2. Or la même choſe arrivera à l'égard des autres tra-

pezes & des triangles correſpondans; donc la ſomme des ſolides produits par les trapezes eſt à celle des ſolides produits par les triangles circonſcrits au cercle, comme 5 à 2. Mais les trapezes circonſcrits à la demi-cycloïde, ne different point de la demi-cycloïde, de même que la ſomme des triangles circonſcrits au demi-cercle generateur, ne differe point de ce demi-cercle; donc la ſomme des ſolides produite par les trapezes, ne differe point du ſolide produit par la demi-cycloïde, non plus que la ſomme des ſolides des triangles ne differe point de la ſomme du ſolide produit par le demi-cercle. Donc le ſolide produit par la demi-cycloïde eſt au ſolide produit par le demi-cercle, comme 5 à 2, & par conſéquent le ſolide de la cycloïde entiere eſt à celui du cercle entier comme 5 à 2. Mais le ſolide du cercle entier eſt un anneau fermé égal à un cylindre, dont la baſe eſt le cercle generateur, & la hauteur eſt la circonference de ce cercle. Donc le ſolide de la cycloïde eſt à ce cylindre comme 5 à 2.

Si l'on fait donc un cylindre qui ait pour baſe le cercle generateur, & pour hauteur deux fois & demi la circonference de ce cercle, ce cylindre ſera égal au ſolide de la cycloïde; car ce cylindre ayant même baſe que le cylindre égal à l'anneau, les deux cylindres ſeront entr'eux comme leurs hauteurs $2\frac{1}{2}$. 1, ou comme 5 à 2.

Je ne parle point ici du ſolide produit par la circonvolution de la demi-cycloïde ABC autour de ſon axe, parce que cela dépend de la connoiſſance du centre de gravité de cette figure, dont je parlerai dans un autre Ouvrage.

## SECTION V.

### *Des ſurfaces des Solides.*

### DEFINITION XIX.

199. La *ſurface* d'un ſolide eſt la ſomme des plans ou des figures courbes qui renferment ſa ſolidité; mais il faut obſerver que lorſqu'il s'agit d'un ſolide qui a une baſe, comme d'un parallelepipede (*Fig.* 186.), d'un priſme (*Fig.* 187.), d'un cylindre (*Fig.* 188.) d'une piramide, &c. Le mot de *ſurface* ne ſignifie que les plans ou la figure courbe qui environnent le ſolide depuis la baſe

jusqu'au sommet, sans compter la base, ni la face opposée à la base, s'il s'en trouve une dans le solide. Ainsi quand on dit simplement la surface d'un parallelepipede (*Fig.* 186.), on entend les quatre rectangles AEHD, AEFB, BFGC, GCDH, sans y comprendre la base ABCC, ni la face opposée EFHG, & il en est de même des autres; mais quand on veut tout comprendre, alors au lieu de dire simplement la surface du solide, on dit la *surface totale.*

## PROBLEME XXXIX.

200. *Mesurer la surface d'un parallelepipede.*

Si le parallelepipede est rectangle (*Fig.* 186), c'est-à-dire si les quatre faces autour de la base sont perpendiculaires sur cette base; multipliez le contour ABCD de la base par la perpendiculaire DH, & le produit sera la valeur de la surface. Car cette surface est égale à la somme des quatre rectangles qui environnent la base. Or le rectangle AEHD est le produit de sa base AD par sa hauteur DH, le rectangle DHGC est le produit de sa base DC par la même hauteur DH, le rectangle CBFH est le produit de BC par CG = DH, & enfin le rectangle BFEA est le produit de AB par BF égal aussi à DH; donc ces quatre rectangles sont le produit de AD + DC + CB + BA par la même hauteur DH; donc ils sont le produit du contour ADCB de la base par la hauteur DH, & par conséquent la surface du parallelepipede est égale à ce produit. Ainsi pour avoir la surface totale, il n'y aura plus qu'à ajoûter à cette surface le double de la base ABCD, à cause que la face EFGH est égale à ABCD.

On trouvera de même que la surface d'un prisme droit (*Fig.* 187.), est égale au contour de sa base ABC par sa hauteur AD, & qu'en ajoûtant à cette surface le double de la base ABC, on aura la surface totale.

De même encore si l'on multiplie la circonference AB (*Fig.* 188.), de la base d'un cylindre droit par sa hauteur AC, on aura sa surface, à laquelle ajoûtant le double de la base AB, on aura la surface totale.

Mais si le parallelepipede est incliné (*Fig.* 192. 193.), il faudra mesurer chaque face, & les ajoûter ensemble pour avoir la surface, à laquelle ajoûtant encore le double de la base, on aura la surface totale; & la raison en est que les faces adjacentes à la base, sont toutes ou des parallelogrames, ou que du moins deux d'entr'elles

d'entr'elles ne ſont pas rectangles, & que par conſéquent ſi l'on prend pour baſe du parallelograme AEB la droite AB, on ne peut pas prendre ſon côté AE pour la hauteur, mais la perpendiculaire tirée du ſommet E ſur la baſe AB; & comme cette perpendiculaire n'eſt pas la même dans les trois autres parallelogrames, il s'enſuit qu'il faut chercher à part la valeur de chacun.

Cependant ſi l'on veut abreger l'operation, on coupera le parallelepipede par un plan perpendiculaire aux quatre arêtes montantes, & prenant le contour de ce plan, on le multipliera par la longueur de l'une des arêtes AE; ce qui donnera la ſurface à laquelle on ajoûtera le double de la baſe ABCD, pour avoir la ſurface totale.

Pour rendre raiſon de ceci, ſuppoſons en premier lieu que le parallelepipede ſoit incliné ſur l'une de ſes faces BILC (*Fig.* 192.), je coupe le parallelepipede par un plan EFGH perpendiculaire aux quatre faces, & qui paſſe par l'extrêmité EF de la face AEFD, je prolonge par penſée le parallelepipede au-delà de la baſe, & je le coupe par un autre plan ADYR, auſſi perpendiculaire aux quatre faces, & qui paſſe par l'extrêmité AD de la même face AEFD. Il eſt viſible que la ſurface EHGFLI que le plan EHGF retranche de la ſurface du parallelepipede, eſt égale à la ſurface ARYDCB que le plan ARYD lui ajoûteroit; car à cauſe des paralleles la droite EH eſt égale à la droite AR, la droite EI égale à AB, & par conſéquent la droite HI eſt égale à la droite RB, parce que les deux triangles EHI, ARB, étant rectangles, & ayant deux côtez égaux chacun à chacun, le troiſiéme doit être auſſi égal au troiſiéme, & les deux triangles doivent être parfaitement égaux; on trouvera de même que le rectangle HILG eſt égal au rectangle BRYC, & le triangle FGL égal au triangle DYC. Donc ſi l'on ôte de la ſurface du parallelepipede incliné la ſurface EHGFLI, & qu'on lui donne la ſurface ARYDCB, la ſurface qui en proviendra ſera encore de même valeur. Or cette ſurface eſt la ſurface d'un parallelepipede rectangle ARYDFEHG, puiſque ſes faces ſont perpendiculaires aux deux baſes; donc le contour ARYD multiplié par AE eſt égal à cette ſurface, & par conſéquent à celle du parallelepipede incliné, & ajoûtant à cette ſurface la valeur des deux baſes ABCD, EILF, la ſomme ſera la ſurface totale.

Suppoſons en ſecond lieu que le parallelepipede ſoit incliné

sur l'une de ses arêtes CG (*Fig.* 193.), je coupe ce parallelepipede par un plan SRCP perpendiculaire aux quatre faces, & qui passe par l'extrêmité C de l'aréte CG, je prolonge le parallelepipede par pensée, & je le coupe par un autre plan GQMN parallele au précedent, & qui passe par l'autre extrêmité G de l'aréte CG, & la surface ABCDRSP que le premier plan retranche de la surface du parallelepipede, est égale à la surface EFGHQMN que l'autre lui donneroit. Je retranche donc de la surface du parallelepipede la premiere de ces surfaces, & je lui donne la seconde, & j'ai une surface rectangulaire CRSPNMQG, égale à celle du parallelepipede incliné. Multipliant donc le contour CRSP par CG, c'est-à-dire par le côté du parallelepipede, j'ai la valeur de la surface du parallelepipede, à laquelle ajoutant le double de la base ABCD, j'ai la surface totale.

Les surfaces des prismes inclinés se trouveront de la même façon, de même que les surfaces des cylindres inclinés (*Fig.* 189.); mais il faut prendre garde dans les cylindres que le plan perpendiculaire HB est une Ellipse & non pas un cercle, quand la base AB du cylindre est circulaire, comme nous le prouverons bien-tôt; & qu'après avoir trouvé la surface, il faut pour avoir la surface totale, lui ajoûter le double du cercle AB, & non pas le double de l'Ellipse HB, de même que dans les parallelepipedes & les prismes, il faut ajoûter le double de leurs bases, & non pas le double du plan perpendiculaire. Nous dirons dans le Corollaire troisiéme comment on mesure la surface d'un cylindre dont la base est une Ellipse.

Pour montrer que la coupe perpendiculaire d'un cylindre incliné est une Ellipse, soit un cylindre incliné ABCD (*Fig.* 190.), coupé par un plan ZB perpendiculaire à ses côtez; donc l'axe ZB coupe l'axe incliné OX en R. A cause des paralleles AZ, OR, nous avons BR. BZ :: BO. BA. mais $BO = \frac{1}{2}BA$; donc $BR = \frac{1}{2}BZ$, & par conséquent BZ est le centre de la coupe ZB. Tirons sur le plan ZB des paralleles IP, HM, qui soient perpendiculaires à l'axe ZB de ce plan; des extrêmitez I, P, H, M, tirons sur la surface du cylindre des droites IT, PQ, HE, MS, paralleles à l'axe incliné OX, & joignons les droites AS, TQ, dans le plan de la base.

Comme nous supposons que la coupe ZIBP perpendiculaire entre les côtez opposés AZ, BC du cylindre, est perpendiculaire au triangle AZB, lequel est perpendiculaire sur la base du

cylindre, les droites HM, IP, n'inclineront pas plus d'un côté que de l'autre sur la base du cylindre; donc HA sera égale à MS, qui lui est parallele, de même que IT, sera égal à TQ; & par conséquent les droites AS, TQ, seront paralleles & égales aux droites HM, IP: d'où il suit qu'elles seront perpendiculaires au triangle AZB, & par conséquent au diametre AB qui les coupera en deux également aux points N, O.

Cela posé, nous avons à cause du cercle de la base $\overline{NE}^2$. $\overline{OT}^2$ :: AN×NB. AO×OB. donc $\overline{H2}^2$. $\overline{IR}^2$ :: AN×NB. AO×OB. mais à cause des paralleles la droite ZB est coupée aux points 2, R, proportionnellement aux parties de AB, faites par les points N, O; car BR. BO :: B2. BN :: BZ. BA. donc Z2×2B. ZR×RB :: AN × NB. AO×OB. donc aussi $\overline{H2}^2$. $\overline{IR}^2$ :: Z2×2B. ZR×RB. mais IP étant égal à TQ qui est égal à AB, est plus grande que ZB; car ZB étant perpendiculaire à AD, est moindre que l'oblique AB: donc la section ZIBP ayant les quarrez des ordonnées dans la raison des rectangles que ces ordonnées coupent, & un axe IP plus grand que l'autre axe ZB, est par conséquent une Ellipse.

Il faut remarquer en passant, que lorsqu'un cylindre incliné est coupé perpendiculairement à ses côtez, le petit axe ZB de la section passe par le plus haut point Z, & le plus bas B, & le grand axe IP est parallele à la base, au lieu que lorsqu'on coupe un cylindre droit par un plan oblique, il arrive tout le contraire.

## COROLLAIRE I.

201. *La surface d'un cylindre droit est égale à un cercle dont le rayon EF* (Fig. 188.), *est moyen proportionnel entre le rayon OA de la base & le double de la hauteur AC.* Soient les trois lignes OA. EF, 2AC, en proportion continuë, la surface du cylindre est égale au rectangle de la circonference AB par la hauteur AC, ou au triangle de cette circonference par la hauteur 2AC, & la base est égale à un triangle de la même circonference par le rayon OA; donc la surface est à la base comme 2AC à OA, & par conséquent en raison doublée de 2AC à EF, ou de EF à OA. Or le cercle du rayon EF est au cercle du rayon OA, aussi en raison doublée de EF à OA; donc la surface du cylindre & le cercle du rayon EF,

ont même raiſon au cercle de la baſe ; donc la ſurface & le cercle du rayon EF ſont égaux.

### COROLLAIRE II.

202. Les trois lignes OA, EF, 2AC, étant en proportion compriſe, ſi l'on double la premiere OA, & qu'on ne prenne que la moitié de la troiſiéme 2AC, il y aura même proportion ; car OA devenant double, ſera une fois plus grande qu'elle n'étoit à l'égard de EF, & 2AC devenant une fois plus petite, EF ſera auſſi une fois plus grande à l'égard de 2AC, & par conſéquent les trois lignes 2OA, ou AB, EF, AC, ſeront proportionnelles ; donc le rayon du cercle EF eſt moyen proportionnel entre le diametre AB de la baſe du cylindre & ſa hauteur AC. Or ce cercle eſt égal à la ſurface du cylindre, comme on vient de voir ; donc *la ſurface du cylindre eſt égale à un cercle dont le rayon eſt moyen proportionnel entre le diametre de ſa baſe & ſa hauteur.*

### COROLLAIRE III.

203. Comme le rapport de la circonference d'une Ellipſe à ſon grand axe ou au petit axe n'eſt pas connu, le plus court, lorſqu'il s'agit de meſurer un cylindre HBDF (*Fig.* 189.), dont la baſe eſt elliptique, eſt de meſurer avec un fil le contour de ſa baſe HOBR, & de la multiplier par ſa hauteur BD, & par-là on peut trouver aiſément la ſurface d'un cylindre circulaire incliné ABDC, puiſque ſa ſurface eſt égale à celle du cylindre Elliptique droit HBDF, & qu'il n'y a plus qu'à ajoûter le double de la baſe AB pour avoir la ſurface totale.

### PROBLEME XL.

204. *Meſurer la ſurface d'une pyramide.*

Si la pyramide eſt droite & équilaterale (*Fig.* 191.), multipliez le contour de ſa baſe ABCD par la moitié de la perpendiculaire EF tirée du ſommet E de l'une de ſes faces AEB ſur la baſe AB de cette face, & le produit ſera la ſurface de la pyramide, à laquelle ajoûtant la baſe ABCD, vous aurez la ſurface totale ; car chaque face étant un triangle, eſt par conſéquent le produit de ſa baſe par la moitié de ſa hauteur ; & comme toutes les faces ſont égales & ſemblables, & qu'elles ont par conſéquent la même hauteur, il s'enſuit que la ſomme des faces eſt égale à la ſomme

des baſes, ou au contour ABCD multiplié par la moitié de la hauteur commune EF.

Mais ſi la pyramide n'eſt pas équilaterale (*Fig.* 194. 195.), & alors il faut chercher la valeur de chaque face en particulier, parce qu'elles ont les hauteurs & les baſes inégales. Après quoi il faut ajoûter les faces enſemble, & la ſomme ſera la ſurface cherchée, à laquelle ajoûtant la baſe, on aura la ſurface totale.

## PROBLEME XLI.

205. *Meſurer la ſurface d'un cone droit* (Fig. 196.).

Multipliez la circonference AB du cercle de ſa baſe par la moitié du côté BC, & le produit ſera la ſurface, à laquelle ajoûtant le cercle de la baſe, vous aurez la ſurface totale.

### DEMONSTRATION.

Tandis que le triangle ACO qui eſt la figure generatrice du cone droit, tourne autour de ſon axe CO, tous les points A, E, F, G, H, I, C, du côté AC, décrivent des circonferences, dont la ſomme forme la ſurface du cone. Or ces circonferences ſont entr'elles comme leurs rayons AO, ES, FX, &c. & à cauſe des triangles ſemblables, CAO, CES, CFX, &c. les rayons ſont entr'eux comme les côtez CA, CE, CF, &c. qui ſont comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3. &c. à l'infini, en commençant par le point C, & prenant de ſuite les côtez CI, CH, CG, &c. donc par l'Arithmetique des infinis la ſomme des circonferences eſt à la plus grande AB, multipliée par le nombre des termes AC, comme 1. à 2. & par conſéquent cette ſomme eſt égale à la plus grande circonference multipliée par la moitié de AC.

### REMARQUE.

206. Mais pourquoi, dira-t-on, prendre ici le côté AC pour le nombre des termes, au lieu que quand on cherche la ſolidité, on prend pour le nombre des termes l'axe CO? En voici la raiſon. Les Elemens du cone étant des plans, il eſt ſur que le cone ne peut contenir de plans paralleles à ſa baſe, qu'autant qu'il y a de points dans ſa hauteur OC, à laquelle ces plans ſont perpendiculaires. Mais au contraire, les Elemens de la ſurface étant des lignes, cette ſurface en peut contenir autant qu'il y a de points

dans sa hauteur AC, qui par conséquent doit être le nombre des termes de ses Elemens.

Et pour rendre ceci plus sensible, supposons que le côté AP (*Fig.* 198.), du triangle generateur APB, soit double de l'axe PB; que de tous les Elemens de l'axe PB s'élevent des perpendiculaires BA, EF, DG, dans le plan du triangle; & que dans ce même plan prolongé indéfiniment, il s'éleve de tous les Elemens du côté AP des perpendiculaires à ce côté AR, FH, GI, &c. qui rencontrent l'axe prolongé aux points R, H, I, &c. comme AP étant double de PB, contient aussi deux fois plus d'Elemens, le nombre des perpendiculaires tirées sur AP sera double du nombre des perpendiculaires tirées sur PB; car nous entendons ici que les Elemens de AP, & de PB, soient egaux, & non pas proportionnels; donc le nombre des cercles décrits par les perpendiculaires de PB autour de PB, ne sera que la moitié du nombre des circonférences décrites par les perpendiculaires sur AP autour de PB; or la somme de ces circonférences formera la surface du cone. Donc le nombre des termes doit être la droite AP, & non pas la hauteur BP.

Remarquez en passant que toutes les perpendiculaires sur PB, se touchant dans toute leur longueur, couvriront totalement la droite AP; d'où il suit que chacune d'elles prendra nécessairement sur AP deux Elemens, c'est-à-dire une partie double de celles qu'elles prennent sur PB; ce qui confirme ce que nous avons dit ailleurs touchant les points plus grands ou moindres que les lignes prennent sur une autre selon qu'elles tombent perpendiculairement sur elle, ou plus ou moins obliquement.

Le Pere Tacquet dans son second Livre *de Cylyndricis & Annularibus*, voulant blamer la méthode des indivisibles que nous venons d'employer dans cette démonstration, apporte pour exemple la surface du cone droit, & suppose que les circonférences qui forment la surface du cone, sont les circonférences décrites par les perpendiculaires BA, EF, &c. à l'axe BP; mais il n'a pas pris garde que ces circonférences étant faites par des lignes qui tombent obliquement sur le côté AP, sont plus épaisses qu'il ne faut pour être réputées Elemens de la surface, & que la loy inviolable de la méthode des indivisibles, est de prendre toujours les Elemens par les points pris par les perpendiculaires; telles que AR, FH, &c. & non par des obliques.

Mais repliquera-t-on, on peut tirer les diametres de toutes les circonferences qui composent la surface ; & comme ces diametres sont perpendiculaires sur PB, ils le couperont en une infinité de petites parties, dont le nombre sera égal à celui des Elemens AP, & par conséquent le nombre des termes étant égal de part & d'autre, il est plus naturel de prendre BP pour exprimer ce nombre, que de prendre AP. Je répons à cela qu'alors les Parties que les diametres prendront sur BP, seront la moitié plus petites que celles que les perpendiculaires BA, EF, y prenoient, puisque le nombre des diametres est double de celui des perpendiculaires, & qu'ainsi ces parties n'étant plus égales en épaisseur aux Elemens de la droite AP, ne devront pas être regardées comme les Elemens de la droite AB, à cause que selon la méthode des indivisibles, les Elemens doivent toujours être pris de même épaisseur dans les lignes que l'on compare les unes aux autres lorsqu'il s'agit de les mesurer. Donc quoiqu'il soit vrai qu'il y aura alors autant de petites parties dans PB, qu'il se trouve d'Elemens dans AP ; il est cependant faux qu'on puisse multiplier le plus grand Element de la surface du cone par la moitié de PB, parce que chaque Element de cette surface ayant une épaisseur double de celle de chaque petite partie de PB, la somme des Elemens occupera une longueur double de PB.

Observez encore en passant que puisque les diametres des circonferences qui composent la surface, prendront sur DB des parties, dont chacune ne seroit que la moitié de celles que prennent les perpendiculaires BA, EF, &c. ces diametres auront par conséquent une épaisseur qui ne seroit que la moitié de l'épaisseur des perpendiculaires BA, EF, &c. ou des perpendiculaires AR, FH, &c. d'où il suit que si on veut tirer sur une ligne droite AP autant d'obliques que de perpendiculaires, il faut nécessairement que l'épaisseur de ces obliques soit moindre que celle des perpendiculaires, à proportion de leur obliquité, & qu'en mettant l'épaisseur égale de part & d'autre, on peut tirer sur une même ligne plus de perpendiculaires que d'obliques.

Mais pour mieux faire voir la justesse de la méthode des indivisibles, soit le cercle AB (*Fig.* 199.), la base d'un cone droit ABC, concevez que dans ce cercle on inscrive un polygone regulier d'une infinité de côtez, & que de tous les angles de ce polygone soient tirées les droites AC, EC, FC, &c. au sommet, vous aurez une pyramide reguliere d'une infinité de faces toutes

égales entr'elles; par conséquent multipliant le contour AEFGB, &c. de la base par la moitié de la perpendiculaire tirée du sommet de l'une des faces sur la droite qui lui sert de base, vous aurez la valeur de la surface. Or comme les bases AE, EF, &c. des faces sont infiniment petites, elles se confondront avec les arcs AE, EF, qu'elles soutiennent, & la perpendiculaire tirée du sommet sur l'une de ces bases, ne differera pas du côté AC, ou EC, &c. ainsi la pyramide sera la même chose que le cone, & par conséquent sa surface sera aussi la même; donc la surface du cone est égale à la circonference de sa base multipliée par la moitié du côté AC, de même que nous l'avons trouvé ci-dessus.

### COROLLAIRE I.

207. Quand le cone ABC (*Fig.* 197.), est incliné, il est encore vrai de dire que toutes les circonferences qui composent sa surface, sont entr'elles comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3. 4. &c. à l'infini; mais la difficulté consiste à trouver la droite qui doit exprimer le nombre des termes; car si l'on prend la droite AC, les petites parties AE, EF, FG, &c. que les circonferences laissent entr'elles sont plus grandes que les petites parties BN, NM, &c. que ces circonferences laissent entr'elles sur le côté opposé BC, & par conséquent la petite surface AENB, que deux circonferences AB, EN, laissent entr'elles, n'est pas égale partout; d'où il suit qu'en lui donnant la hauteur AE, on lui donne trop, & si on lui donne la hauteur BN, on lui donne trop peu, & la même chose arrive à l'égard de toutes les autres petites surfaces que les circonferences laissent entr'elles. C'est de-là que naît la difficulté de mesurer la surface d'un cone incliné, & je ne sçache pas que personne l'ait encore résolu géometriquement; tout ce qu'on peut faire alors est de prendre un côté moyen arithmetique CP entre AC & CB, & de multiplier la circonference de la base par la moitié CP; ce qui n'est qu'une pure approximation.

### COROLLAIRE II.

208. La même difficulté se rencontre lorsqu'il s'agit de mesurer la surface d'un cone droit ABC (*Fig.* 206.), dont la base AB est une Ellipse. Car quoique toutes les circonferences AB, EN, FG, &c. dont cette surface est composée, soient entr'elles comme les nombres 0. 1. 2. 3. &c. à l'infini, à cause que ce sont des circonferences

circonferences d'Ellipſes ſemblables, cependant la hauteur n'eſt pas égale partout; car les côtez AC, BC, qui partent de l'extrêmité du grand axe AB, ſont plus grands que les côtez PB, OC, qui partent de l'extrêmité du petit axe PO; & les côtez qui partent des points qui ſont entre les extrêmitez du petit & du grand axe, vont en augmentant: ainſi il faut prendre un côté moyen arithmetique entre CP & CB, & multiplier la circonference APBO de la baſe par la moitié de ce côté.

## COROLLAIRE III.

209. *La ſurface d'un cone droit ABC* (Fig. 196.), *dont la baſe eſt un cercle, eſt égale à un cercle, dont le rayon PQ eſt moyen proportionnel entre le côté AC & le rayon AO de la baſe.* Soient les trois lignes AC, PQ, AO, en proportion continuë, la ſurface du cone eſt égale au rectangle de la circonference de ſa baſe par $\frac{1}{2}$AC, ou au triangle dont la baſe eſt la même circonference, & la hauteur eſt le côté AC, & le cercle AB eſt égal au triangle qui a pour baſe la même circonference, & pour hauteur le rayon AO. Donc la ſurface du cone eſt au cercle de ſa baſe comme AC eſt AO, & par conſéquent en raiſon doublée de AC à PQ, ou de PQ à AO. Mais le cercle du rayon PQ eſt au cercle du rayon AO, auſſi en raiſon doublée de PQ à AO; donc la ſurface & le cercle du rayon PQ ſont égaux entr'eux, puiſqu'ils ont même raiſon au cercle de la baſe.

## PROBLEME XLII.

210. *Meſurer la ſurface d'une ſphere* (Fig. 201.).

Multipliez la circonference du grand cercle de la ſphere par le diametre, & le produit ſera la valeur de la ſurface.

### DEMONSTRATION.

Soit le quart du cercle ABC (*Fig.* 201.), inſcrit dans un quarré ABCD, dont la diagonale eſt DB. Concevez que le rayon AB ſoit diviſé en ſes Elemens A, E, G, B, & que du centre B ſoient décrits les quarts de circonference ER, GM, &c. & que ſur les mêmes points E, G, &c. ſoient élevées les perpendiculaires EF, GH, &c. les droites AD, EF, GH, &c. ſeront les Elemens du triangle ADB, de même que les circonferences AC, ER, GM, &c. ſeront les Elemens du quart de cercle ACB, & à cauſe des triangles ſemblables, les droites AD, EF,

GH, &c. ſeront entr'elles comme leurs abſciſſes BA, BE, BG; &c. & les circonferences AC, ER, GM, &c. ſeront auſſi entr'elles comme les mêmes abſciſſes BA, BE, BG, &c. qui ſont les rayons.

Concevez donc que le quart de cercle, & le quarré ABCD tournent autour de CB, les circonferences AC, ER, GM, &c. décriront des calotes ſpheriques, & les droites AD, EF, GH, &c. décriront des ſurfaces de cylindre qui ſeront entr'elles comme les calotes ſpheriques; car les ſurfaces des cylindres ayant leurs hauteurs AD, EF, GH, &c. proportionnelles aux rayons BA, BE, BG, &c. ces mêmes hauteurs ſont auſſi proportionnelles aux circonferences décrites par ces rayons autour de CB, leſquelles circonferences ſont les baſes des ſurfaces. Ainſi les ſurfaces des cylindres ſont entr'elles en raiſon doublée des circonferences ou des rayons BA, BE, BG, &c. mais les calotes ſpheriques ayant leurs hauteurs qui ſont les arcs AC, ER, GM, auſſi proportionnelles aux rayons BA, BE, GB, &c. & par conſéquent aux circonferences que ces rayons décrivent, leſquelles circonferences ſont leurs baſes; ces calotes ſont auſſi entr'elles en raiſon doublée des rayons BA, BE, BG, &c. donc les ſurfaces cylindriques ſont entr'elles comme les calotes; mais la ſomme des calotes compoſe la demi-ſphere ACQ, qui eſt égale aux deux tiers du cylindre AQPD, & la ſomme des ſurfaces cylindriques compoſe l'entonnoir ADBPQ, qui eſt auſſi égal aux deux tiers du même cylindre, parce que le cone DBP qui manque à cet entonnoir, vaut le tiers du cylindre. Donc la ſomme des calotes eſt égale à la ſomme des ſurfaces cylindriques, & comme les calotes étant entr'elles comme les ſurfaces, la premiere calote eſt à la premiere ſurface comme la ſomme à la ſomme, il s'enſuit que la premiere calote eſt égale à la premiere ſurface; c'eſt-à-dire la ſurface de la demi-ſphere égale à la ſurface du cylindre, ou à la circonference de ſon grand cercle multipliée par le rayon. Donc la ſphere entiere eſt égale à la circonference de ſon grand cercle multipliée par le diametre, ou à la ſurface du cylindre circonſcrit.

## COROLLAIRE I.

211. *La ſurface de la ſphere eſt quadruple de ſon grand cercle.* Son grand cercle eſt égal à ſa circonference multipliée par la moitié du rayon, ou par le quart du diametre, & la ſurface eſt égale

à la même circonference multipliée par le diametre entier ; donc la surface est au grand cercle comme 4. à 1.

## COROLLAIRE II.

212. *La surface de la sphere est à la surface totale du cylindre inscrit, comme* 1 *à* $1\frac{1}{2}$, *ou comme* 2 *à* 3. Pour avoir la surface totale du cylindre, il faut lui ajoûter les deux bases ou le double du grand cercle, & par conséquent cette surface totale vaut six fois le grand cercle ; ainsi la surface de la sphere est à la totale du cylindre comme 4. à 6. ou comme 2. à 3. ou comme 1. à $1\frac{1}{2}$.

## COROLLAIRE III.

213. *La surface ABED d'une zone spherique* (Fig. 202.), *est égale à la surface AEFD d'une portion du cylindre circonscrit à la sphere, laquelle portion a la hauteur AE égale à la hauteur YO de la zone.* Tirez des extrêmitez B, C, de la zone les droites BO, CO, au centre (je suppose que la zone ait pour base le grand cercle de la sphere) tirez aussi des extrêmitez E, F, du cylindre les droites EO, FO, la circonvolution du secteur de cercle ABO autour de PO, produira une cuvette spherique ABOCD, égale aux deux tiers du cylindre AEFD (*n.* 136.), & le triangle AEO produira un entonnoir AEOFD, aussi égal aux deux tiers du même cylindre, & par conséquent l'entonnoir & la cuvette seront égaux. Du centre O par tous les points du rayon AO, décrivons dans le secteur des arcs AB, GS, HV, &c. qui seront entr'eux comme les rayons, & élevons dans le triangle les perpendiculaires AE, GR, HT, &c. qui seront aussi entr'elles comme les rayons ou les arcs AB, GS, HV. D'où il suit que les calotes tronquées décrites par la circonvolution des arcs AB, GS, HV, &c. autour de PO, seront entr'elles comme les surfaces cylindriques décrites par les droites AE, GR, HT, &c. & que la premiere calote tronquée sera à la premiere surface cylindrique, comme la somme des calotes à la somme des surfaces : mais la somme des calotes composant la cuvette, est égale à la somme des surfaces qui composent l'entonnoir ; donc la premiere calote tronquée, c'est-à-dire la surface de la zone est égale à la premiere surface cylindrique, ou à la surface du cylindre AEFD.

## COROLLAIRE IV.

214. On concluëra la même chose de la surface d'une zone qui

n'aura pas pour base le grand cercle de la sphere ; car la surface décrite par l'arc ZA autour de PO, ayant pour base le grand cercle de la sphere, est égale par le Corollaire précedent à la surface du cylindre AMND, & la surface décrite par l'arc BA, est égale à la surface du cylindre AEFD ; ôtant donc la petite de la grande, on aura la surface décrite par l'arc ZB égale à la surface du cylindre EMNF.

### COROLLAIRE V.

215. *La surface d'un segment spherique ZPN est égale à la surface de la portion du cylindre circonscrit à la sphere, laquelle portion a la hauteur égale à celle du segment.* Puisque la surface APD de la demi-sphere est égale à la surface AIQD du cylindre, & que la surface décrite par l'arc AZ, est égale à celle du cylindre AMND, il s'ensuit que la surface décrite par l'arc ZP, où la surface du segment est égale à la surface du cylindre MLQN.

### COROLLAIRE. VI.

216. *La surface ABC d'un segment spherique ABC* (Fig 203.), *est égale au cercle dont le rayon AB est le côté d'un cone ABC inscrit dans ce segment.* Tirez la droite AR, la surface du cylindre DEFH, est égale à la surface ABC du segment par le Corollaire précedent ; or la surface du cylindre DEFH est égale à un cercle, dont le rayon est moyen proportionnel entre le diametre DH de sa base & sa hauteur DE, ou BO (*n.* 202.), & par la nature du cercle on a :: BO. BA. BR. ou DH. Donc BA est le rayon du cercle égal à la surface du cylindre DEFH, ou à la surface du segment ABC.

### PROBLEME XLIII.

217. *Mesurer la surface d'un parallelepipede tronqué par un plan incliné.*

Si le parallelepipede est droit (*Fig.* 204.), multipliez le contour de sa base par sa hauteur moyenne OQ, c'est-à-dire par la droite tirée du centre O de sa base au centre Q du plan incliné EHGF, & le produit sera la valeur du parallelepipede tronqué ABCDEHGF. Car si on fait passer un plan parallele à la base par le point Q ; en sorte que ce plan coupe les côtez du parallelepipede dont les deux AH. BG, sont supposés prolongés, la surface TSRZEF que ce plan retranchera de la surface du parallelepipede, sera égale à la surface TGHZXV, que ce même plan

lui ajoûteroit, ce qui eſt aiſé à prouver. Donc la ſurface ABCDRXVS eſt égale à la ſurface ABCDEHGF du parallelepipede tronqué; or la ſurface ABCDRXVS étant la ſurface d'un priſme droit ſe meſure en multipliant le contour de ſa baſe par ſa hauteur AX, ou OG: donc, &c.

Ajoûtant donc à cette ſurface la valeur de la baſe, & celle du plan incliné, on aura la ſurface totale.

La ſurface d'un priſme droit tronqué obliquement, & dont la baſe eſt un polygone regulier, ſe trouvera de même en multipliant le circuit de ſa baſe par ſa hauteur moyenne, ainſi qu'il a été démontré plus haux (*n.* 65.) & par la même raiſon on aura la ſurface d'un cylindre droit tronqué obliquement (*Fig.* 206.), en multipliant la circonference de ſa baſe par ſa hauteur moyenne.

Mais ſi un priſme droit tronqué n'a pas un polygone regulier pour baſe, alors il faut néceſſairement chercher chaque face en particulier, & en faire la ſomme pour avoir la ſurface.

Si le parallelepipede tronqué eſt incliné (*Fig.* 205.), on cherchera à part chaque face, & leur ſomme ſera la ſurface. Ou bien on fera paſſer par le centre du plan incliné un plan parallele à la baſe, & comme alors la ſurface ABCDRXVS eſt égale à la ſurface ABCDEHGF du parallelepipede tronqué, & qu'elle eſt la ſurface d'un parallelepipede incliné non tronqué, on le meſurera, ainſi que nous l'avons enſeigné ci-deſſus (*n.* 220.), & il en ſera de même des priſmes tronqués inclinés, dont la baſe eſt un polygone regulier, & de même auſſi d'un cylindre incliné tronqué (*Fig.* 207.); mais ſi le priſme n'a pas une baſe reguliere, il faudra néceſſairement chercher à part la valeur de chaque face, & en faire la ſomme.

## PROBLEME XLIV.

218. *Meſurer la ſurface d'une pyramide tronquée.*

Si la pyramide eſt droite & reguliere, & qu'elle ſoit tronquée par un plan parallele à ſa baſe (*Fig.* 208.), alors toutes ſes faces AFGB, BGHC, &c. ſeront égales. ainſi il ſuffira d'en meſurer une, & de multiplier ſa valeur par le nombre des côtez, ce qui donnera la ſuface.

Mais ſi la pyramide eſt irreguliere, ou qu'elle ſoit inclinée, ou enfin que le plan coupant ne ſoit pas parallele à ſa baſe (*Fig.* 200.), alors on cherchera à part la valeur des faces, & la ſomme de ces valeurs ſera la ſurface de la pyramide.

### COROLLAIRE I.

219. La surface d'un cone ABCD tronqué par un plan DC, parallele à sa base (*Fig.* 210.), se trouvera en retranchant de la surface AEC du cone entier la surface du cone DEC, qui manque au cone tronqué. Ou bien on ajoûtera ensemble les deux circonferences AB, DC, on prendra la moitié de leur somme, & on la multipliera par le côté AD, si le cone est droit; car si l'on dévelopoit ces deux circonferences en ligne droite, elles formeroient un trapezoïde, dont la hauteur seroit AD.

Mais si le cone tronqué étoit un cone incliné tronqué par un plan parallele à sa base, on multiplieroit la moitié des deux circonferences par un côté moyen arithmetique entre le plus grand côté du tronquement & le moindre côté.

Quant à la surface des cones tronqués par des plans non paralleles à la base, & à celle des onglets pris sur le cone, nous allons bien-tôt en parler.

### COROLLAIRE II.

220. Les surfaces des corps reguliers ayant toutes leurs faces égales, se trouveront en cherchant la valeur d'une de leurs faces que l'on multipliera par le nombre des faces, ce qui est évident; & quant à la surface des corps irreguliers, on cherchera la valeur de chaque face à part.

### DEFINITION XXI.

221. Si l'on tire sur la surface ABC d'un cone (*Fig.* 211.), des lignes droites AB, DB, ou des courbes EF, GH, &c. soit que ces courbes soient des circonferences de cercles ou qu'elles appartiennent à des Ellipses, à des paraboles, &c. & que de tous les points de ces lignes on abbaisse des perpendiculaires sur la base; ces perpendiculaires marqueront sur la base des points qui formeront ou des lignes droites AX, DX, ou des courbes MN, OP, &c. & ces lignes s'appelleront *lignes de projection*, de même qu'on appellera *lignes projettées*, les lignes AB, DB, EF, GH, &c. d'où partent les perpendiculaires.

Les portions de la surface compriſes entre les lignes de projection, s'appelleront *parties projettées*, & les parties de la base compriſes entre les lignes de projection s'appelleront *parties de projection*; & comme il n'est point de point de la surface duquel

on ne puisse tirer une perpendiculaire, il s'ensuivra que le cercle entier sera la *projection entiere* de la surface.

## *Proprietés de la projection, & des Parties de projection.*

222. *Les parties de projection sont à la projection comme les parties projettées sont à la surface.*

Concevez que toutes les circonferences qui composent la surface, soient projettées, il est visible que les lignes de projection seront des circonferences égales aux projettées chacune à chacune, mais qui seront plus serrées les unes contre les autres, ou si l'on veut, moins épaisses; car le rayon AX, dont elles prendront tous les points, est moindre que le côté AB, dont les circonferences projettées prennent tous les points; d'où il suit que les distances infiniment petites des circonferences de projection, seront aux distances infiniment petites des projettées, comme AX est à AB, de même que la projection entiere sera à la surface comme AX à AB.

Cela posé, soit la partie projettée AEFC, comprise entre une circonference EF, & la circonference AC de la base, & soit la couronne ACNM la partie de projection de cette portion de surface. Il y aura donc entre les deux cercles AC, MN, autant de circonferences de projection qu'il passe de circonferences projettées par la hauteur AE; car les perpendiculaires tirées de tous les points de AE sur la base tomberont sur AM, qui est la largeur de la couronne; donc la couronne retranche de la projection entiere autant de circonferences que la bande AEFC en retranche de la surface; & comme le nombre des circonferences de projection est égal à celui des projettées, il s'ensuit que la couronne sera au cercle comme la bande AEFC à la surface.

De même soit la partie projettée ABD, comprise entre deux lignes droites AB, DC, & soit le secteur AXD la partie de projection de la partie ADB, toutes les circonferences de la surface auront chacune une partie comprise entre les lignes AB, DB, & la projection de cette partie lui sera égale; ainsi tous les arcs de projection compris entre les jambes AX, DX du secteur, seront à la somme des circonferences de projection, comme les arcs compris entre AB & DB seront à la somme des circonferences de la surface; donc la partie AXD de projection sera à la projection entiere ou au cercle de la base, comme la partie pro-

jettée ABD à la ſurface, & ainſi des autres.

## PROBLEME XLV.

223. *Meſurer les ſurfaces des cones tronqués obliquement, & celle des onglets pris ſur le cone.*

Faites la projection EHFO (*Fig.* 212.), du plan incliné DC; cette projection ſera ou un cercle, ou une Ellipſe, ſelon que FH ſe trouvera égal à EO, ou moindre, ou plus grand; vous le meſurerez, & vous direz enſuite: Comme le cercle AB de la baſe eſt à la projection EO, ainſi la ſurface entiere du cone que vous aurez auſſi meſuré, eſt à la partie projettée DRC. Retranchant donc la ſurface DRC de la ſurface du cone, le reſte ſera la ſurface ADBC.

Ou bien vous retrancherez du cercle la projection, & vous direz: Comme le cercle eſt au cercle moins la projection, ainſi la ſurface du cone eſt à la ſurface tronquée ADCB, que vous trouverez par une regle de trois.

Pour meſurer la ſurface ABCD (*Fig.* 213.), d'un onglet, vous ferez ſa projection, & la courbe AED ſera ou une portion de cercle ou d'Ellipſe, ſi la ſection eſt une portion d'Ellipſe, ou une parabole, ſi la ſection eſt une parabole; ainſi il faudra meſurer la portion AED de cercle ou d'Ellipſe, ou de parabole, & l'ajoûter à la portion ARD, après quoi vous ôterez du cercle la ſomme des deux portions, & le reſte ſera la projection ACDE; c'eſt pourquoi vous direz: Comme le cercle de la baſe eſt à la projection ACDE, ainſi la ſurface du cone eſt à la ſurface tronquée ABCD.

Si la ſection BDC (*Fig.* 214.), eſt une hyperbole, la projection de ſa courbe ſera la droite BC, & la projection de la ſurface tronquée ſera le ſegment BEC de la baſe; donc comme le cercle de la baſe eſt au ſegment BEC, ainſi la ſurface du cone eſt à la ſurface tronquée BDCE.

En ſuivant ces principes, il n'eſt point de parties de ſurface de cone qu'on ne puiſſe meſurer aiſément, & l'on peut même employer cette méthode pour les cones inclinés, à moins que la perpendiculaire tirée de leur ſommet ne tombat hors de la baſe, auquel cas au lieu de faire la projection par des perpendiculaires à la baſe, on pourroit le faire par des paralleles à l'axe incliné.

## PROBLEME XLVI.

224. *Mesurer les surfaces des conoïdes.*

De toutes les surfaces il n'en est point de plus difficiles à mesurer que celle des conoïdes. Je vais en donner d'abord une méthode assez aisée, & qui ne peut pas jetter dans une erreur perceptible; mais comme elle est méchanique, j'en donnerai une générale qui servira pour toutes les courbes dont on peut tirer les tangentes.

Soit le paraboloïde FBC (*Fig.* 216. dont il soit proposé de mesurer la surface. Comme de tous les points de la courbe FFB de la coupe generatrice, on peut tirer des perpendiculaires FO, FO, &c. à l'axe, lesquelles venant à tourner autour de BO, décriront des circonferences, dont la somme sera la surface que nous cherchons, je divise l'axe en petites parties égales aux points O, O, O, &c. d'où je tire les ordonnées OF, marquant sur la courbe les points F, F, &c. & mesurant avec un fil la courbe FFB sur le conoïde, je prens une droite *fb* égale à la longueur du fil, & j'y marque les distances *bf*, *bf*, &c. égales aux distances BF, BF, &c. des points de la courbe au sommet; enfin sur tous les points *f*, *f*, *f*, de division, j'éleve les perpendiculaires *fo*, *fo*, &c. égales aux ordonnées OF, OF, &c. à l'axe, chacune à chacune. Ces perpendiculaires sont donc les rayons des cercles correspondans de la surface; & de plus, comme ils sont des perpendiculaires à la droite *bf*, qui est égale à la courbe BF, elles ont la même épaisseur que les circonferences de la surface, au lieu que les FO, FO, n'étant point perpendiculaires à la courbe, sont moins épaisses que les circonferences. Or tous les *fo*, *fo*, étant conçuës infiniment proches, formeront un plan qui sera la somme des rayons des circonferences qui composent la surface du conoïde, & ce plan seroit une parabole, si les droites *ff*, *ff*, étoient égales entr'elles comme les droits OO, OO; car alors les quarrez de *fo*, *fo*, seroient entr'eux comme les *bf*, *bf*; mais cela n'étant pas, je mesure le plan *bfo* par approximation le plus précisément qui se puisse; & comme ce n'est pas la somme des rayons que je cherche, mais celle des circonferences, je dis: comme le rayon est au cercle, ou comme 7 est à 22, ainsi la somme des rayons, ou le plan *bfo* est à la somme des circonferences que je trouve par une regle de proportion.

En se servant de la même méthode, on trouvera que le plan

*bad* (*Fig* 217.) eſt la ſomme des rayons qui décrivent la ſurface de l'Ellipſoïde, & qu'on aura par conſéquent cette ſurface en diſant : comme le rayon eſt au cercle, ainſi la figure *bad* eſt à la ſurface cherchée.

On trouvera de même auſſi que le plan *bfo* (*Fig.* 218.), eſt la ſomme des rayons qui décrivent les circonferences dont eſt compoſée la ſurface de l'hyperboloïde, &c.

Maintenant pour dire quelque choſe de plus géometrique, ſoit le paraboloïde FBC (*Fig.* 216.), après avoir diviſé l'axe en petites parties, & tiré les ordonnées OF, OF, &c. je tire par les points F, F, &c. des tangentes FQ, &c. & des perpendiculaires FP, FP, à ces tangentes, je prens une ligne XZ égale à l'axe, & diviſée de la même maniere, & ſur tous les points O, O, O, &c. j'éleve des perpendiculaires égales aux perpendiculaires FP, FP, &c. chacune à chacune, ce qui me donne un eſpace mixtiligne *xzpp*, égal au plan *bfo*, que nous avons fait ci-deſſus méchaniquement; & pour le prouver, concevez que les diviſions de l'axe BO ſoient infiniment petites, & que les droites FN, FN, auſſi infiniment petites, ſoient tirées ; ces droites qui formeront des triangles rectangles FNF, que nous pourrons regarder comme rectilignes, à cauſe que les arcs FF ſont infiniment petits. Les triangles ſemblables FNF, FPO, donnent FF. FN :: FP. FO. donc FF×FO = FN×FP ; mais dans le plan *bfo*, les *ff* ſont égaux aux FF, & les *fo* ſont égaux aux FO ; donc *ff*×*fo* = FN×FP. Mais les FN étant égaux aux petites parties OO de l'axe, ſont par conſéquent égaux aux *oo* du mixtiligne *xzpp*, & les FP ſont égaux aux *op*, *op*, de ce même mixtiligne ; donc *ff*×*fo* = *oo*×*op*, c'eſt-à-dire les rectangles circonſcrits au plan *bfo*, ſont égaux aux rectangles circonſcrits au mixtilignes *xzpp* ; mais ces rectangles ayant les hauteurs infiniment petites, ne different pas du plan *bfo*, ni du mixtiligne *zxpp*. Donc le plan *bfo* & le mixtiligne ſont égaux ; donc l'un & l'autre ſont égaux à la ſomme des rayons de circonferences qui compoſent la ſurface du paraboloïde.

Il ne s'agit plus que de trouver la valeur de ce mixtiligne, parce qu'alors nous dirons : comme le rayon eſt au cercle, ainſi le mixtiligne eſt à la ſurface du paraboloïde. Pour cela on tirera d'autres paralleles qui ne ſoient pas perpendiculaires à *xz*, & dont les extrêmitez ſoient compriſes entre la courbe *pp*, & les diviſant chacune en deux également, on tirera leur diametre, dont la poſi-

tion vous fera connoître si la courbe est une portion de parabole, ou de cercle, ou d'Ellipse, ou d'hyperbole; & comme je vois ici que le mixtiligne est un tronquement de la parabole, j'acheve cette parabole, j'en cherche la valeur, après quoi j'en retranche ce qui manque au mixtiligne; & j'acheve le reste comme ci-dessus.

On trouvera de la même façon des mixtilignes pour l'Ellipsoïde & l'hyperboloïde, lesquels seront égaux au plan *bad*, ou au plan *bfo*, que nous avons construit ci-dessus, & l'on pourra toujours découvrir quelle est la section conique à qui ce mixtiligne appartient, ce qui est assez aisé pour me dispenser de m'étendre davantage là-dessus.

## PROBLEME XLVII.

225. *Mesurer les surfaces des onglets cylindriques.*

Si l'onglet est de la premiere espece (*Fig.* 219.), qu'il soit droit, & égal à la sphere produite par la circonvolution de sa base, sa surface sera égale à la surface de cette sphere, & par conséquent mesurant celle-ci, on aura la valeur de celle-là; car tandis que le demi-cercle AOHC tournera autour de AC tous les points de sa circonference, décriront des circonferences dont la somme sera égale à la surface de la sphere. Or la surface de l'onglet est composée d'une somme de lignes droites égales en nombre & en longueur à ces circonferences, puisque par quelque point H qu'on fasse passer un plan perpendiculaire à la base & au diametre AC, la section sera toujours un triangle rectangle RFH, égal au cercle décrit par RH, & dont le côté HF sera égal à la circonference de cercle, comme nous l'avons prouvé en parlant de la solidité des onglets; donc la surface de l'onglet sera égale à la surface de la sphere.

Les surfaces des parties de l'onglet se trouveront de la même façon. Ainsi la surface AOE sera égal à la surface du segment spherique décrit par le segment AOI de la base: la surface CFH sera égale à la surface du segment spherique décrit par le segment RHC; la surface OEGFH se trouvera en multipliant l'arc OH par la hauteur OE; enfin la surface de l'onglet EGFB de la seconde espece se trouvera en retranchant de la surface de l'onglet ABC les surfaces des parties précedentes, dont nous venons de parler.

Que si l'onglet étoit droit, mais qu'il ne fût pas égal à la sphere,

alors sa surface seroit à celle de la sphere comme la hauteur BS de l'onglet à la circonference du grand cercle de la sphere; ce qui prouve de même que nous l'avons prouvé pour la solidité. La surface AEO seroit à la surface du segment spherique décrit par AO encore comme BS a la circonference du grand cercle, de même de la surface CFD à l'égard de la surface du segment spherique décrit par CH; & quant aux deux autres parties, on les mesureroit comme ci-dessus.

Si l'onglet est incliné (*Fig.* 220.), on coupera l'onglet par un plan parallele à la base du cylindre, & qui passe par le point A, & alors l'on mesurera la surface ABD, selon qu'elle appartiendra ou à un onglet de la premiere espece, ou à un onglet de la seconde; & quant à l'autre partie restante, on tirera sur cette partie une droite DE perpendiculaire à la courbe AD, ou à la base du cylindre, & l'on mesurera la partie ADE comme la partie de la surface d'un onglet fait par le plan parallele à la base, & par le plan incliné AEC; on coupera encore l'onglet par un plan parallele à la base du cylindre, & qui passe par le point E, & l'on mesurera la partie EHD comme la partie de la surface d'un onglet fait par ce second plan parallele à la base & par le plan incliné ABH; on tirera de même du point H une droite sur la surface du cylindre qui soit perpendiculaire à EH, & l'on trouvera d'autres parties de surface d'onglet que l'on mesurera de la même façon.

Il seroit bon en lisant ceci, d'avoir en main un cylindre, & d'y tracer les lignes pour entendre plus facilement ce que nous venons de dire.

### COROLLAIRE.

226. Il n'est point de partie de surface cylindrique qu'on ne puisse mesurer par les principes que nous venons de donner; car, par exemple (*Fig.* 221.), on aura la surface du double onglet incliné RHGI, en coupant d'abord le cylindre par un plan parallele à la base du cylindre qui passe par le point G, ce qui donnera un onglet droit GSXI, dont la surface se mesurera comme ci-dessus. On coupera ensuite l'onglet par un autre plan parallele à la base qui passe par le point H, ce qui donnera un autre onglet droit HTR, dont la surface se mesurera de la même façon. On tirera les perpendiculaires SZ, TV, & la partie SZTV se mesurera en multipliant l'arc ZT par sa hauteur SZ ou TV. En-

fin la partie SHZ ſe meſurera comme la partie de la ſurface d'un onglet fait par le plan HZT parallele à la baſe, & par le plan incliné HIGF, & la partie VGT ſera meſurée comme la partie de la ſurface d'un onglet fait par le plan GXS parallele à la baſe, & par le plan incliné GTRH.

Maintenant la ſurface du cylindre tronqué DERC, eſt égale à la ſurface d'un cylindre qui auroit pour l'une de ſes baſes le cercle DC, & pour l'autre un cercle qui paſſeroit par le centre du plan incliné ER; ôtant donc de cette ſurface celle du double onglet RHGI, le reſte ſera la ſurface de la partie reſtante HEDCIG, & ainſi des autres parties.

De même (*Fig.* 222.), pour avoir la ſurface de l'onglet EFG de la ſeconde eſpece, dont la baſe eſt plus grande que le demi-cercle, on le coupera par un plan parallele à la baſe, en ſorte que l'onglet RSG ſoit de la premiere eſpece, & par un autre plan perpendiculaire à la baſe, & qui paſſe par RS; après quoi on meſurera la ſurface de l'onglet RSG, celle du demi-cylindre RTSIBH, enſuite celle du demi-cylindre RNSIAH, de laquelle on ôtera la ſurface de l'onglet droit tronqué RNSFAE, pour avoir les deux parties REH, SFI, & par ce moyen on aura la ſurface de l'onglet EFBG. Je laiſſe au Commençans le plaiſir de trouver par eux-mêmes les autres parties de ſurface marquées dans la figure 222.

## PROBLEME XLVIII.

227. *Meſurer la ſurface d'un anneau.*

Si l'anneau eſt fermé, & que ſa coupe generatrice ſoit un cercle ABCD (*Fig.* 223.), qui tourne autour de la droite FE, multipliez ſa circonference ABCD par elle-même, & le produit ſera la ſurface de l'anneau; car tandis que le cercle tournant autour de FE, décrit l'anneau, tous les points de ſa circonference décrivent des circonferences dont la ſomme eſt la ſurface de l'anneau; or ſi ſur tous les points de la circonference ABCD on éleve des perpendiculaires égales aux circonferences décrites par ces points chacune à chacune, nous avons démontré en parlant de la ſolidité des anneaux, que la ſomme de ces perpendiculaires formera la ſurface d'un cylindre HKL tronqué diagonalement; donc la ſurface de ce cylindre tronqué eſt égale à celle de l'anneau. Or la hauteur HL de ce cylindre tronqué eſt égale à la circonference, dont le rayon ſeroit le diametre AC, laquelle eſt

par conſéquent double de la circonference ABCD, & ſa ſurface eſt égale à celle d'un cylindre entier qui auroit la même baſe & la moitié de la hauteur; donc la ſurface de ce cylindre entier, & par conſéquent celle de l'anneau eſt égale à la circonference ABCD multipliée par la moitié de HL, ou par la circonference ABCD.

*La ſurface de la partie exterieure de l'anneau, c'eſt-à-dire de la partie décrite par le demi-cercle BAD, ſurpaſſe la ſurface de la partie interieure de deux fois la ſurface de la ſphere du cercle generateur.* Coupant le cylindre tronqué HKL par un plan $2MN_3$ perpendiculaire à ſa baſe, & qui paſſe par le centre, la ſurface $2MN_3HL$ ſera égale à la ſurface de la partie exterieure de l'anneau, & la ſurface $2MN_3K$ ſera égale à la ſurface de la partie interieure; mais la ſurface $2MN_3HL$ eſt égale à la ſurface $2MN_3HE$ de la moitié du cylindre HKFE, plus la ſurface de l'onglet MNEL, & la ſurface $2MN_3K$ eſt égale à la ſurface $2MN_3KF$ de la moitié du même cylindre, moins la ſurface de l'onglet MNFK, qui eſt égal à l'onglet MNEL; donc la ſurface $2MN_3HL$ ſurpaſſe la ſurface $2MN_3K$ de deux fois la ſurface de l'onglet MNEL, ou de deux fois la ſurface de la ſphere du cercle EMNF égal au cercle generateur; car l'onglet MNEL a pour hauteur la droite EL égale à la circonferenoe de ce cercle.

Les autres parties de la ſurface d'un anneau, peuvent ſe trouver facilement; car par exemple, ſi l'on tire dans le cercle de la baſe la droite PO parallele à la ligne autour de laquelle le cercle generateur ſe meut, il eſt viſible que la ſurface de la partie de l'anneau décrite par le ſegment OHP, eſt égale à la ſurface cylindrique OHPRLQ, qui eſt facile à trouver, & ainſi des autres.

Ce que nous venons de dire de la ſurface d'un anneau fermé circulaire, doit s'entendre auſſi de la ſurface d'un anneau fermé Elliptique, parabolique, ou hyperbolique, en ſuppoſant que la parabole ou l'hyperbole generatrice tourne autour d'une droite PQ (*Fig.* 224.), parallele à l'axe BD. Mais alors il faut dire pour la ſurface de l'anneau Elliptique, que la ſurface de la partie exterieure de l'anneau ſurpaſſe celle de l'interieure de deux fois la ſurface de l'Ellipſoïde long ou applati de ſa baſe, & pour la ſurface de l'anneau parabolique, ou hyperbolique que la ſurface de la partie interieure ſurpaſſe la ſurface de l'interieure de deux fois la ſurface du paraboloïde, ou de l'hyperboloïde de la figure genera-

trice; ce qui se comprend aisément par la seule inspection des figures 223. 224.

Si l'anneau parabolique ou hyperbolique fermé étoit fait par la circonvolution d'une parabole, ou d'une hyperbole ABC (*Fig.* 225), autour d'une droite PQ parallele aux ordonnées à l'axe, la surface de l'anneau seroit égale à la surface d'un cylindre parabolique ou hyperbolique tronqué diagonalement, & qui auroit pour base la figure generatrice, & pour hauteur la circonference décrite par l'axe CO, & par conséquent cette surface seroit égale à la surface du cylindre entier ACBEDF, moins celle de l'onglet DEFC, lequel est égal au paraboloïde, ou à l'hyperboloïde de la figure generatrice autour de l'ordonnée AB. Ainsi il s'agiroit de trouver la surface du paraboloïde ou de l'hyperboloïde, ce que l'on feroit mecaniquement, comme nous avons fait ci-dessus en cette sorte.

Soit le paraboloïde ADCB fait par la circonvolution de la parabole ABC autour de sa base AC (*Fig.* 226.), je divise sa base en parties égales aux points O, &c. d'où je tire les droites OP, OP, &c. paralleles à l'axe, & je marque sur la courbe les points P, P, &c. je mesure la courbe CBA avec un fil, & je prens une droite *ca* qui lui soit égale, sur laquelle je marque les distances *cp*, *cp*, &c. égales aux distances CP, CP, &c. j'éleve aux points *p*, *p*, &c. les perpendiculaires *po*, *po*, &c. égales chacune aux correspondantes PO, PO, &c. & mesurant le plan *aooc*, je dis: comme le rayon est au cercle, ainsi le plan *aooc* est à la surface du paraboloïde. Ce qui a été démontré ci-dessus.

Si l'anneau circulaire est ouvert (*Fig.* 227.), sa surface est égale à celle d'un cylindre qui a pour base le cercle generateur ACDB, & pour hauteur une droite égale à la petite circonference de l'anneau, plus la moitié de la difference de la grande circonference à la petite; car cet anneau est égal à un cylindre tronqué CDBAFR, dont la grande hauteur AF est égale à la grande circonference décrite par le rayon EA, & la petite hauteur DR égale à la petite circonference décrite par le rayon ED. Or ce cylindre est égal au cylindre ADRI, qui a pour hauteur DR, plus le cylindre IRHG, qui a pour hauteur IG, ou la moitié de IF, qui est la difference de la grande circonference à la petite. Donc la surface de l'anneau est égale à la surface du cylindre ADHG, qui a pour hauteur la petite circonference RD, plus RH, ou IG, ou la moitié de la difference des deux circonferences.

*La surface de la partie exterieure d'un anneau ouvert faite par la demi-circonference CAB surpasse la surface de la partie interieure faite par la demi-circonference CDB de deux fois la surface de la sphere du cercle generateur.* La surface de la partie interieure est égale à la surface CBSMHD de la moitié du même cylindre, moins la surface de l'onglet SMHR égal à l'onglet SMGF ; donc la surface de la partie exterieure surpasse celle de l'interieure de deux fois la surface de l'onglet SMGF ; or la hauteur GF de cet onglet est égale à la circonference ACDB de la base : car IF étant la difference de la circonference du rayon AE à la circonference du rayon ED, est égal à la circonference du rayon DA, & par conséquent GF est égal à la circonference du rayon CA, ou à la circonference ACBD ; donc l'onglet SMGF est égal à la sphere de la base, & sa surface est égale à la surface de la sphere. Donc la surface de la partie exterieure surpasse la surface de l'interieure de deux fois la surface de la sphere de la base.

Par raport aux anneaux Elliptiques ouverts, il faut dire que la surface de la partie exterieure surpasse celle de l'interieure de deux fois la surface de l'Ellipsoïde allongé ou applati de sa base ; & par raport aux anneaux ouverts paraboliques ou hyperboliques formés par la circonvolution de la figure generatrice autour d'une parallele à leur axe, on dira que la surface de la partie exterieure surpasse celle de l'interieure de deux fois la surface du conoïde autour de l'axe.

Que si l'anneau ouvert est formé par une parabole ou une hyperbole qui tourne autour d'une droite XZ parallele aux ordonnées à l'axe (*Fig.* 228.), alors la surface de cet anneau est égale à celle d'un cylindre ACBFHG, qui a pour base la figure generatrice, & pour hauteur la grande circonference de l'anneau, ou la circonference du rayon EQ, moins la surface d'un onglet FGHS, égale à la surface du conoïde autour de la base AD ; ce qui est facile à prouver, &c.

## PROBLEME XLIX.

228. *Mesurer les surfaces des solides qui rempliroient le vuide des anneaux, & les pyramides à arêtes concaves.*

La surface du vuide d'un anneau circulaire fermé, est visiblement égale à la surface de la partie interieure de cet anneau ; ainsi la surface de cette partie interieure étant connuë, on connoitra facilement la surface du solide ABCDE (*Fig.* 230.), qui rempliroit

pliroit le vuide d'un anneau circulaire ouvert, est égale à la surface de la partie interieure de cet anneau; & il faut dire la même chose des surfaces des solides qui rempliroient les vuides des anneaux fermés & ouverts Elliptiques, & des paraboliques & & hyperboliques, lorsque ceux-ci sont formés par une parabole ou une hyperbole qui tournent autour d'une parallele à leur axe; & quant aux anneaux formés par une parabole, ou une hyperbole qui tournent autour d'une parallele aux ordonnées à l'axe, il est évident que les surfaces des solides ABCDEF (*Fig.* 232.); ABCDEF (*Fig.* 233.), qui rempliroient leurs vuides, seroient égales aux surfaces de ces anneaux. Tout cela ne souffre aucune difficulté; passons aux pyramides.

Chaque face d'une pyramide (*Fig.* 234.) de cette espece, est une partie de surface convexe de cylindre. Ainsi du sommet E tirez le long de la face AEB la courbe EF, qui aille aboutir au milieu F de la droite AB. Concevez que EF se meuve parallelement à elle-même le long de FA jusqu'en A, ce qui vous donnera une surface cylindrique AOEF, que vous mesurerez en multipliant l'arc AO par la droite AF. Faites passer un plan AHER par l'aréte AE, ce qui vous donnera un demi-onglet AHOE, dont vous mesurerez la surface AOE de la maniere ordinaire, & retranchant cette surface de la surface trouvée AOEF, le reste sera la surface AFE, laquelle étant doublée, vous donnera la face entiere AEB. Cela fait, si la pyramide est reguliere, vous multiplierez la valeur de la face AEB par le nombre des faces, & le produit sera la surface de la pyramide.

Mais si la pyramide est irreguliere (*Fig.* 235.), il faut chercher chaque face à part, & la somme donnera la surface cherchée.

Enfin si la pyramide est tronquée (*Fig.* 236.), des points E, G, de l'un des côtez de la base superieure, vous tirerez le long de la face AEGB les courbes ER, GS, paralleles entr'elles, & perpendiculaires à la droite AB. Ainsi la surface EGRS se mesurera en multipliant l'arc ER par la droite RS; après quoi vous chercherez la partie AER comme ci-dessus, & vous acheverez le reste de la même façon.

## PROBLEME L.

229. *Mesurer la surface d'une calote à arêtes convexes.*

Chaque face d'une calote (*Fig.* 237. 238.), est une portion de surface convexe de cylindre; c'est pourquoi partageant la base

AB (*Fig.* 237.), de l'une des faces AEB, en deux parties égales en F, & tirant la courbe EF, la face AEB sera divisée en deux surfaces AEF, FEB, de demi-onglet. Ainsi cette face sera facile à trouver. Après quoi si la calote est reguliere, vous multiplierez la valeur de la face AEB par le nombre des faces; & si elle est irreguliere, vous chercherez la valeur de chaque face à part, & la somme sera la surface de la calote.

## PROBLEME LI.

230. *Mesurer la surface d'une voute.*

Si la voute est simple (239. 240. 241.), il faut multiplier la circonference ABC de sa coupe interieure par la longueur AD de la voute, & le produit sera la surface; ce qui est évident.

Mais si la voute est composée d'arcs qui se croisent, alors cette voute est composée, comme nous avons dit, de deux cylindres qui se coupent, & qui ont une calote commune ABCDE, ainsi qu'il est représenté par les figures 242, 243, dont la premiere montre le cylindre compris entre les deux fenêtres, & la seconde le cylindre compris entre les deux arcs paralleles soutenus par quatre pilliers. Or si l'on ajoûte ensemble les surfaces des deux cylindres, & que de la somme on ôte la surface de la calote, le reste sera la surface de la partie d'une voute comprise entre quatre pilliers; car si du cylindre AFDCGB (*Fig.* 242.), on ôte les deux faces AEB, DEC de la calote, le reste sera la surface des deux especes d'onglets AFDE, BGCE; & de même si du cylindre AFDCGB (*Fig.* 233.), on ôte les faces AED, BEC, qui sont les deux autres faces de la calote, le reste sera la surface des deux especes d'onglets AFBE, DGCE; mais la voute n'a d'autre surface que celle des quatre onglets: donc, &c.

Comme toutes les surfaces des parties des voutes composées, sont toujours des especes d'onglets, il sera facile de les trouver en suivant les regles que nous venons de donner.

## REMARQUE.

231. Si l'on fait tourner une demi-cycloïde ABC (*Fig.* 244.), autour de sa base AB, elle produira un solide rond égal à un onglet ABCD, dont la hauteur CD est égale à la circonference décrite par le diametre BC; ce qui est évident, après ce que nous avons dit au sujet des onglets, & la surface ADC de cet onglet

eſt égale à la ſurface du ſolide rond. De même ſi la demi-cycloïde tourne autour de ſon diametre BC (*Fig.* 245.), elle produira un ſolide rond égal à un onglet ABCD, dont la hauteur AD eſt égale à la circonference décrite par la baſe AB. Or nous avons trouvé ci-deſſus la ſolidité du premier de ces onglets, ou du ſolide rond fait autour de la baſe AB, & nous avons dit en même temps que la ſolidité de l'autre onglet, ou de l'autre ſolide rond autour du diametre BC, dépendoit de la connoiſſance des centres de gravité; & comme les deux ſurfaces ne peuvent ſe connoître que dépendemment du même principe que nous n'avons point expliqué dans cet Ouvrage, nous renvoyons cette matiere à un autre Traité, où nous mettrons ce principe dans tout ſon jour.

Il me reſte à parler de la meſure des differentes parties d'une ſurface ſpherique, faites par des plans qui coupent la ſphere, & qui s'entrecoupent dans la même ſphere. Mais auparavant je vais donner les principes néceſſaires pour l'intelligence de cette matiere.

## DEFINITION.

232. Nous avons déja dit (*Partie 4. n. 46.*), que ſi on coupe une ſphere par pluſieurs plans, les ſections ſont des cercles, dont ceux qui paſſent par le centre de la ſphere, s'appellent *grands cercles de la ſphere*; & ceux qui ne paſſent point par le centre, s'appellent *petits cercles de la ſphere*; & nous ajoûterons préſentement que ſi ſur le centre d'un grand ou d'un petit cercle ABCD, *abcd* (*Fig.* 249.), on éleve une perpendiculaire HI, qu'on prolonge de part & d'autre juſqu'à la circonference de la ſphere, les extrêmitez H, I, de cette ligne, s'appellent *poles* du cercle ABCD, ou *abcd*.

233. *Les poles H, I, d'un grand ou d'un petit cercle, ſont également éloignés de tous les points de la circonference de ce cercle.* Tirez dans le plan du cercle *abcd* deux diametres *ac*, *ef*, la ligne HO étant perpendiculaire ſur le cercle par la définition précedente, & paſſant par ſon centre, eſt par conſéquent perpendiculaire ſur les deux diametres qui ſecoupent au même centre (*Partie 4. n. 6*); donc ſon point *o* étant également diſtant des extrêmitez *a*, *c*, *e*, *f*, de ces diametres, ſon point H en ſera auſſi également diſtant; & comme la même choſe arrivera à l'égard de tous les diametres qu'on pourroit tirer de tous les points de la circonference *abcd*,

il s'enſuit que le point H qui eſt l'un des poles de ce cercle, eſt également éloigné de tous les points de ſa circonference. On prouvera de la même façon que l'autre pole I du cercle *abcd*, eſt également diſtant de ſa circonference.

234. *Si l'on joint par une ligne droite les deux poles H, I, d'un cercle* abcd, *cette ligne paſſera par le centre de la ſphere.* Le centre O de la ſphere eſt également éloigné de tous les points de la circonference *abcd*, à cauſe que tous ces points ſont ſur la ſurface de la ſphere; mais la droite HI étant perpendiculaire ſur le centre du cercle *abcd*, a toutes ſes parties également éloignées de tous les points de la même circonference *abcd*; donc cette ligne paſſe néceſſairement par le centre O de la ſphere.

235. *Si deux cercles de ſphere ABCD, AECF* (Fig. 250.), *ſe coupent mutuellement en deux parties égales, ils ſont l'un & l'autre grands cercles de la ſphere;* puiſque les deux cercles ſe coupent en deux également, par conſéquent ils ſe coupent l'un & l'autre par le centre, & leur ſection commune AC eſt leur diametre commun. Je coupe la ſphere par un plan qui paſſe par le centre O de ces deux cercles, & qui ſoit perpendiculaire au diametre AC. 1°. La ſection ſera un cercle BEDF par la définition précedente. 2°. Ce cercle ſera perpendiculaire aux deux cercles ABCD, AECF, puiſqu'il eſt perpendiculaire ſur leur diametre. 3°. Son centre ſera le même que le centre O des deux cercles; car tirant la droite EF par les points E, F, où ce cercle coupe le cercle AECF, cette droite ſera un diametre du cercle AECF, à cauſe qu'elle paſſe par ſon centre, & par conſéquent elle ſera égale au diametre AC, ou au diametre BD du cercle ABCD. Donc il y aura dans le plan BEFD un point O, par où on pourra tirer à ſa circonference quatre lignes égales OB, OE, OD, OF; ainſi le point O ſera ſon centre. Cela poſé, le diametre AC étant perpendiculaire ſur le cercle BEFD, ſes deux extrêmitez A, C, ſont par conſéquent les poles du cercle BEFD par la définition précedente; donc AC paſſe par le centre de la ſphere (*n.* 3.), & ce centre ne peut être autre que le point O, qui eſt également éloigné des points A, C, de la ſurface; donc les deux cercles ABCD, AECF, qui ſe coupent en deux parties égales, ſont des grands cercles de la ſphere, puiſqu'ils ont le même centre qu'elle.

236. *Si deux cercles ABCD, AECF, qui ſe coupent, ont le centre O commun, ils ſont l'un & l'autre grand cercle de la ſphere.* Si le centre

O leur eſt commun, ils ſe coupent en deux parties égales ; donc ils ſont grands cercles, comme il vient d'être démontré.

237. *Si deux cercles de ſpheres AaCI*, abcd (Fig. 249.), *qui ſe coupant, ne ſe coupent pas mutuellement en deux parties égales, l'un des deux n'eſt pas grand cercle de la ſphere.* Si tous les deux étoient grands cercles, ils auroient le centre commun, puiſque leur centre eſt le centre de la ſphere ; donc ils ſe couperoient mutuellement en deux parties égales.

238. *Si un cercle de ſphere AHCI* (Fig. 249.), *coupe un autre cercle* abcd *en deux parties égales, & lui eſt perpendiculaire, il paſſe par les poles H, I, de ce cercle.* Du centre O du cercle *abcd*, élevez ſur ce cercle la perpendiculaire OH, juſqu'à la ſurface de la ſphere ; cette perpendiculaire ſera dans le plan du cercle coupant AHCI, puiſqu'il eſt auſſi perpendiculaire ſur le cercle *abcd* ; donc le pole H du cercle *abcd* ſera un point de la circonference du cercle AHCI. Prolongez la droite HO juſqu'à ce qu'elle rencontre la ſurface de la ſphere de l'autre côté en I ; la partie HO de la droite HI étant dans le plan du cercle AHIC, ſon prolongement OI ſera encore dans le même plan ; donc l'autre pole I du cercle *abcd* ſera encore un point de la circonference du cercle HAIC.

239 *Si un cercle AHCI coupe un autre cercle* abcd *perpendiculairement, & paſſe par ſes poles H, I, il coupe ce cercle en deux parties égales.* Il eſt perpendiculaire & paſſe par les poles ; donc la droite HI qui joint les poles eſt dans ſon plan ; mais cette droite paſſe par le centre du cercle *abcd* ; donc le cercle AHCI paſſe auſſi par ce centre, & par conſéquent il coupe le cercle *abcd* en deux parties égales.

240. *Tous les grands cercles de la ſphere ſe coupent tous mutuellement en deux parties égales.* Ils ſe coupent tous par le centre ; donc, &c.

241. *Si deux ou pluſieurs petits cercles de ſphere ſe coupent, il ne peut s'en trouver qu'un ſeul qui ſoit coupé en deux également.* S'il s'en trouvoit deux, ces deux-là ſeroient grands cercles (*n.* 4.), ce qui eſt contre la ſuppoſition.

242. *Si un petit cercle coupe un autre petit cercle en deux parties égales, il ne paſſe ni par l'un ni par l'autre de ſes poles.* S'il paſſoit par l'un des poles, il ſeroit perpendiculaire au cercle coupé ; car la droite qui paſſeroit par ce plan & par le centre, ſeroit néceſſaire-

ment dans son plan, & si cela étoit, il seroit grand cercle (*n.* 7.); ce qui est contre la supposition.

243. *Si l'on coupe deux grands cercles de sphere ABCD, EBFD* (Fig. 254.), *par un autre grand cercle AHCIE, qui ne passe pas par le diametre commun BD, les triangles spheriques faits par les circonferences de ces trois cercles sur la demi-surface superieure AHCIEB coupée par le cercle AHCIE sont égaux chacun à chacun aux triangles opposés faits par les mêmes circonferences sur la demi-surface inferieure AHCIED.*

Tirez les diametres BD, AC, FE, les trois cercles se coupent mutuellement en deux parties égales, parce qu'ils sont tous grands cercles (*n.* 9.), & par conséquent leurs circonferences sont aussi coupées en deux également. Donc l'arc EBF, & l'arc BFD, valent l'un & l'autre la moitié de la circonference, EBFD; ôtant donc de chacun d'eux l'arc commun BF, on aura l'arc BE égal à l'arc FD.

De même l'arc ABC & l'arc BCD, valent l'un & l'autre la moitié de la circonference ABCD; ôtant donc de chacun d'eux l'arc BC, on aura l'arc AB égal à l'arc CD.

De même encore l'arc EAF, & l'arc AHC, valent chacun la moitié de la circonference AHFCIE, ôtant donc de chacun d'eux l'arc commun AHF, on aura l'arc AE égal à l'arc FC.

Puis donc que les trois arcs AB, BE, AE, sont égaux chacun à chacun aux trois arcs CD, FD, FC, & que l'angle ABE est égal à l'angle FDC, à cause que les deux cercles ABCD, EBFD, se coupant mutuellement, font les angles opposés au sommet égaux, c'est-à-dire l'angle ABE ou ADE, égal à l'angle FBC, ou FDC, il s'ensuit que les deux triangles ABE, FDC, sont parfaitement égaux.

On prouvera de la même façon que le triangle FBC est égal au triangle opposé EDA, que le triangle ABF est égal à son opposé EDC, & le triangle EBC égal à son opposé ADF.

## PROBLEME LII.

244. *Mesurer une portion de surface spherique coupée par deux grands cercles de sphere* (Fig. 251.).

Soit, par exemple, la portion ABCEA, coupée par les deux demi-circonferences ABC, AEC des deux grands cercles ABCD, AECF; coupez la sphere par un cercle BEDF perpen-

diculaire au diametre commun AC des deux cercles, & qui paſſe par leur centre commun O. Meſurez la ſurface de la ſphere, la circonference BEDF, & l'arc BE de cette circonference compris entre les deux demi-circonferences ABC, AEC. Puis dites: Comme la circonference BEDF eſt à l'arc BE, ainſi la ſurface de la ſphere eſt à un quatriéme terme qui ſera la partie ABCEA, compriſe entre les deux demi-circonferences.

### DEMONSTRATION.

Le cercle BEDF étant perpendiculaire ſur le diametre AC des deux grands cercles, ſera perpendiculaire à ces cercles; ainſi tirant des points B, E, où il coupe les deux demi-circonferences des droites BO, EO, au centre O, ces droites ſeront perpendiculaires au diametre AC, & par conſéquent l'angle BOE ſera l'angle d'inclinaiſon des deux demi-cercles ABC, AEO (*partie 4. n. 16.*), & l'arc BE en ſera la meſure.

Concevez que le demi-cercle ABC tourne autour du diametre AC, & décrive la ſphere; pendant ſon mouvement tous les points G, I, &c. de ſa circonference ABC, décriront des circonferences paralleles entr'elles & à la circonference BEDF, & la ſomme de ces circonferences ſera égale à la ſurface de la ſphere; or quand le demi-cercle ABC ſera dans la poſition du demi-cercle AEC, toutes les portions des circonference BE, GH, IL, &c. que les points de ſa circonference auront décrites, ſeront entr'elles comme leurs circonferences entieres, c'eſt-à-dire l'arc BE ſera à l'arc GH, comme la circonference BEDF à la circonference GHNR, & ainſi des autres; car comme tous les points B, G, &c. n'acheveront pas plutôt leurs circonferences les uns que les autres; ils n'acheveront pas plutôt auſſi leurs moitiés, leurs tiers, ou leurs quarts, ou telle autre partie que ce ſoit; donc tous les arcs BE, GI; IL, &c. ſeront à leurs circonferences comme l'arc BE eſt à ſa circonference BEDF. Mais tous les arcs BE, GI, IL, &c. forment la portion de ſurface ABCEA, de même que leurs circonferences forment la ſurface totale; donc la portion ABCEA eſt à la ſurface totale comme l'arc BE à ſa circonference BEDF.

### COROLLAIRE.

245. Une portion BAC (*Fig. 252.*), de ſurface d'un ſegment ſpherique BCDEA coupée par deux portions BA, CA, de cir-

conferences de grands cercles perpendiculaires sur la base BCDE du segment, & qui par conséquent passent par ses poles A, H, se mesurera de la même façon, en disant : Comme la circonference BCDE est à l'arc BC, ainsi la surface du segment est à la portion de surface BAC, ce qui se démontre de la même maniere.

## PROBLEME LIII.

246. *Deux points A, C,* (Fig 253), *sur la surface d'une sphere étant donnés, faire passer un grand cercle par ces deux points.*

Du centre O de la sphere tirez les rayons OA, OC, & joignez les points donnés par la droite AC, ce qui vous donnera un triangle ACO. Coupez la sphere par un plan qui rase ce triangle, & la section ACSMI sera un grand cercle, puisqu'elle passera par le centre O de la sphere.

## PROBLEME LIV.

247. *Mesurer un triangle spherique fait par des portions de circonference de trois grands cercles de sphere* (Fig. 254.).

Soit le triangle spherique BFC qu'on propose de mesurer. Mesurez par le premier Probleme la portion AHCBA de la demi-surface AHFCIE, dans laquelle portion se trouve le triangle proposé. Mesurez aussi dans la même demi-surface la portion FBEICF, qui renferme encore le triangle proposé ; enfin mesurez la portion BADEB, qui prend dans l'autre demi-surface le triangle ADE, égal à son opposé EBC, qui est encore le triangle proposé. Ajoûtez ensemble ces trois portions, & mesurant la demi-surface AHFCIE, retranchez sa valeur de la somme des trois portions; la moitié du reste sera la valeur du triangle BFC.

### DEMONSTRATION.

La demi-surface AHFCIE, ne contient que les triangles ABF, EBC, ABE, FBC; & comme le dernier FBC est égal à son opposé ADE (*n.* 12.), il s'ensuit que la valeur de la demi-surface est égale aux triangles ABF, EBC, plus la portion BADEB. Mais les trois portions AHCBA, FBEICF, BADEB, prises ensemble, surpassent la demi-surface AHFCIE de deux fois le triangle FBC; donc ôtant de leur somme la valeur de la demi-surface, le reste vaudra deux fois le triangle FBC, & par conséquent la moitié de ce reste sera la valeur du triangle proposé.

COROL.

### COROLLAIRE.

248. Si le triangle proposé HOI (*Fig.* 255.), étoit dans le mi-lieu de la demi-surface ABCDEF, vous chercheriez une autre demi-surface sur l'extrêmité de laquelle le triangle proposé eût sa base, par exemple, la demi surface AHIDSV, & vous mesureriez 1°. la portion HOCSD de cette demi-surface, dans laquelle portion se trouve le triangle proposé; 2°. la portion IHAVRBI, qui renferme encore le triangle proposé, & enfin la portion OBXCO, qui prend dans l'autre demi surface le triangle RXS, égal à son opposé OHI, qui est le triangle proposé, vous ôteriez de la somme des trois portions la valeur de la demi-surface, & la moitié du reste seroit la valeur du triangle OHI; ce qui se démontre comme ci-dessus.

## PROBLEME LV.

249. *Mesurer un triangle spherique fait par des portions de circonference qui n'appartiennent pas toutes à des grands cercles, ou qui appartiennent toutes à des petits cercles.*

Premierement, si le triangle proposé ACB (*Fig.* 256.), a deux côtez AB, BC, qui appartiennent à des circonferences de grands cercles, cherchez le pole P du petit cercle ACX. Par le pole P & par l'extrêmité C du côté AC faites passer un arc PC de grand cercle; par le même pole & par l'autre extrêmité A du même côté AC faites passer un autre arc AP de grand cercle, ce qui n'est pas nécessaire dans cette figure, parce que l'arc AP est lui-même un arc de grand cercle; enfin par les deux extrêmitez A, C, faites passer un autre arc AOC de grand cercle. Cela fait, le triangle AOCP étant fait par trois arcs de grande circonference, vous sera connu par le Probleme précedent; de même le triangle ARCP étant fait par des circonferences qui passent par le pole du segment AX, vous sera aussi connu par le Corollaire du premier Probleme. Otant donc du triangle ARCP le triangle AOCP, le reste sera la valeur de la figure AOCR: d'autre part le triangle ZAOC étant fait par des circonferences de grands cercles, vous sera connu par le Probleme précedent, & la portion ZABZ vous sera connuë par le premier Probleme; ôtant donc de la portion ZABZ, le triangle ZAOC, le reste sera la valeur du triangle AOCB, & ajoûtant à ce triangle

la petite figure AOCR, vous aurez la valeur du triangle proposé ARCB.

De même pour connoître le triangle ACB (*Fig.* 257.), dont res deux côtez AC, BC, appartiennent à des grandes circonfelences, cherchez le pole P du petit cercle XZ, faites passer par ce pole, & par l'extrêmité B du côté AB l'arc PB de grand cercle par le même pole, & l'autre extrêmité A l'arc PA de grand cercle; enfin par les deux points A, B, l'arc AOB de grand cercle, le triangle PAOB fait par des arcs de grande circonference vous sera connu par le Probleme précedent, le triangle ARBP fait par de grandes circonferences qui passent par le pole du segment XZ, vous sera aussi connu par le Corollaire du premier Probleme; c'est pourquoi retranchant du triangle ARBP le triangle AOBP, le reste sera la figure AOBR. D'autre part le triangle CAOB fait par des arcs de grandes circonferences, vous sera connu; retranchant donc de ce triangle la figure AOBR, le reste sera la valeur du triangle cherché ACB.

En second lieu, si le triangle proposé ABC (*Fig.* 258.), a deux côtez AB, BC, qui appartiennent a des petites circonferences, cherchez le pole P de l'arc AZ, faites passer par ce pole & par l'extrêmité B du côté AB un arc PB de grand cercle, puis par ce même pole & par l'autre extrêmité A, un arc AP de grand cercle, ce qui n'est pas nécessaire ici, parce que l'arc AP appartient lui-même à une grande circonference, & enfin par les deux points A, B, un arc AOB de grande circonference. Cela fait, le triangle AOBP fait par trois grandes circonferences, vous sera connu, & le triangle A*m*BP fait par deux circonferences, qui passent par le pole P du segment AZ, vous sera aussi connu; ôtant donc du triangle A*m*BP, le triangle AOBP, le reste sera la figure A*m*BO. D'autre part cherchez le pole Q du petit cercle XC; faites passer par ce pole, & par l'extrêmité du côté BC l'arc QB de grand cercle, & par les deux extrêmitez B, C, l'arc BIC de grand cercle; le triangle QBIC fait des grandes circonferences, vous sera connu, de même que le triangle QB*n*C, fait par deux grandes circonferences qui passent par le pole Q du segment XC; ôtant donc le grand du petit, le reste sera la figure BICN. Or le triangle BOACIB fait par des grandes circonferences, vous sera connu; ajoûtant donc à ce triangle la figure A*m*BO, & la figure BIC*n*, la somme sera le triangle demandé ABC.

De même pour mesurer le triangle ABC (*Fig.* 259.), dont

les deux côtez AC, BC, appartiennent à des petites circonferences, cherchez le pole P du petit cercle XZ, & faites paſſer par ce pole, & par les extrêmitez, A, C, du côté AC deux arcs PA, PC, de grands cercles, & par les mêmes extrêmitez A, C, un arc AOC de grand cercle. Les triangles APCO, APCI, vous ſeront aiſément connus par les raiſons que nous en avons déja rapportées pluſieurs fois; donc la figure AICO, qui eſt leur difference, vous ſera connuë. Cherchez le pole Q du ſegment VT, & faites paſſer par ce pole & par les deux extrêmitez B, C, du côté BC, des arcs QB, QC, de grands cercles, & par les mêmes extrêmitez un arc B*m*C auſſi de grand cercle; les deux triangles B*m*CQ, B*n*CQ, vous ſeront connus par les Problemes précedens, & par conſéquent vous connoîtrez la figure B*m*C*n*, qui eſt leur difference; or le triangle BMCOA étant fait par trois grandes circonferences, ſe peut connoître aiſément; ôtant donc de ce triangle la figure AOCI, & lui donnant la figure B*m*C*n*, vous aurez la valeur du triangle demandé ABC.

En troiſiéme lieu, ſi le triangle ABC (*Fig.* 260.), eſt compoſé de trois côtez qui appartiennent à des petites circonferences, vous chercherez les trois poles P, Q, X, des trois petits cercles, & faiſant la même conſtruction ſur les trois côtez que nous avons faite ci-devant ſur un & ſur deux, les petites figures AOBI, B*m*C*n*, C*t*Ar, vous ſeront facilement connnuës de même que le triangle BOA*t*C*m*B; c'eſt pourquoi retranchant de ce triangle les figures AOBI, C*t*Ar, & lui donnant la figure B*m*C*n*, vous aurez la valeur du triangle propoſé ABC.

### COROLLAIRE.

250. Toute figure de pluſieurs côtez faite ſur la ſurface de la ſphere par l'interſection de pluſieurs circonferences, pouvant ſe diviſer en deux ou pluſieurs triangles ſpheriques par des arcs qui les coupent diagonalement, on les meſurera de la même façon; d'où il ſuit qu'il n'eſt point de portion de ſurface ſpherique qu'on ne puiſſe meſurer par la méthode que nous venons de donner.

## *De quelques uſages du Compas de proportion, dont il eſt parlé dans cet Ouvrage.*

Le Compas de proportion eſt compoſé de deux lames de cuivre ou d'argent, qui tournent autour d'une charniere (*Fig.*

246.). Du centre O de la charniere on a tiré de part & d'autre le long des lames plusieurs lignes, dont les unes s'appellent *lignes de parties égales*, parce qu'elles sont divisées en plusieurs petites parties toutes égales entr'elles; les autres *lignes*, des cordes, parce qu'on y a porté les cordes d'un demi-cercle depuis celle d'un degré jusqu'à celles de 180 qui est le diametre; d'autres s'appellent *lignes des polygones*, parce qu'on y a porté les côtez des polygones inscrits dans un cercle depuis le triangle jusqu'au dodécagone; d'autres s'appellent *lignes des plans*, parce qu'on y a porté les côtez homologues de plusieurs plans semblables, qui sont entr'eux comme les nombres 1. 2. 3. 4. &c. jusqu'à 64. & enfin d'autres s'appellent *lignes des solides*, parce qu'on y a porté les côtez de plusieurs solides semblables, qui sont entr'eux comme les mêmes nombre 1. 2. 3. 4. &c. jusqu'à 64.

Comme il n'y a pas long-tems qu'on a fait une nouvelle Edition du compas de proportion de Monsieur Ozanam, qui se vend à Paris chez Jombert, Libraire ruë Saint Jacques, je n'expliquerai ici que deux usages de cet instrument, dont j'ai parlé dans cet Ouvrage. Le premier regarde l'inscription des polygones dans un cercle; & le second, la maniere de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

### *Inscrire un polygone dans un cercle donné.*

Soit le cercle donné ABCDE (*Fig.* 247.), je prends la grandeur de son rayon OC avec le compas ordinaire; puis j'ouvre le compas de proportion jusqu'à ce que la pointe du compas ordinaire étant mise sur le point marqué 6 de la ligne des polygones, l'autre pointe du compas ordinaire tombe sur l'autre point 6, marqué sur l'autre jambe du compas de proportion. Cela fait, & le compas de proportion restant dans cet ouverture, si l'on veut inscrire un pentagone au cercle, je prends avec le compas ordinaire la distance du point 5 au point 5 de la ligne des polygones, & je porte cette distance autour de la circonference du cercle de A en B, de B en C, & tirant les droites AB, BC, &c. j'ai le pentagone demandé; & si on avoit demandé un eptagone, j'aurois pris la distance du point 7 au point 7, & ainsi des autres.

Pour montrer la raison de cette operation, supposons que l'angle SRT soit l'angle fait par les deux lignes des polygones à l'ouverture du compas de proportion que nous avons faite pour pren-

dre la distance des points 6, 6, égale au rayon OC du cercle, la ligne R6 est par la construction du compas de proportion, le côté de l'exagone, ou le rayon du cercle dont on s'est servi pour transporter sur la ligne RS les côtez des polygones inscrits à ce cercle, & la ligne R5 est le côté du pentagone inscrit à ce même cercle; or ce cercle est semblable au cercle proposé ABCD, &c. car tous les cercles sont semblables. Donc le rayon R6 du cercle de compas de proportion est au rayon du cercle ABCD, &c. comme le côté R5 du pentagone inscrit au cercle du compas est au côté du pentagone que je cherche; donc puisque les trois termes de cette proportion sont connus, le quatriéme se connoîtra facilement par la regle de proportion; or c'est cette regle même que l'on fait par l'operation ci-dessus: car à cause des bases paralleles 66, 55, on a R6. 66 :: R5. 55. mais 66 = OC. donc R6. CO :: R5. 55. & par conséquent 55 ou AB, est le côté du pentagone demandé.

Que si on connoissoit le côté AB du pentagone, & qu'on voulût connoître le rayon OC, on prendroit avec le compas ordinaire la grandeur AB, & portant l'une de ses pointes sur le point 5, on ouvriroit le compas de proportion jusqu'à ce que l'autre pointe tombât sur l'autre point 5 marqué sur l'autre jambe; après quoi on prendroit avec le compas ordinaire la distance des points 6, 6, laquelle seroit le rayon cherché, ce qui se démontre comme ci-dessus.

## *Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données AB, GH.*

Prenez avec le compas ordinaire la grandeur AB de la premiere ligne, & portez-la sur la ligne des parties égales en mettant l'une des pointes sur le centre de la charniere, & laissant tomber l'autre pointe sur l'une des jambes pour sçavoir combien elle contient de parties égales; supposé donc qu'elle en contienne 45, portez la pointe du compas sur le point 45 de la ligne des solides, & ouvrez le compas de proportion jusqu'à ce que l'autre pointe tombe sur l'autre point 45, marqué sur l'autre jambe. Cela fait, & le compas de proportion restant ainsi ouvert, prenez avec le compas ordinaire la ligne GH, & cherchez sur la ligne des parties égales pour sçavoir combien elle contient de parties, & supposé qu'elle en contienne 20, prenez avec le compas la distance

20, 20, de la ligne des solides, & cette distance sera la premiere des deux moyennes proportionnelles, après quoi il ne restera plus qu'à prendre une moyenne proportionnelle EF entre la ligne trouvée CD, & la petite GH.

Pour comprendre ceci, considerez que les quatre lignes AB, CD, EF, GH, doivent être en proportion continuë; d'où il suit que le cube de AB doit être au cube de CD comme AB est à GH, ou comme 45 à 20. Or c'est ce que l'operation que nous venons d'enseigner, fait trouver; car supposant que l'angle RST représente l'ouverture que nous avons donnée au compas de proportion, pour faire que la distance de 45 à 45, fût égale à AB, les droites S45, 520, sont les côtez homologues de deux solides semblables, qui sont entr'eux comme 45 à 20; donc les cubes de ces droites sont entr'elles comme ces solides, c'est-à-dire comme 45 à 20. Or à cause des triangles semblables, on a $\overline{S45}^{3}.\overline{45}^{3}::\overline{S20}^{3}.\overline{20}^{3}$ donc $\overline{S45}^{3}.\overline{45}^{3}::\overline{S20}^{3}.\overline{20}^{3}$ & comme $45.45=AB$, & $20.20=DC$, on a $\overline{S45}^{3}.\overline{AB}^{3}::\overline{S20}^{3}.\overline{DC}^{3}$ ou permutant $\overline{S45}^{3}.\overline{S20}^{3}::\overline{AB}^{3}.\overline{DC}^{3}$, & par conséquent $\overline{AB}^{3}.\overline{DC}^{3}::45.20$.

*FIN.*

## *APPROBATION.*

J'Ai lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit intitulé : *La Theorie & la Pratique du Geometre ;* l'Auteur a cherché à réunir en un seul Ouvrage ce qui se trouvoit répandu dans plusieurs : le Lecteur jugera du bon choix par la comparaison des autres. Fait à Paris ce 20. Aoust 1738. MONTCARVILLE.

## *PRIVILEGE DU ROY.*

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE : à nos amez & feaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT, notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT notre Libraire ordinaire pour notre Artillerie & le Genie, & Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il souhaiteroit faire imprimer & donner au Public *l'Arithmétique des Géometres & le parfait Ingénieur François*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires; offrant pour cet effet de faire imprimer lesdits Ouvrages ci dessus exposés, en bon papier & beaux caracteres, suivant la feüille imprimée & attachée pour modele sous le Contre-Scel des Présentes : A CES CAUSES, Voulant favorablement traiter ledit Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer lesdits Ouvrages cy-dessus spécifiés, en un ou plusieurs Volumes, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de six années consécutives, à compter du jour de l'expiration du précedent Privilege. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression Etrangere dans aucun lieu de notre obéissance, comme aussi à tous Libraires-Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages ci-dessus exposés, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression desdits Ouvrages sera

faite dans notre Royaume, & non ailleurs; & que l'Impétrant se conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du dixiéme Avril mil sept cens vingt-cinq, & qu'avant que de l'exposer en vente les Manuscrits ou Imprimés, qui auront servi de Copie à l'impression desdits Livres, seront remis dans le même état, où les Approbations auront été données, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons, de faire jouir l'Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la Copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenuë pour duëment signifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos amés & feaux Conseillers & Sécretaires, foy soit ajoutée comme à l'Original. COMMANDONS au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'éxécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires. CAR tel est notre plaisir. DONNE' à Paris le vingt-troisiéme jour du mois d'Aoust, l'an de grace mil sept cens trente-sept, & de notre Régne le vingt-deuxiéme. Par LE ROY en son Conseil. SAINSON.

*Registré sur le Registre IX. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, Num. 518. Fol. 484. conformément aux anciens Reglemens, confirmés par celui du vingt-huit Février mil sept cens vingt-trois. A Paris le trente-uniéme Aoust mil sept cens trente-sept.*

*Signé*, LANGLOIS, *Syndic.*

De l'Imprimerie de J. CHARDON.

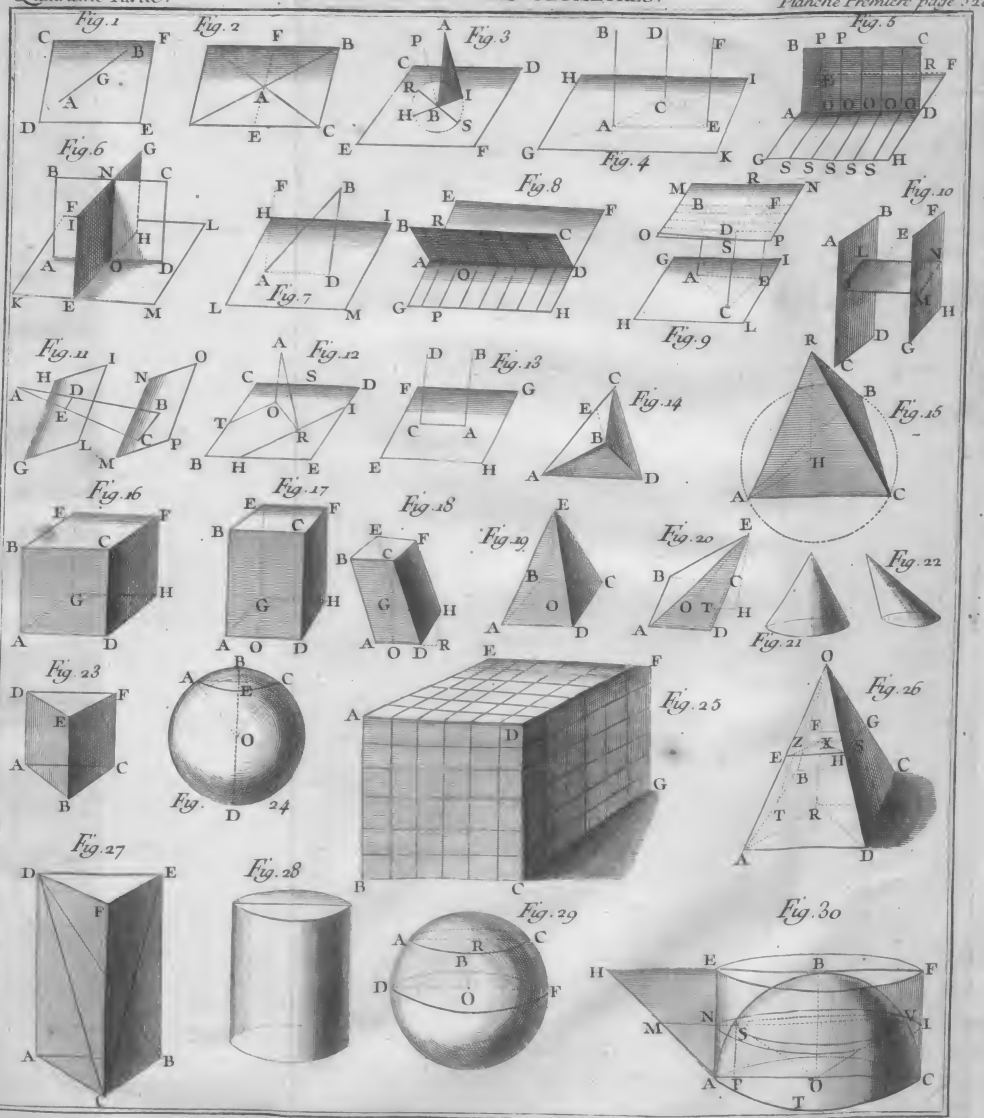


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30

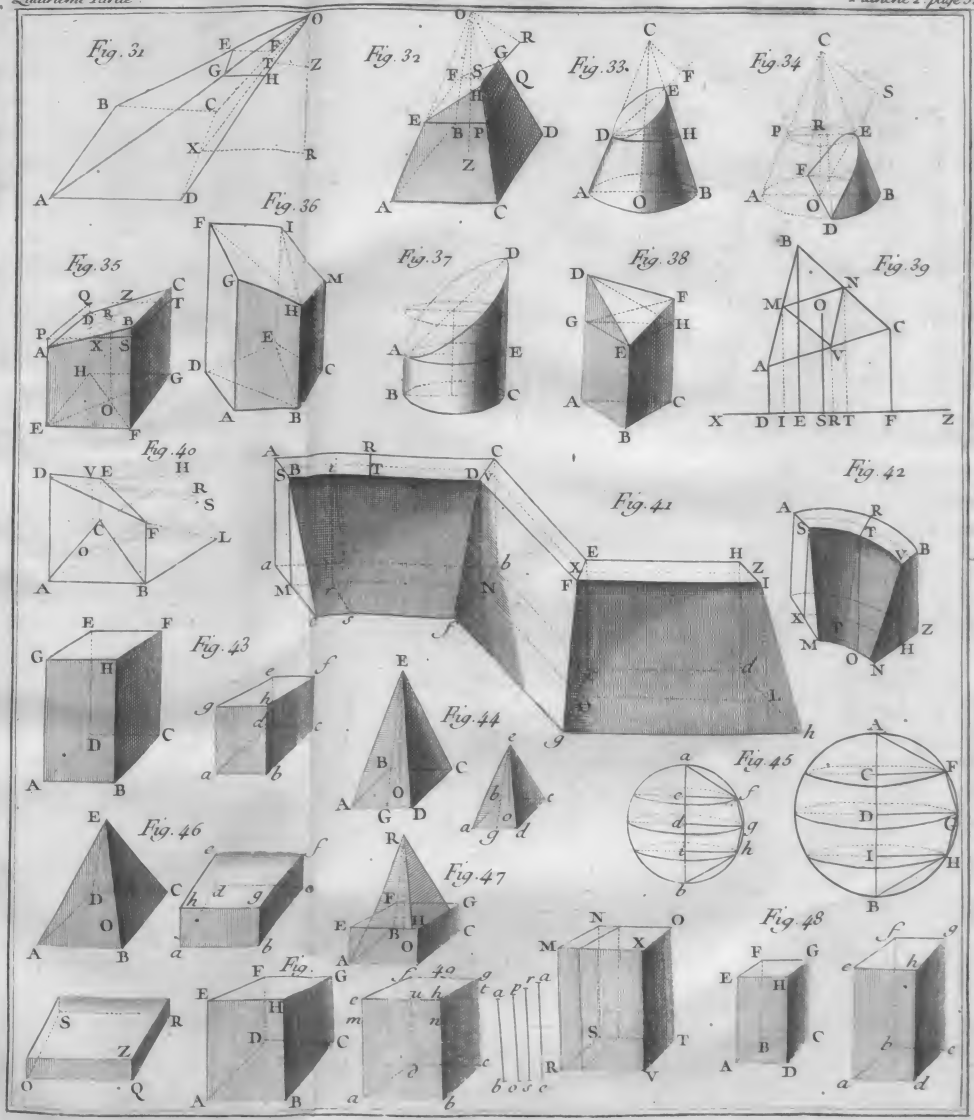


Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33.
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 45
Fig. 46
Fig. 47
Fig. 48

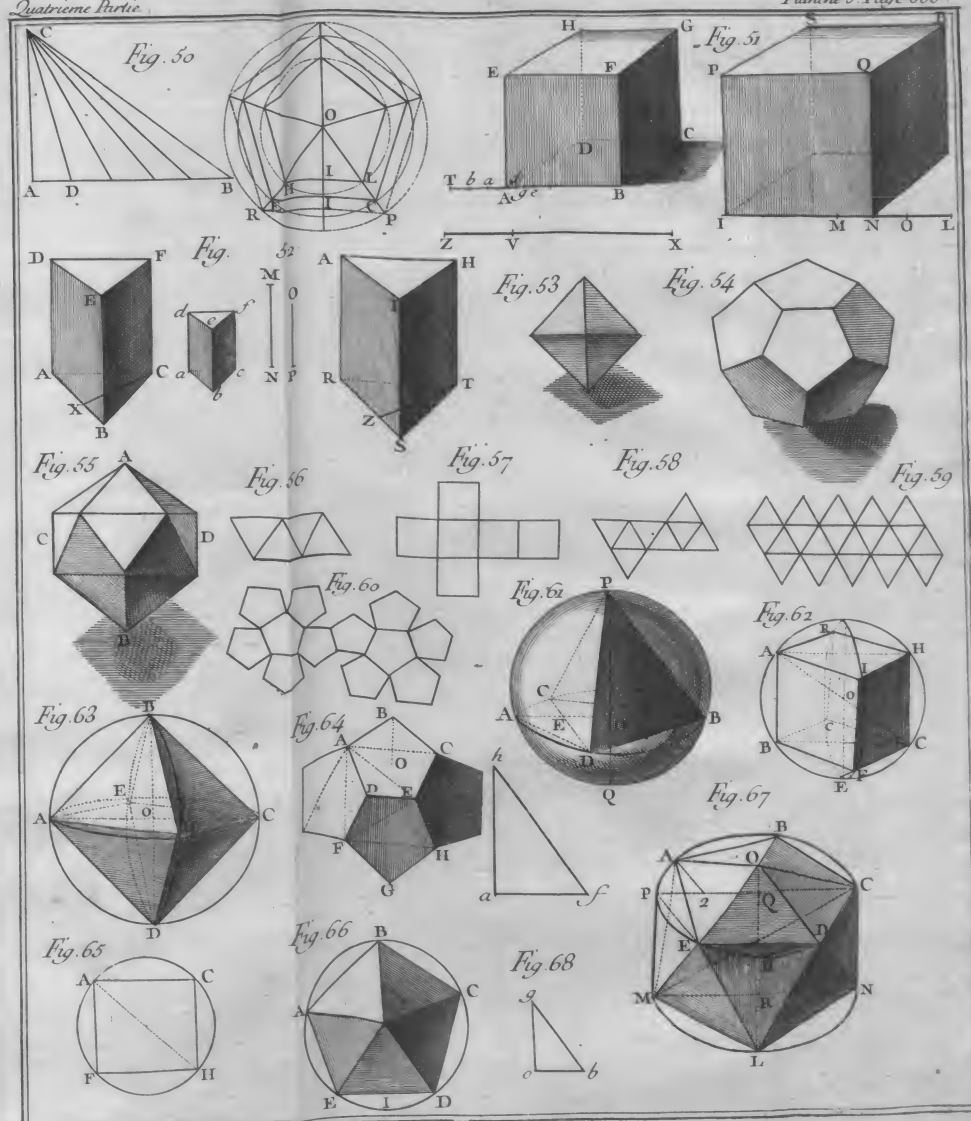


Fig. 50
Fig. 51
Fig. 52
Fig. 53
Fig. 54
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60
Fig. 61
Fig. 62
Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68

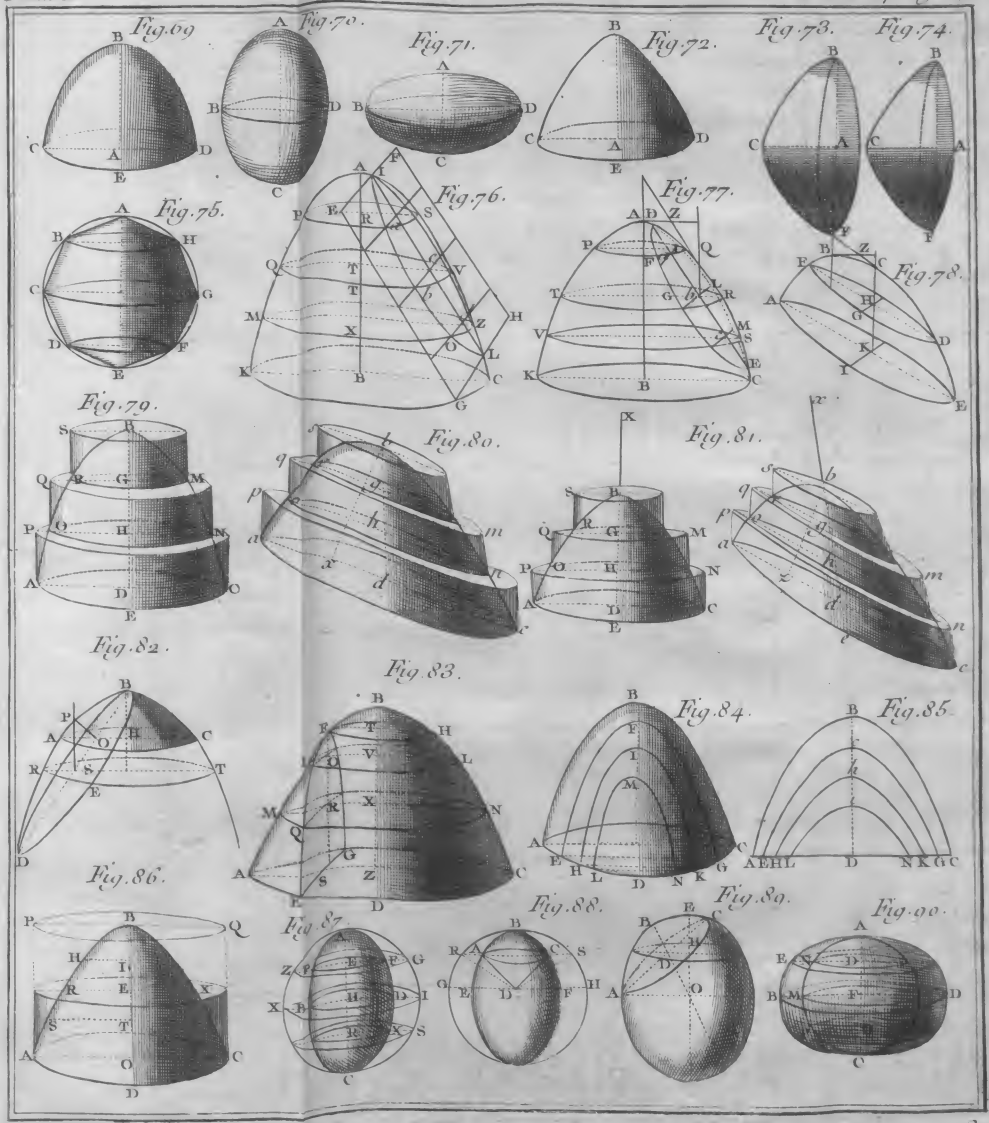


Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.

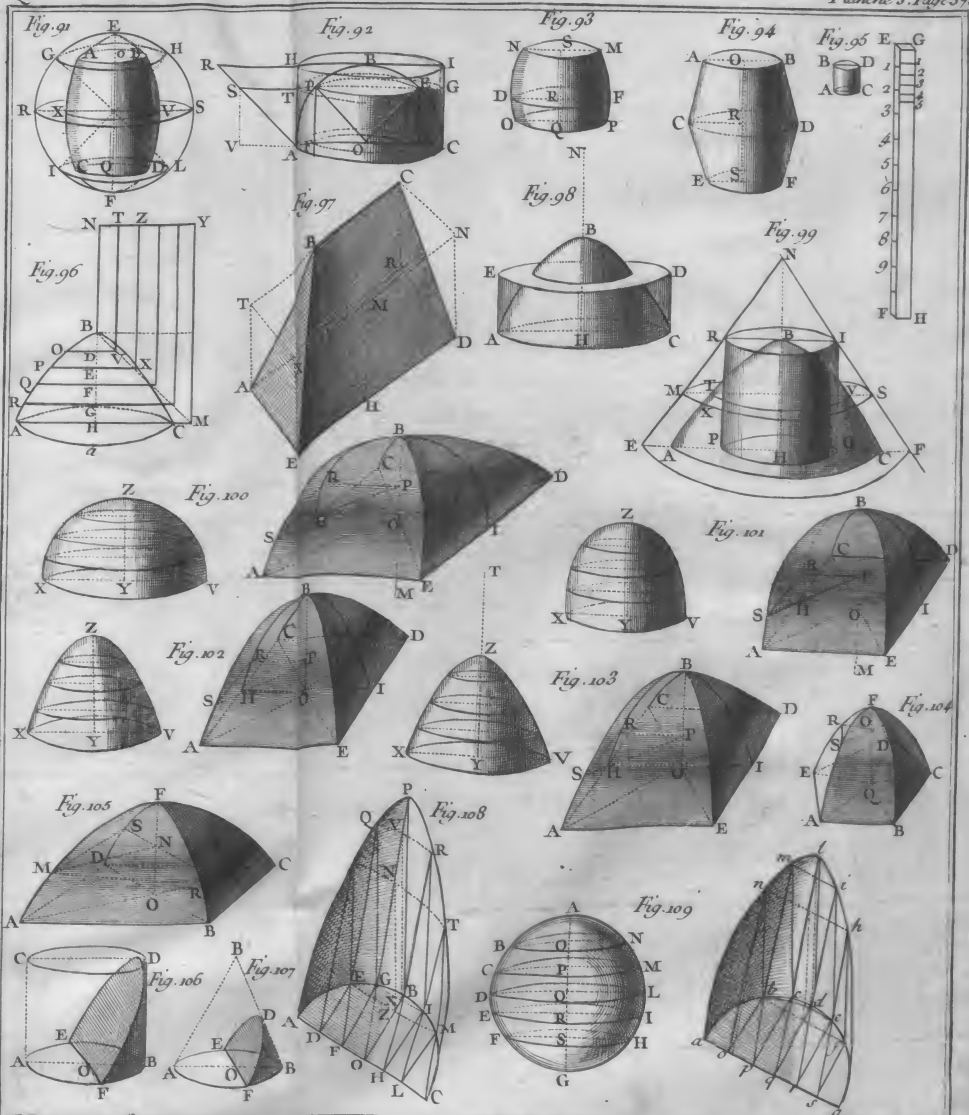


Fig. 91
Fig. 92
Fig. 93
Fig. 94
Fig. 95
Fig. 96
Fig. 97
Fig. 98
Fig. 99
Fig. 100
Fig. 101
Fig. 102
Fig. 103
Fig. 104
Fig. 105
Fig. 106
Fig. 107
Fig. 108
Fig. 109

Fig. 110.

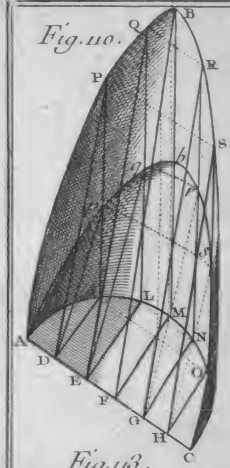


Fig. 111.

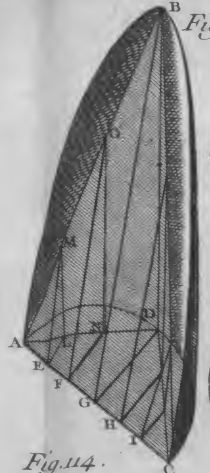


Fig. 112.

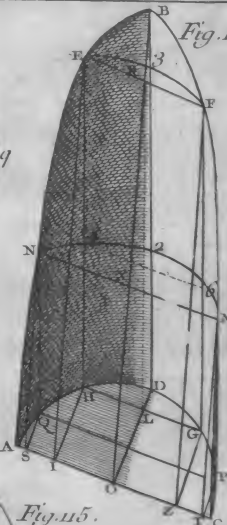


Fig. 113.

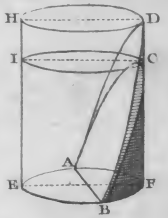


Fig. 114.

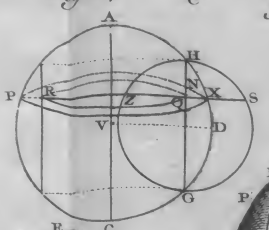


Fig. 115.

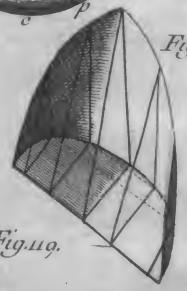


Fig. 116.

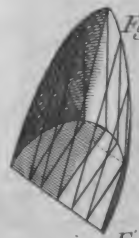


Fig. 117.

Fig. 118.

Fig. 119.

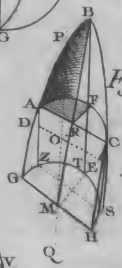


Fig. 120.

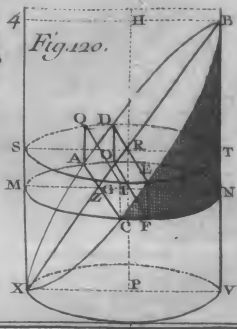


Fig. 121.

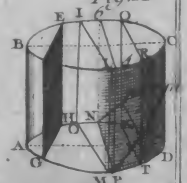


Fig. 122.

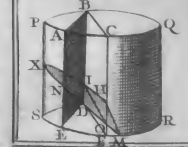


Fig. 123.

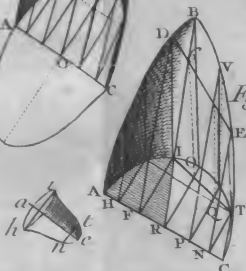


Fig. 124.

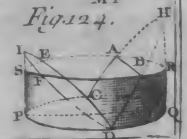


Fig. 125

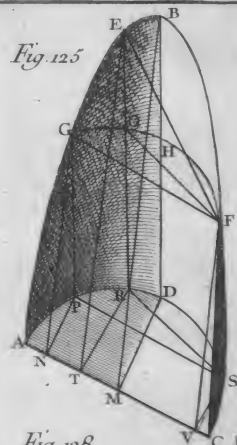


Fig. 126

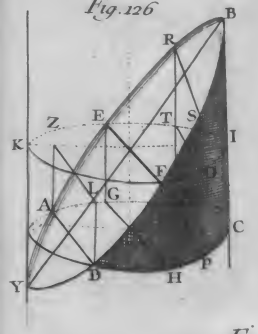


Fig. 127

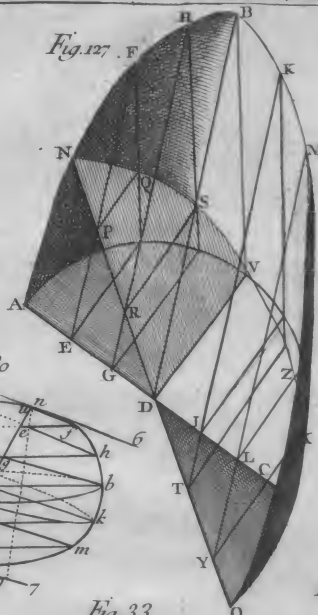


Fig. 128

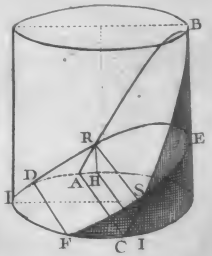


Fig. 129

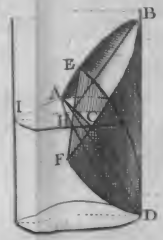


Fig. 130

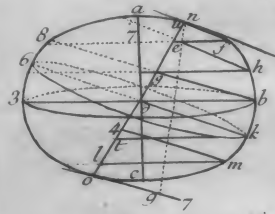


Fig. 131

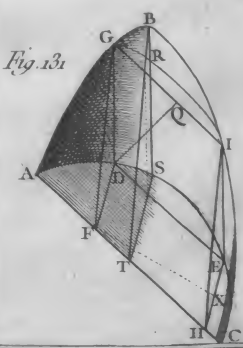


Fig. 32

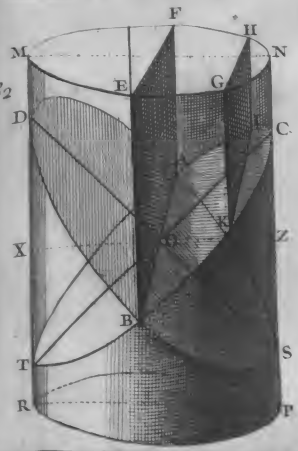


Fig. 33

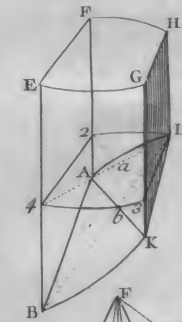


Fig. 34

Fig. 135

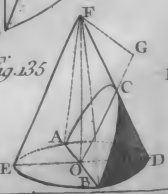


Fig. 136

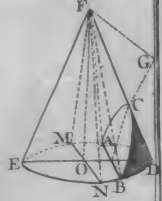


Fig. 137.

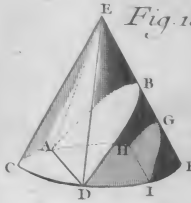



Fig. 138.

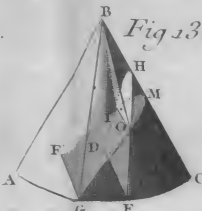



Fig. 139.

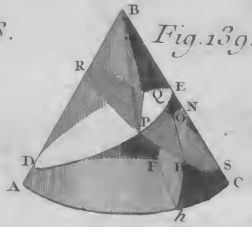



Fig. 140.

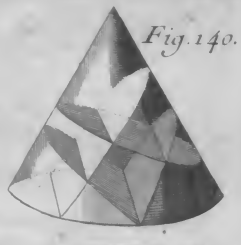


Fig. 141.

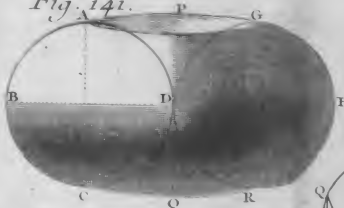



Fig. 142.

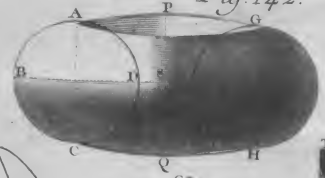



Fig. 143.

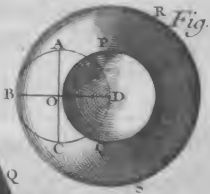



Fig. 144.

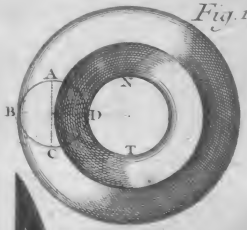



Fig. 145.

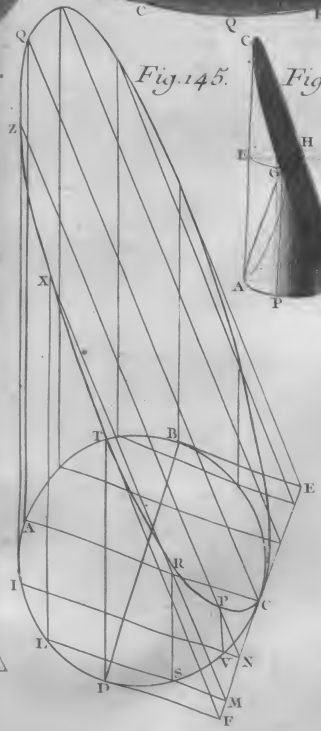



Fig. 146.

Fig. 147.

Fig. 148.

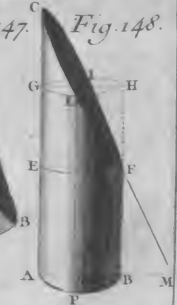



Fig. 149.

Fig. 150.

Fig. 151.

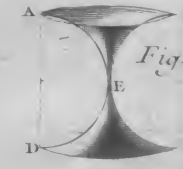
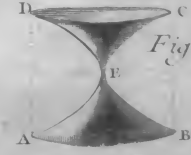



Fig. 152.



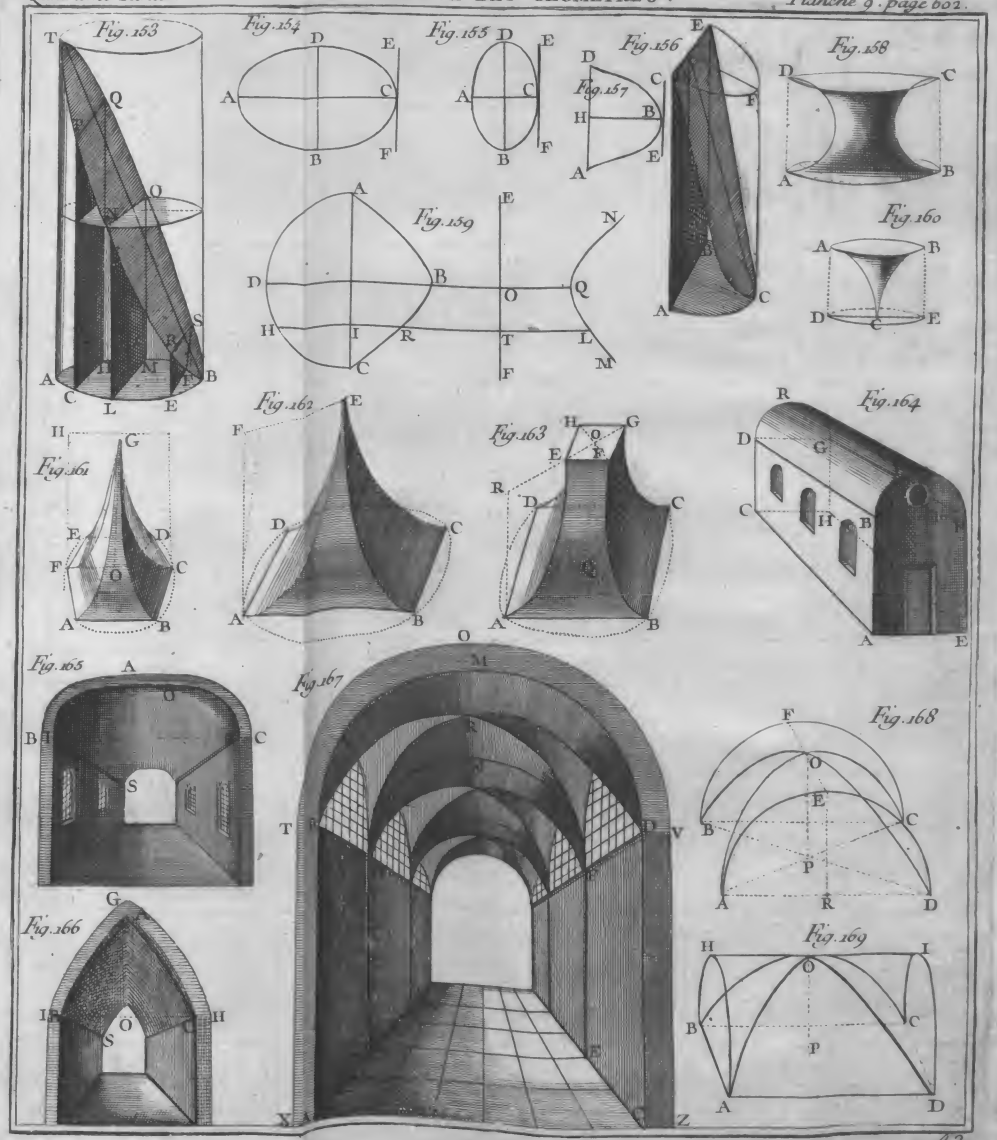


Fig. 153
Fig. 154
Fig. 155
Fig. 156
Fig. 157
Fig. 158
Fig. 159
Fig. 160
Fig. 161
Fig. 162
Fig. 163
Fig. 164
Fig. 165
Fig. 166
Fig. 167
Fig. 168
Fig. 169

Fig. 170.

Fig. 171.

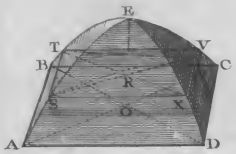
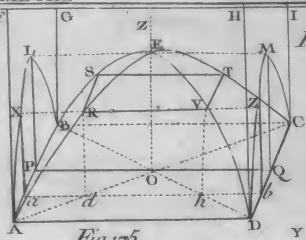


Fig. 172.



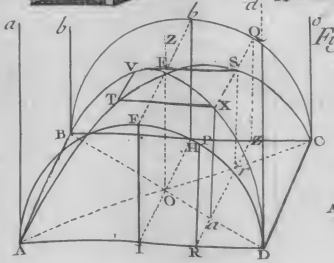


Fig. 173.

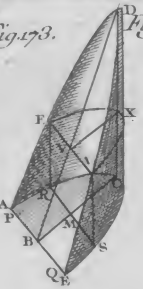


Fig. 174.

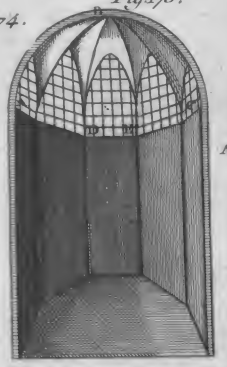


Fig. 175.

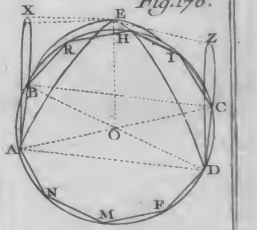


Fig. 176.

Fig. 177.

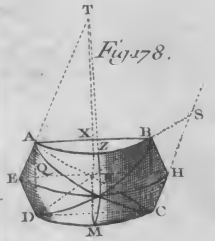


Fig. 178.

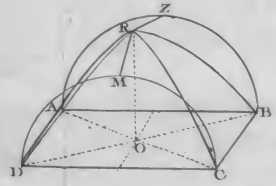


Fig. 179.

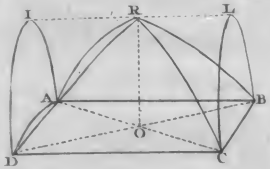


Fig. 180.

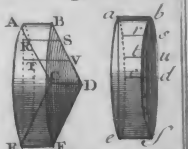


Fig. 183.

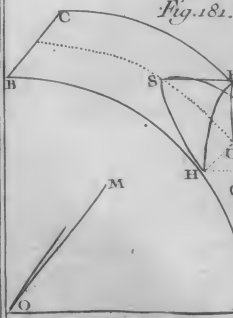


Fig. 181.

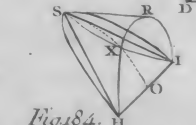


Fig. 182.

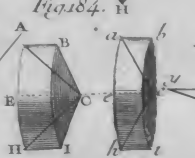


Fig. 184.

Fig. 185.

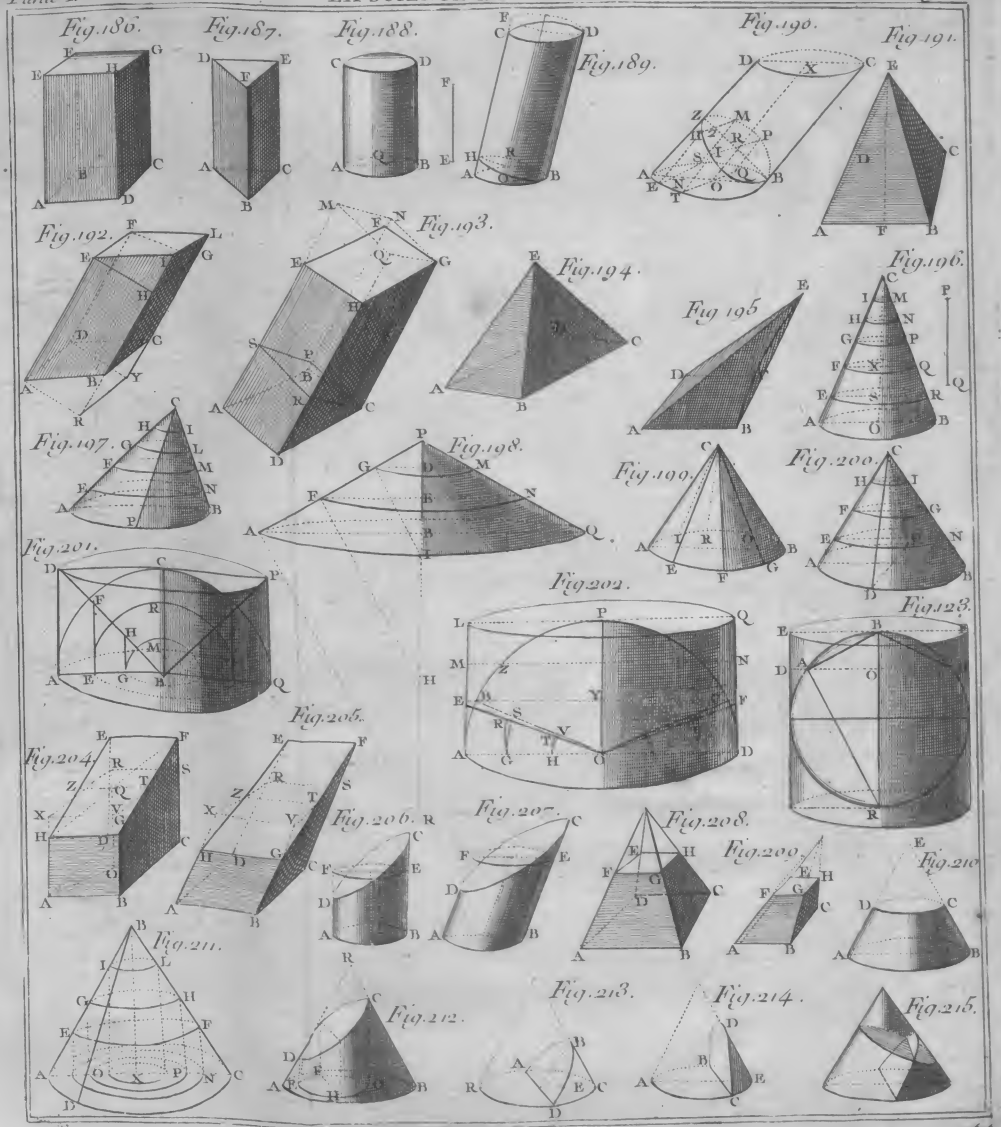


Fig. 186.
Fig. 187.
Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.
Fig. 192.
Fig. 193.
Fig. 194.
Fig. 195
Fig. 196.
Fig. 197.
Fig. 198.
Fig. 199.
Fig. 200.
Fig. 201.
Fig. 202.
Fig. 203.
Fig. 204.
Fig. 205.
Fig. 206.
Fig. 207.
Fig. 208.
Fig. 209.
Fig. 210
Fig. 211.
Fig. 212.
Fig. 213.
Fig. 214.
Fig. 215.

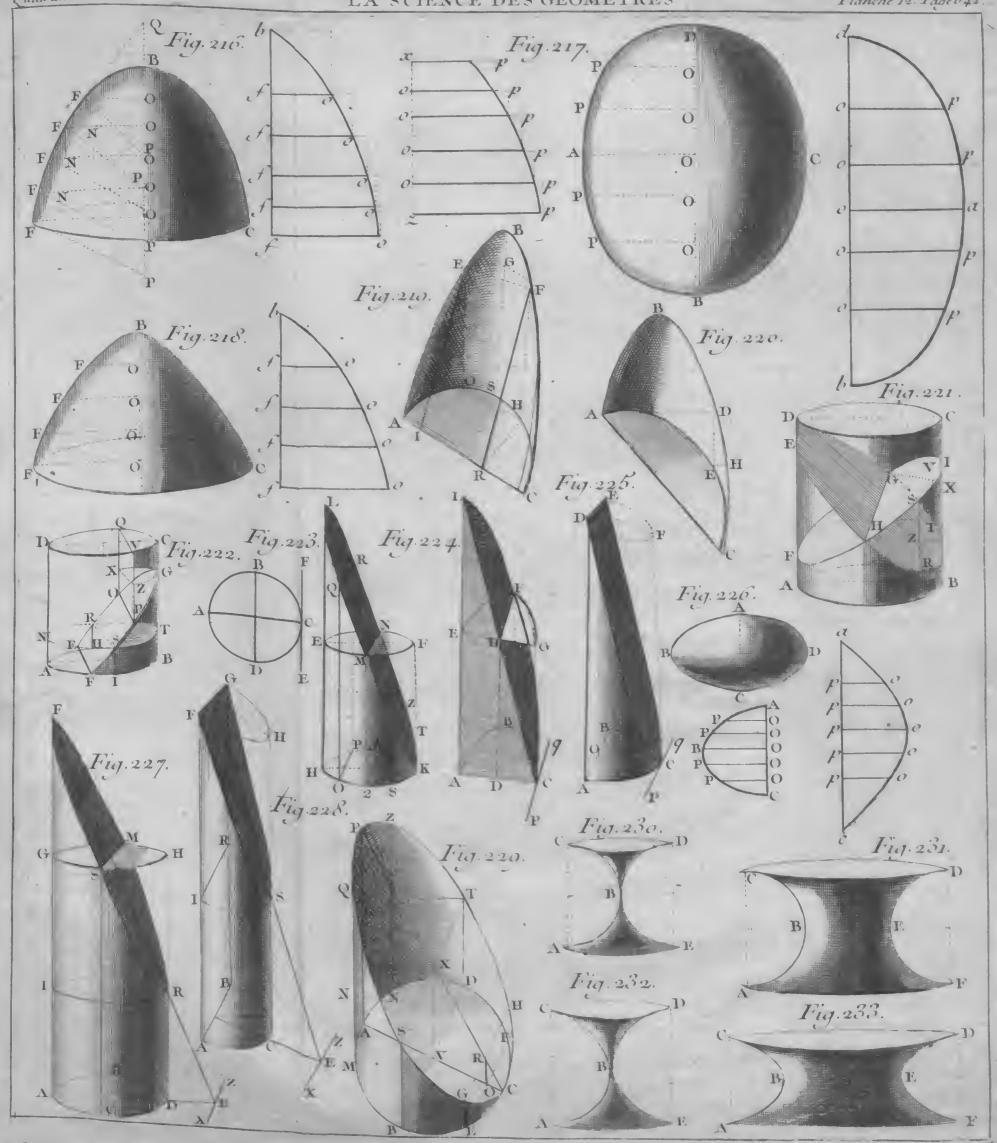


Fig. 216.
Fig. 217.
Fig. 218.
Fig. 219.
Fig. 220.
Fig. 221.
Fig. 222.
Fig. 223.
Fig. 224.
Fig. 225.
Fig. 226.
Fig. 227.
Fig. 228.
Fig. 229.
Fig. 230.
Fig. 231.
Fig. 232.
Fig. 233.

Fig. 234.

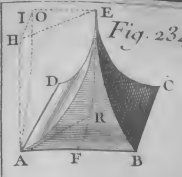



Fig. 235.

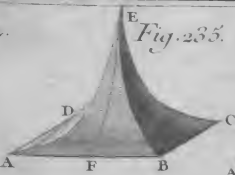



Fig. 236.

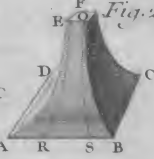



Fig. 237.

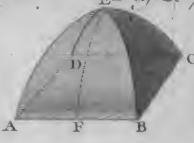



Fig. 238.

Fig. 239.

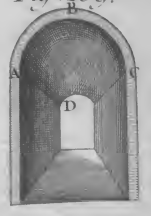



Fig. 240.

Fig. 241.

Fig. 242.

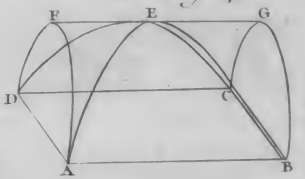



Fig. 243.

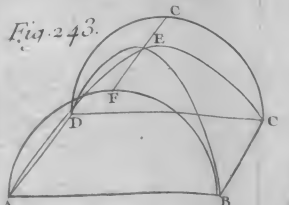



Fig. 244.

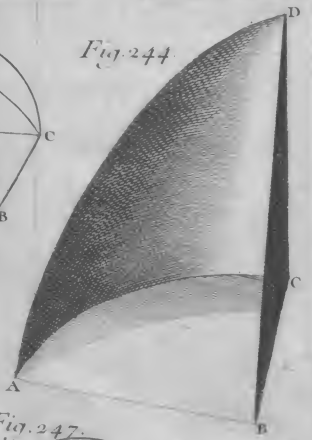



Fig. 245.

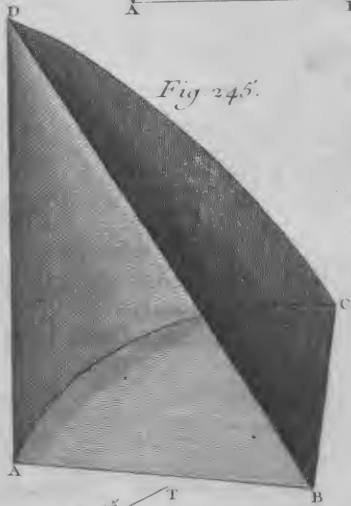



Fig. 246.

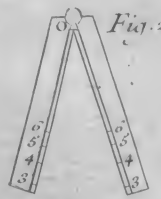



Fig. 247.

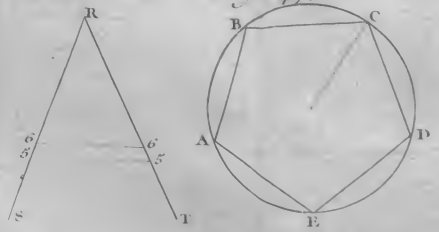
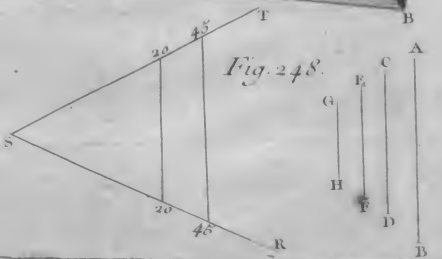



Fig. 248.



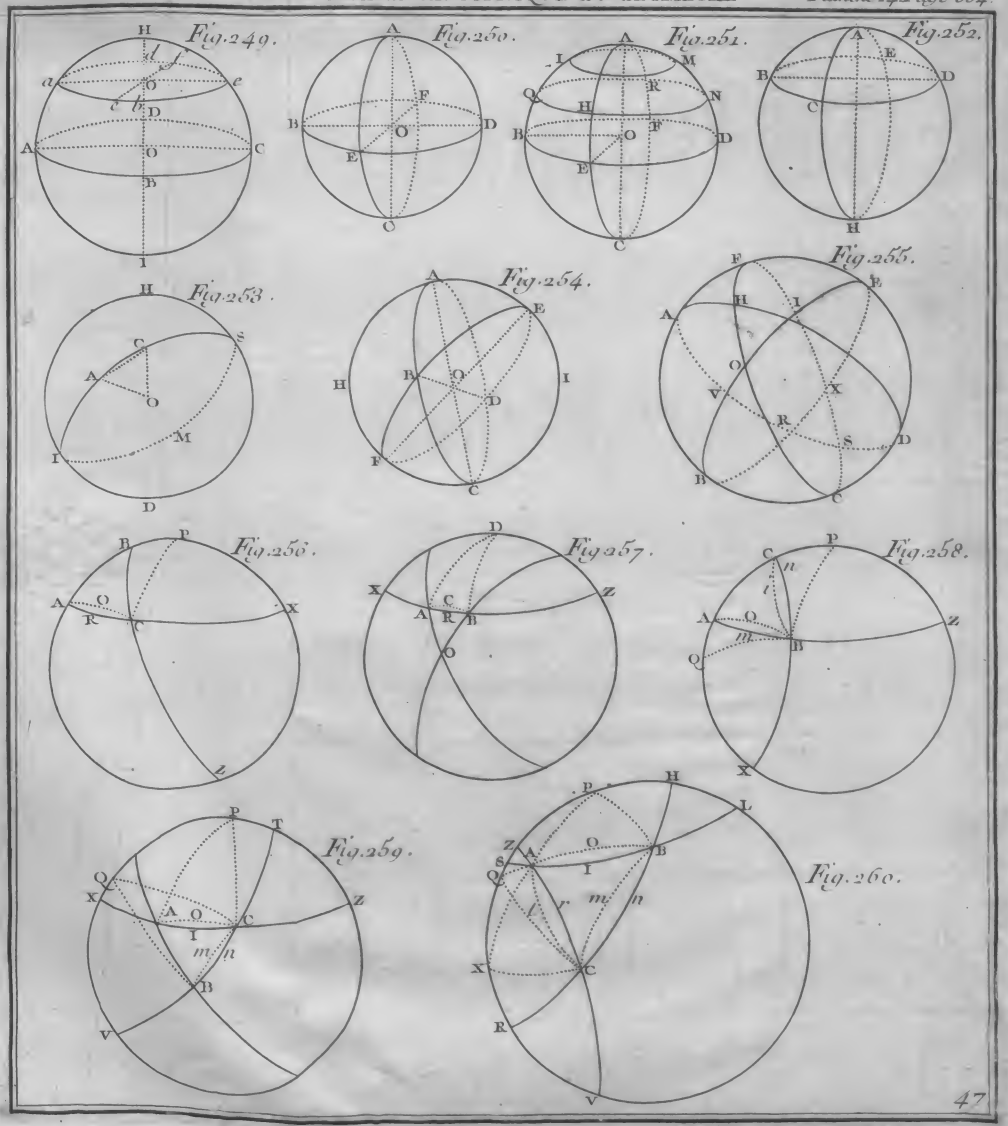


Fig. 249.
H
a
e
O
D
A
C
I
Fig. 250.
A
F
B
D
O
E
C
Fig. 251.
A
M
I
R
Q
N
H
B
O
P
D
E
C
Fig. 252.
A
E
B
D
C
H
Fig. 253.
H
C
S
A
O
M
I
D
Fig. 254.
A
E
H
B
O
I
D
F
C
Fig. 255.
F
E
I
H
A
O
V
X
R
S
D
B
C
Fig. 256.
B
P
A
O
R
C
X
Z
Fig. 257.
D
X
C
Z
A
R
B
O
Fig. 258.
P
C
n
l
A
O
Z
m
B
Q
X
Fig. 259.
P
T
Q
X
A
O
C
Z
I
m
n
B
V
Fig. 260.
P
H
L
Z
A
O
B
S
Q
C
I
r
m
n
X
C
R
V

# TABLE
## DES SECTIONS
### PREMIERE PARTIE.

*Des propriétés des lignes.*


SECTION I. *Définitions & Axiomes*, page 1
SECTION II. *Des lignes droites & des perpendiculaires*, 5
SECTION III. *Des lignes paralleles*, 14
SECTION IV. *De la ligne circulaire*, 17
SECTION V. *Des angles & de leurs proprietés*, 36
SECTION VI. *Du triangle considéré par rapport aux lignes & aux angles qui le composent*, 55
SECTION VII. *Des figures planes considerées par rapport à leurs côtez & à leurs angles*, 64
SECTION VIII. *Des operations de l'Arithmetique sur les lignes*, 76
SECTION IX. *Des puissances des lignes*, 84
SECTION X. *Des raisons, proportions & progressions Géometriques des lignes*, 88
SECTION XI. *De la maniere d'inscrire les figures dans le cercle, & de les circonscrire autour d'un cercle*, 134
SECTION XII. *De la Trigonometrie*, 158
SECTION XIII. *De la Longimetrie*, 176
SECTION XIV. *Du Nivellement*, 186


### SECONDE PARTIE.

*Des proprietés des surfaces planes.*


SECTION I. *De la Planimetrie, ou mesure des surfaces*, 197
SECTION II. *Des rapports composés des surfaces*, 222
SECTION III. *Des changemens des figures, & de leur réduction de petit en grand, & de grand en petit*, 241
SECTION IV. *Suite de la Planimetrie*, 252

SECTION V. *Des figures isoperimetres*, 264
SECTION VI. *De la Géodesie, ou division des Champs*; 279
SECTION VII. *De la méthode des indivisibles des raisons, proportions & progressions Arithmetiques, & de l'Arithmetique des infinis par rapport à la Géometrie*, 320

## TROISIEME PARTIE.

### *Des proprietés des Sections Coniques, de la Spirale, & de la Cycloïde.*

SECTIONS I. *Définitions & proprietés principales des Sections Coniques considerées dans le cone*, 340
SECTION II. *De la parabole considerée hors du cone*, 348
SECTION III. *De l'Ellipse considerée hors du cone*, 382
SECTION IV. *De l'hyperbole considerée hors du cone*, 411
SECTION V. *De la Spirale & de la Cycloïde*, 440
*Addition aux Sections Coniques*, 486

## QUATRIEME PARTIE.

### *Des proprietés des corps, & de leurs surfaces.*

SECTION I. *Des differentes positions des lignes à l'égard des plans, & de celles des plans entr'eux*, 500
SECTION II. *De la Stereometrie, ou mesure des corps*, 509
SECTION III. *Des rapports composés des solides, de leur changement, & de leur reduction*, 530
SECTION IV. *Suite de la Stereometrie*, 541
*Des Conoïdes*, 551
*Des Onglets*, 573
*Des corps annulaires*; 590
*De la mesure des Voutes*; 599
SECTION V. *Des surfaces des solides*, 615
*De la projection & des parties de projection*; 631
*De la mesure des differentes parties de la surface spherique*, 643
*De quelques usages du Compas de proportion*, 651

Fin de la Table.

*On trouve chez* CHARLES-ANTOINE JOMBERT *les Livres qui suivent.*

ARchitecture de Palladio, où l'on traite des cinq Ordres, des Temples, des Bâtimens publics, des Escaliers, des Ponts, des grands Chemins & des autres Edifices des Anciens, traduit par Jean Leoni, avec les belles figures de Bernard Picart, nouvelle Edition, *in-folio*, en deux vol. grand papier, à la Haye 1726. 60 liv.

Architecture de Scamozzy, contenant les regles des cinq Ordres, avec la description de plusieurs Maisons publiques & particulieres, suivant la maniere des Anciens; le tout enrichi de plusieurs beaux Edifices de Rome, *in-folio*, la Haye. 18 liv.

Maniere de dessiner les cinq Ordres & les parties qui en dépendent, d'après l'antique, par Ab. Bosse, *in-folio*, en plus de cent Planches. 15 liv.

L'Art de bien bâtir, par M. le Muet, Architecte du Roy, *in-folio*, en cent Planches. 12. liv.

Les Oeuvres d'Architecture d'Antoine le Pautre, Architecte du Roy, contenant la description de plusieurs Châteaux, Eglises, Portes de Ville, Fontaines, &c. de la composition de l'Auteur, *in-folio*, avec soixante Planches. 15 liv.

Traité de Perspective pratique avec des remarques sur l'Architecture en général, par M. Courtonne, Architecte du Roy, *in-folio*, avec quantité de Planches. 12. liv.

Architecture Moderne, ou l'Art de bien bâtir pour toutes sortes de personnes, *in-quarto*, deux volumes, grand papier, avec cent cinquante Planches qui représentent les Plans & Elévations de 60 distributions differentes. 30 liv.

De la Décoration extérieure & intérieure des Edifices modernes, & de la distribution des Maisons de Plaisance, Ouvrage dans lequel on trouvera un détail exact de tout ce qui a rapport à la distribution des Parcs & Jardins de propreté; au Jardinage; à la Sculpture, à la Serrurerie, à la Menuiserie, & à la Décoration des Appartemens de parade: par Jacques-François Blondel. Enrichi de Vignettes, Lettres grises, Fleurons & Culs de Lampe, exécutés par les plus habiles Graveurs; & de 155 Planches dessinées & gravées dans la derniere perfection, deux vol. *in-quarto*, grand papier. 42 liv.

Traité de Stereotomie, ou la théorie & la pratique de la coupe des pierres & des bois, par M. Frezier, Ingenieur en chef à Landau, *in-quarto*, en trois vol. avec quantité de figures, Strasbourg 1738. 40 liv.

Nouveau Cours de Mathématiques appliqué à l'usage de la Guerre, par M. de Belidor, Commissaire Provincial d'Artillerie, & Professeur Royal de Mathématique à l'Ecole de la Fére, *in-quarto*, 1725. avec 34. Planches qui restent. 15 liv.

*Idem.* La Science des Ingenieurs dans la conduite des travaux de Fortification, & d'Architecture civile, *inquarto*, grand papier, avec 53. Planches. 24. liv.

*Idem, suite.* Architecture Hydraulique, ou l'art de conduire, d'élever &

de ménager les Eaux pour tous les besoins de la vie. Premiere partie, qui contient le détail des Pompes, Soupapes, Pistons, Rouës à eaux, Chapelets, & généralement de toutes les machines qui servent à élever l'eau soit par le moyen d'une chute ou d'un courant, soit par celui du vent ou du feu, soit enfin par le moyen des hommes ou des animaux, *in-quarto*, grand papier, en deux vol. avec 100. Planches. 44 liv.

*Chrysti. Wolfii Matheseos universæ Elementa, in-4°.* en 4. vol. *Genevæ.* 54 l.

Cours de Mathématique, qui comprend les parties de cette Science les plus utiles à un homme de Guerre, par M. Ozanam, de l'Académie des Sciences, en 5. vol. *in-octavo.* avec plus de 200 Planches. 40 l.

*Idem.* Récréations Mathématiques & Physiques où l'on trouve plusieurs Problêmes curieux d'Arithmetique, de Géometrie, d'Optique, de Méchanique, de Gnomonique, de Cosmographie & de Physique, avec un Traité des Horloges élementaires, des Lampes perpetuelles & des Phosphores, & la description des tours de Gibeciere, derniere édition en quatre vol. *in-8°.* avec plus de 100 Planches. 20 liv.

Recueil des Pieces, qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences, depuis leur fondation en 1720. jusqu'en 1732. en 2. vol. *in-quarto*, avec quantité de Planches. 18 liv.

La nouvelle Mécanique ou Statique, par M. Varignon de l'Académie Royale des Sciences, en 2 vol. *in-quarto*, enrichis de 65 Planches. 20 l.

L'arithmétique des Géometres, contenant l'Arithmetique, l'Algebre, l'Analyse, les progressions, &c. & généralement tout ce que l'on renferme sous le nom d'*Elemens de Mathematiques*, par M. l'Abbé Deidier, *in-quarto*, 12 liv.

La Science des Géometres, ou la Théorie & la Pratique de la Géometrie, qui renferme les Elemens d'Euclide, la Trigonometrie, la Longimetrie, le Nivellement, la Planimetrie, la Géodesie, les Sections Coniques, la Stereometrie, & généralement tout ce qui concerne les proprietés des lignes, des surfaces & des solides, soit rectilignes, soit curvilignes, par M. l'Abbé Deidier, *in-quarto*, enrichi de 47. Planches. 15. liv.

Principes généraux de la Nature, appliqués au Mécanisme Astronomique, & comparés aux Principes de la Philosophie de M. Newton. Par M. de Gamaches, Chanoine Regulier de Sainte-Croix de la Bretonnerie, & membre de l'Académie Royale des Sciences, *in-4°. sous presse*, enrichi de très-belles Vignettes & Culs de Lampe.

Le parfait Ingénieur François, ou la Fortification réguliere & irréguliere, suivant les trois systêmes de M. de Vauban, & ceux de Mrs Coëhorn, Pagan, de Ville, &c. avec l'attaque & défense des Places, *in-4°.* avec plus de 40 Planches, par M. l'Abbé Deidier, Paris, 1736. 12 l.

Essay sur l'application des Forces centrales aux effets de la poudre à canon, par M. Bigot de Morogues, *in-octavo*, 1737. 2. l. 10 s.

Nouveaux Elemens de Fortification, par M. le Blond, Maître de Mathematique des Pages du Roy, *in douze*, avec figure, *sous presse.*

*On trouve chez le meme Libraire toutes sortes de Livres d'Architecture, de Mathematique, de Géometrie, de Fortification, & autres.*

ACCADEMIA
R. DELLE SCIENZE
DI TORINO